

M

A

T

E

M

A

T

i

K

1

FONKSİYONLAR

$A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ iki küme olsun

eğer $f \subset A \times B$ bağıntısı aşağıdaki iki özelliği sağlarsa f 'ye A 'dan B 'ye bir fonksiyon denir.

1. $\forall x \in A$ için $\exists y \in B$ böyleyse (A 'da her eleman B 'de de olabilir.)
 $f(x) = y$ 'dir.

$\forall x$ sayısının $y \in B$ olmak üzere sadece bir görüntüsü olması

2. $\forall x \in A$ ve $\forall y_1, y_2 \in B$ için

$f(x) = y_1$, $f(x) = y_2$ ve $y_1 = y_2$ 'dir. (x 'in sadece bir görüntüsü olması)

NOT!!!

$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ için

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

kümesine A ve B kümelerinin kartesik çarpımı denir.

$A \times B$ 'nin her bir alt kümesine A 'dan B 'ye bir bağıntı denir.

A kümesine fonksiyonun **tanım kümesi**

B kümesine fonksiyonun **değer kümesi**

$f(A)$ kümesine fonksiyonun **görüntü kümesi** denir.

$f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) = b, b \in B\}$ kümesine fonksiyonun **ters görüntü kümesi** denir.

$f: A \rightarrow B$ fonksiyon olmak üzere

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ olursa

f 'ye **iyi tanımlı fonksiyon** denir.

Örnek: Aşağıdakilerin tanım kümelerini bulun.

1. $f(x) = 3x^2 + 7x - 8$

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ gibi bir polinom olduğundan $f(x)$ 'in tanım kümesi $\mathbb{R}$ 'dir.

2. $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-x-6}$

Rasyonel fonksiyon

$T = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

$x^2 - x - 6 = 0$
 $\begin{matrix} -3 \\ +2 \end{matrix}$
 $x_1 = 3$
 $x_2 = -2$

3. $h(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-9}}$

İrasyonel fonksiyon

$\frac{2-x}{x^2-9} \geq 0$ olması gerekir.

	3	2	3
$\frac{2-x}{x^2-9}$	+	0	-
$\frac{2-x}{x^2-9}$	+	0	-
$\frac{2-x}{x^2-9}$	+	-	+
$\frac{2-x}{x^2-9}$	+	-	+
$\frac{2-x}{x^2-9}$	+	-	+
$\frac{2-x}{x^2-9}$	+	-	+

$T = (-\infty, -3) \cup [2, 3)$

$T = \{x \mid x > -3\} \cup \{x \mid 2 \leq x < 3\}$

4. $t(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

İrasyonel fonksiyon

$x-2 \geq 0$ $4-x \geq 0$

$x \geq 2$ $4 \geq x$

$T = [2, 4]$

$$5. \sqrt[3]{\frac{2-x}{x^2-9}}$$

irrasyonel fonksiyon

$$T = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonun tanım ve değer kümesini bulun.

$$1. f(x) = \sqrt{x-2}$$

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$T = [2, +\infty)$$

$$y = \sqrt{x-2} \geq 0$$

$$D = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

$$y \geq 0$$

$$D = [0, +\infty)$$

$$2. f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$T = \mathbb{R}$$

$$x^2 - 4x + 5 - y = 0$$

$$\Delta = 16 - 20 + 4y$$

$$y = x^2 - 4x + 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

$$= 4y - 4$$

olması gerekir

$$4y - 4 \geq 0 \quad y \geq 1 \quad D = [1, +\infty)$$

$$3. h(x) = x^3 - 1$$

$$T = \mathbb{R}$$

$$y = x^3 - 1$$

$$x = \sqrt[3]{y+1}$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$4. \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 3x + 2}$$

$$T = \mathbb{R} - \{2, 1\}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} + \frac{2}{x^2 - 3x + 2} - y = 0$$

$$1 - y + \frac{2}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

$$(1-y)x^2 - 3(1-y) + 2(1-y) + 2 = 0$$

$$(1-y)x^2 - 3 + 3y + 2 - 2y + 2 = 0$$

$$(1-y)x^2 + y + 1 = 0 \quad \Delta \geq 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1-y) \geq 0$$

$$= 1 - 4 + 4y \geq 0$$

$$y \geq \frac{3}{4}$$

$$D = \left[\frac{3}{4}, +\infty \right)$$

Tanım: $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olmak üzere

1. $f: A \rightarrow B$ verilsin

$\forall x \in A$ ve $b \in B$ için

$f(x) = b$ ise f 'ye **sabit fonksiyon** denir.

2. $f: A \rightarrow A$

$x \rightarrow f(x) = x$ ise

f 'ye **birim (özdeş) fonksiyon** denir.

3. $f: A \rightarrow B$ ve $g: A \rightarrow B$ iki fonksiyon olsun

$\forall x \in A$ için

$f(x) = g(x)$ ise

f ve g 'ye **eşit fonksiyon** denir.

Tanım: $f, g: A \rightarrow B$ olsun

$$1. (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

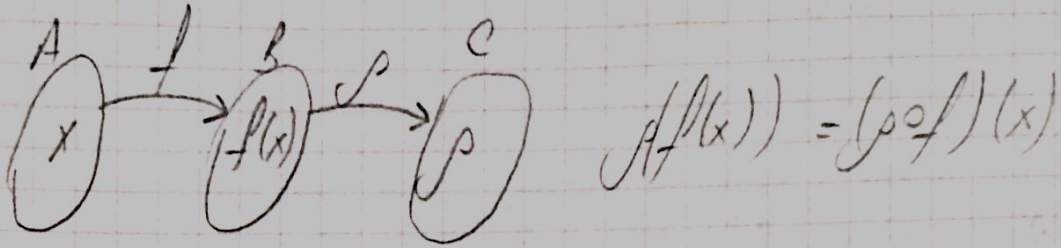
$$2. (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$3. \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

Tanım

$f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ iki fonksiyon olsun

$h = g \circ f: A \rightarrow C$ fonksiyonuna bu **iki fonksiyonun bileşimi** denir.



Tanım

$f: A \rightarrow B$ 'ye bir fonksiyon olsun

$\forall x_1, x_2 \in A$ için

$x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise

f 'ye **birebir fonksiyon** denir.

$f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ ise f 1:1'dir.

Tanım

$f: A \rightarrow B$ 'ye bir fonksiyon olsun

$\forall y \in B$ için $\exists x \in A$

böyleyse ($\exists$)

$f(x) = y$ ise $f(A) = B$

f fonksiyonuna **örtelenebilir fonksiyon** denir

Tanım

$f: A \rightarrow B$ 'ye ve $g: B \rightarrow A$ 'ya iki fonksiyon olsun

Eğer $g \circ f = f \circ g = I$ ise

g 'ye f 'in **ters fonksiyonu** denir.

NOT!!! Eğer bir fonksiyon birebir **Scanned by CamScanner**

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonların terslerini bulunuz.

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 3x + 2$

f fonksiyonu 1:1 ve örterdir.

0 halde f 'nin tersi vardır.

$$y = 3x + 2 \Rightarrow x = \frac{y-2}{3}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$$

2. $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad h(x) = x^2$

$$y = x^2 \quad x = \sqrt{y}$$

$$h^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$h^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Tanım

$A_1, A_2, \dots, A_n$ ikiser ikiser ayrık kümeler olsun

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$x \mapsto f_i(x) = y, \quad 1 \leq i \leq n$ birer fonksiyon olmak üzere

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$f: A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A_1 \text{ ise} \\ f_2(x) & x \in A_2 \text{ ise} \\ \vdots \\ f_n(x) & x \in A_n \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **parçalı fonksiyon** denir.

Örnek: $f(x) = |x-2|$

$$= \begin{cases} x-2, & x-2 \geq 0 \\ -x+2, & x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \text{ ise} \\ -x+2, & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Örnek: $h(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$

$$= \begin{cases} 1, & x-1 > 0 \\ -1, & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$$

Tanım

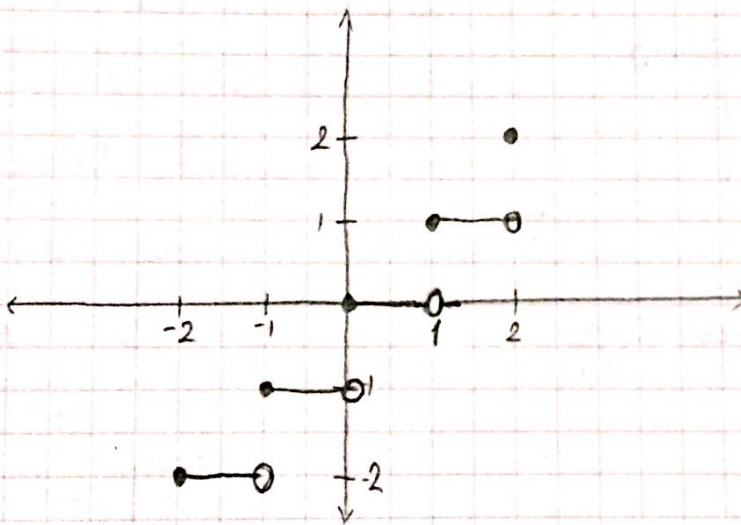
$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$n \leq x < n+1$ setindeki x reel sayıları n'ye yatan fonksiyonun x 'in tam değer fonksiyonu denir ve $\llbracket x \rrbracket$ olarak gösterilir.

Örnek:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ 'in grafiğini $[-2, 2]$ aralığında çizelim

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$



Tanım

$y = \rho(x)$ fonksiyonu verilsin

$$y = f(x) = \text{sign}(\rho(x)) = \begin{cases} 1, & \rho(x) > 0 \\ 0, & \rho(x) = 0 \\ -1, & \rho(x) < 0 \end{cases}$$

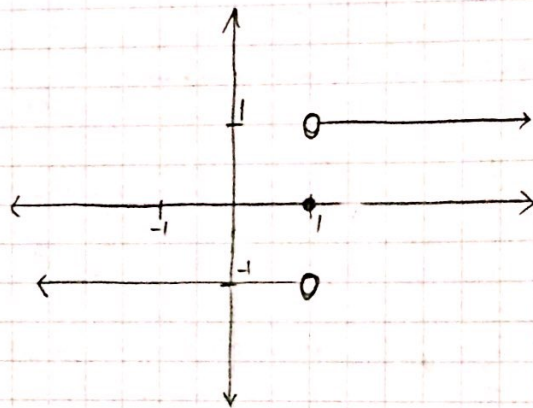
Şeklinde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonuna $\rho(x)$ fonksiyonun **işaret fonksiyonu** denir.

Örnek;

$$y = f(x) = \text{signum}(x-1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x-1 > 0 \\ 0, & x-1 = 0 \\ -1, & x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$$



Tanım

$a \in \mathbb{R}^+$ $a \neq 1$ olmak üzere

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto f(x) = a^x$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **üstel fonksiyon** denir.

NOT!!!

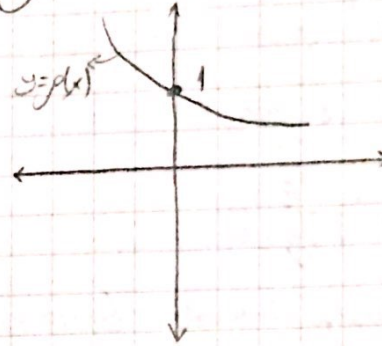
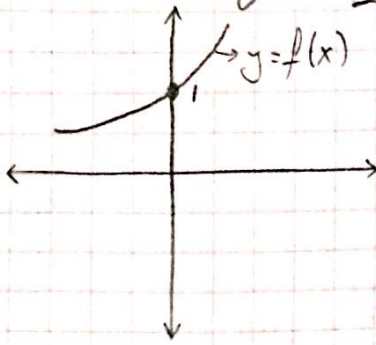
Bir grafikte cisimler paralel iki noktada kesişiyorsa 1:1'dir.

NOT!!!

Bir fonksiyonun grafiğinin $y=x$ doğrusuna göre simetrisi fonksiyonun tersinin grafiğidir.

Örnek:

$f(x)=2^x$ ve $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.



İstel fonksiyonunun Özellikleri

1. İstel fonksiyon hiçbir zaman sıfır olamaz

$$a^x \neq 0$$

2. İstel fonksiyon birebirdir.

$$x_1 = x_2 \text{ ile } f(x_1) = f(x_2)$$

3. İstel fonksiyon örtendir.

4. Tersi vardır.

Tanım

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow f(x) = a^x$$

İstilen tanımlanan istel fonksiyonunun tersine **logaritmik fonksiyon** denir.

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow f(x) = \log x$$

ile gösterilir.

Logaritmik fonksiyonun özellikleri

$$1. x = a^b \Leftrightarrow \log_a x = b$$

$$2. a^{\log_a x} = x$$

$$3. \log_e x = \ln x \text{ 'dir } e \approx 2,71$$

$$4. \log_a 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = a^0$$

$$5. \log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$6. \log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$$

$$7. \log_a a = 1 \Leftrightarrow a = a^1$$

$$8. \log_a u^k = k \cdot \log_a u$$

$$9. \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

Örnek fonksiyonlarının tanım kümelerini bulalım.

$$1. f(x) = e^{1/x}$$

$$T = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow f(x) = e^{1/x}$$

$$2. h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\frac{x-1}{x+1} > 0$$

$$T = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

	-1	1
$\frac{x-1}{x+1}$	-	+
$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$	-	+

$$3. p(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

$$e^x - 1 \geq 0$$

$$e^x \geq 1$$

$$e^x \geq e^0$$

$$x \geq 0$$

$$T = [0, +\infty)$$

Örnek x kadir

1. $10^x = 325$

$$\log_{10} 10^x = \log_{10} 325$$

$$x \cdot \log_{10} 10 = \log_{10} 325$$

$$x = \log_{10} 325$$

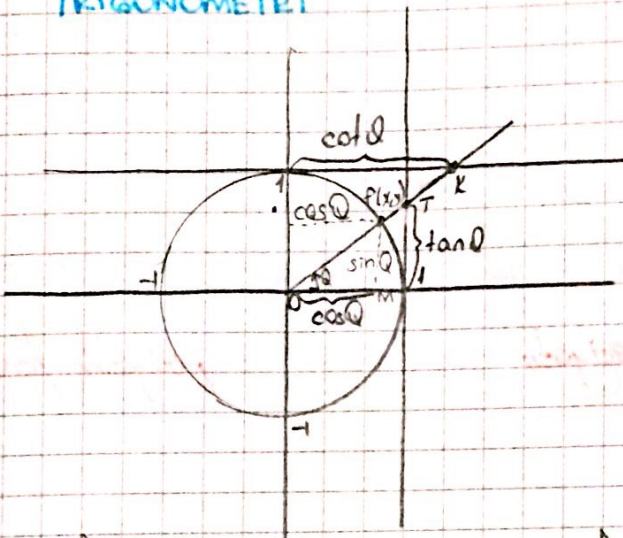
2. $23 = \ln \frac{17}{x}$

$$23 = \ln 17 - \ln x$$

$$\ln x = \ln 17 - 23$$

$$x = e^{\ln 17 - 23}$$

TRIGONOMETRİ



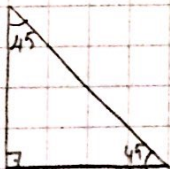
$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\sin \theta = \frac{|PM|}{|OP|}$$

$$\cos \theta = \frac{|OM|}{|OP|}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

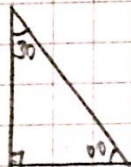


$$\sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45 = 1$$

$$\cot 45 = 1$$



$$\sin 30 = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30 = \sqrt{3}$$

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60 = \sqrt{3}$$

$$\cot 60 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 90 = 1$$

$$\cos 90 = 0$$

$$\tan 90 = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\cot 90 = \frac{0}{1} = 0$$

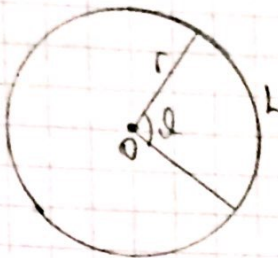
$$\cos 0 = 1$$

$$\sin 0 = 0$$

$$\tan 0 = 0$$

$$\cot 0 = \infty$$

Radyan



$$Q = \frac{L}{r} \text{ radyan}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200}$$

Periyot

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x) = y \quad \text{fonksiyonu verisin}$$

$\forall x \in A$ için $f(x) = P(x+T)$ şartını sağlayan en küçük $T > 0$ sayısına $f(x)$ fonksiyonun **periyodu** denir. ve f 'ye **periyodik fonksiyon** denir.

Örnek

$f(x) = \sin x$ 'nin periyodik midir? Periyodik ise periyoduna bulunur.

$$\begin{aligned} \sin(x+\pi) &= \sin x \cdot \cos \pi + \cos x \cdot \sin \pi \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x+2\pi) &= \sin x \cdot \cos 2\pi + \cos x \cdot \sin 2\pi \\ &= \sin x \end{aligned}$$

Trigonometri Özellikleri

$$1. \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$2. \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$3. \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \pm \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$4. \sin 2\alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

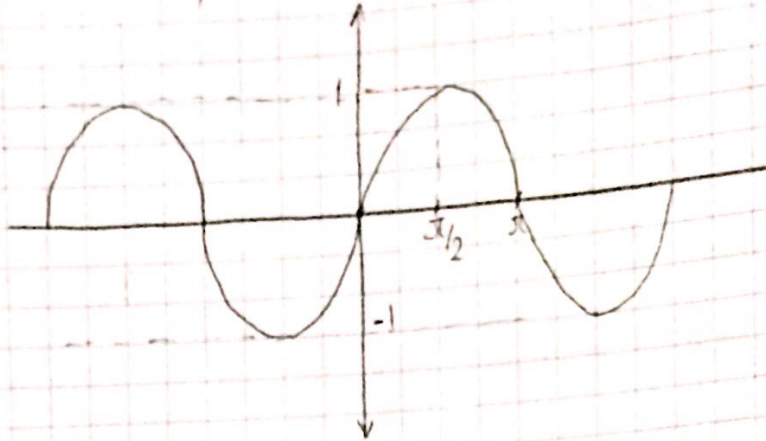
$$5. \cos 2\alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha \\ = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ = 2\cos^2 \alpha - 1 \\ = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$6. \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Trigonometrische Funktionen

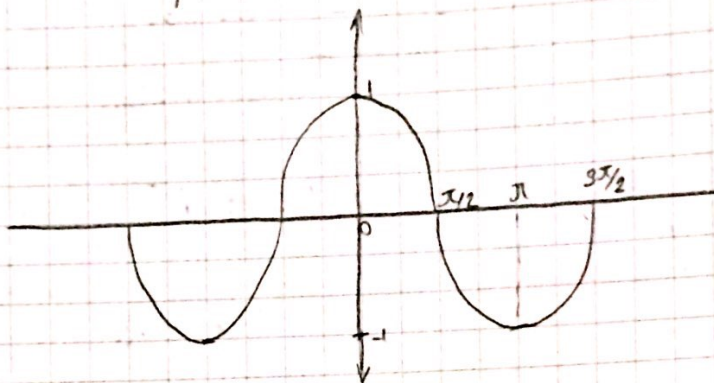
$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \mapsto f(x) = \sin x$$



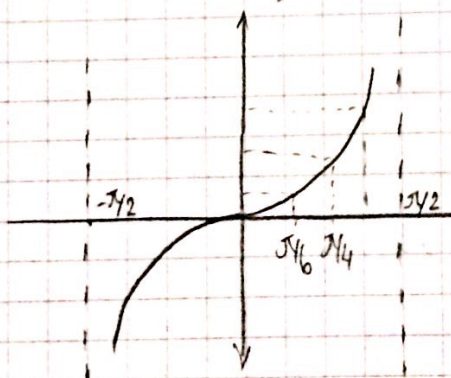
$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \mapsto f(x) = \cos x$$



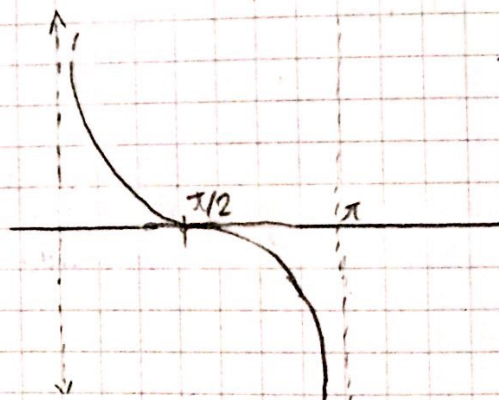
$$f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \tan x$$



$$f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \cot x$$



UYGULAMALAR

1. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Gözüm

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$T = T_1 \cap T_2$$

$$f_1(x) = \sqrt{x-1}$$

$$x-1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$T_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

$$f_2(x) = \sqrt{5-x}$$

$$5-x \geq 0$$

$$5 \geq x$$

$$T_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$$

$$T = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$$

2. $p(x) = \sqrt{\log(5x-x^2)}$

Gözüm

$$\log(5x-x^2) \geq 0$$

$$5x-x^2 \geq 1$$

$$x^2-5x+1 \leq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$$

	a	b
$(x-x_1)$	-	+
$(x-x_2)$	-	-
$(x-x_1)(x-x_2)$	+	+

$$T = \left[\frac{5 - \sqrt{21}}{2}, \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right]$$

$$T = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\}$$

3. $h(x) = \log x^5$

Gözüm

$$T = \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Not!!! iki kökü bilinen denklemin denklemi

$$(x-x_1)(x-x_2) \text{ dir}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$4. u(x) = \arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right) + \log(4-x)$$

Gözüm

$$\left|\frac{x-3}{2}\right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{x-3}{2} \leq 1 \quad \text{ve} \quad 4-x > 0$$

$$1 \leq x \leq 5$$

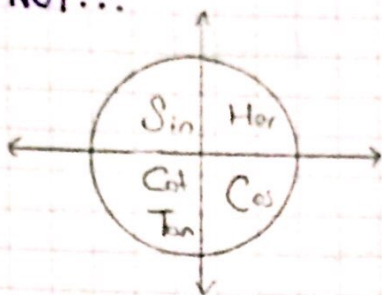
$$x < 4$$

$$1 \leq x \leq 4$$

$$T = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$$

$$T = [1, 4)$$

Not!!!



$$5. y(x) = \arccos\left(\frac{3}{4+2\sin x}\right)$$

Gözüm

$$-1 \leq \frac{3}{4+2\sin x} \leq 1$$

$$\frac{3}{4+2\sin x} \leq 1$$

$$3 \leq 4+2\sin x$$

$$\sin x = \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \sin x$$

$$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$6. h(x) = \log(\cos x) \text{ fonksiyonunun tanım kümesini bulun}$$

Gözüm

$$\cos x > 0$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$

Gözüm

$$|x| - x > 0$$

$$|x| > x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x < 0$$

$$T = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

$$T = \mathbb{R}^-$$

8. $w(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$

Gözüm

$$\arcsin(\log_2 x) \geq 0$$

$$0 \leq \log_2 x \leq 1$$

$$1 \leq x \leq 2$$

$$T = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

$$T = [1, 2]$$

$$0 \leq \log_2 x$$

$$2^0 \leq x$$

$$1 \leq x$$

$$\log_2 x \leq 1$$

$$x \leq 2$$

9. $k(x) = \log_2(\log_3(\log_4 x))$

Gözüm

$$\log_3(\log_4 x) > 0$$

$$\log_4 x > 1$$

$$x > 4$$

$$T = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$$

$$T = (4, \infty)$$

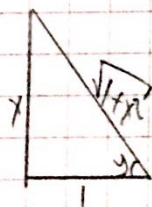
10. $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Gözüm

$$\arctan x = y$$

$$x = \tan y$$

$$x = \frac{\sin y}{\cos y}$$



olduğunu gösteriniz.

$$\sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$11. \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

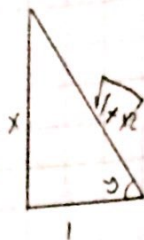
oldysunu pösterin.

Gözüm

$$\arctan x = y$$

$$x = \tan y$$

$$x = \frac{\sin y}{\cos y}$$



$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

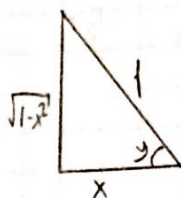
$$12. \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

oldysunu pösterin

Gözüm

$$\arccos x = y$$

$$\cos y = x$$



$$\tan y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

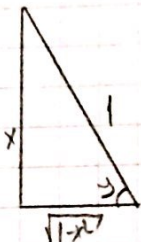
$$13. \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

oldysunu pösterin

Gözüm

$$\arcsin x = y$$

$$\sin y = x$$



$$\tan y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

oldysunu pösterin

Gözüm

$$\cos x = y$$

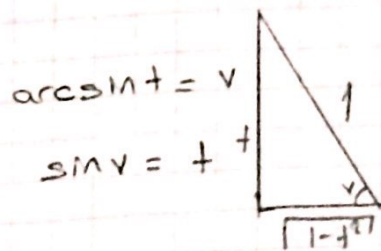
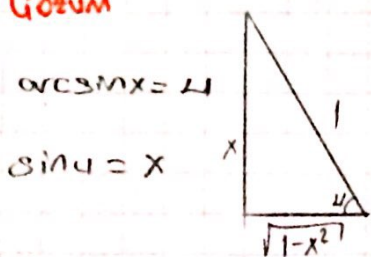
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = y$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \arcsin y$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

15. $\arcsin x + \arcsin t = \arcsin (x \cdot (\sqrt{1-t^2}) + t \cdot (\sqrt{1-x^2}))$

Gözüm



$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \sin v$$

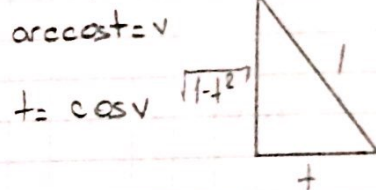
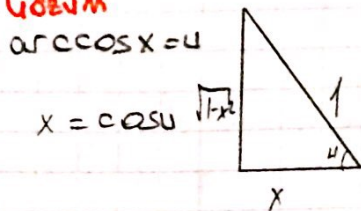
$$= x \cdot \sqrt{1-t^2} + t \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$u+v = \arcsin (x \sqrt{1-t^2} + t \sqrt{1-x^2})$$

$$\arcsin x + \arcsin t = \arcsin (x \sqrt{1-t^2} + t \sqrt{1-x^2})$$

16. $\arccos x + \arccos t = \arccos (xt - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)})$ oldgünü pösterin

Gözüm



$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \sin v$$

$$= x \cdot t - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}$$

$$\cos(\arccos x + \arccos t) = xt - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}$$

17. $\arctan x + \arctan t = \arctan \left(\frac{x+t}{1-xt} \right)$ oldgünü pösterin

Gözüm

$\arctan x = u$

$x = \tan u$

$\arctan t = v$

$t = \tan v$

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \frac{x+t}{1-xt}$$

$$u+v = \arctan \left(\frac{x+t}{1-xt} \right)$$

$$\arctan x + \arctan t = \arctan \left(\frac{x+t}{1-xt} \right)$$

18. $\sin(2 \arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ Oldyinu poster

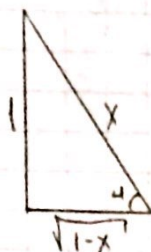
Qabim

$$\arcsin x = u$$

$$\sin u = x$$

$$\sin 2u = 2 \sin u \cdot \cos u$$

$$\sin 2u = 2x\sqrt{1-x^2}$$



Limit

Örnek

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$x \rightarrow 1$ iken $f(x) = ?$

	$f(x)$
0.99	1.99
0.999	1.999
0.9999	1.9999
↓	↓
1	2
↑	↑
1.0001	2.0001
1.001	2.001
1.01	2.01

$x \rightarrow 1$ iken

$$f(x) \rightarrow 2$$

Örnek

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & , x < 2 \\ x-1 & , x > 2 \end{cases}$$

$x \rightarrow 2$ ike $f(x) = ?$

x	$f(x) = x-1$
2.1	1.1
2.01	1.01
2.001	1.001
2.0001	1.0001
↓	↓
2	1

x	$f(x) = 2x-3$
1.9	0.8
1.99	0.98
1.999	0.998
1.9999	0.9998
↓	↓
2	1

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$$

NOT !!!

$x \rightarrow 2^+$; x 'e sağdan yaklaşıırken

$x \rightarrow 2^-$; x 'e soldan yaklaşıırken



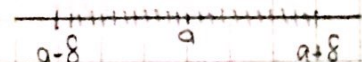
Tanım

$\delta > 0$ reel sayı ve $a \in \mathbb{R}$ olsun

$$K = \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

$$= \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

$= (a-\delta, a+\delta)$ kimesine



Tanım

$A \subset \mathbb{R}$ kümesi ve $a \in \mathbb{R}$ noktası verilsin
 $\forall \varepsilon > 0$ için a 'nın ε komşuluğundan A kümesinin a 'dan farklı
en az bir elemanı varsa a 'ya A kümesinin yığılma noktası denir

Örnek

$$A = (2, 3)$$

$$a = 3 \in \mathbb{R}, 3 \in A$$



* 3 noktası yığılma noktası mı?

Örnek

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x + 1$$

$$x \rightarrow 2 \text{ iken } f(x) \rightarrow ?$$

x	f(x)
1,9	4,80
1,91	4,82
1,95	4,90
1,99	4,98
1,999	4,998

x	f(x)
2,1	5,20
2,08	5,16
2,05	5,10
2,01	5,02
2,001	5,002

$$x \rightarrow 2 \text{ iken } f(x) \rightarrow 5$$

Sınavda
sorulacak
sorunun
adıdır imzalı
ilgili

* Yani x 'ler 2'nin bir komşuluğunda iken $f(x)$ 'lerde 5'in bir
komşuluğunda bulunmaktadır.

$f(x)$ 'lerin bir komşuluğu:

$$(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon) \text{ olsun}$$

$$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$$

$$|f(x) - 5| < \varepsilon$$

$$|2x + 1 - 5| < \varepsilon$$

$$|2x - 4| < \varepsilon$$

$$2|x - 2| < \varepsilon$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

0 halde $\frac{\epsilon}{2} = \delta$ seçerek x 'ler 2'nin $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ komşuluğunda iken $f(x)$ lerde 5'in ϵ komşuluğundadır.

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-5| < \epsilon$$

Tanım

$A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ A 'nin yığılma noktası ve

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon verilsin

$\forall \epsilon > 0$ için $|x-a| < \delta$ olduğunda

$$|f(x)-l| < \epsilon$$

$\delta = \delta(\epsilon) > 0$ reel sayı varsa

x a 'ya yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonunun limiti $f(x) = l$ 'dir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

Bir noktanın limitinden bahsedilmesi o noktanın tanımlı olması sonucu değildir.

Örnek

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x+1) = 7$$

$\forall \epsilon > 0$ için $|x-2| < \delta$ olduğunda $|f(x)-7| < \epsilon$ olacak şekilde

$\delta = \delta(\epsilon) > 0$ reel sayısı var mıdır?

$$|f(x) - 7| = |(3x+1) - 7|$$

$$= |3x-6|$$

$$= 3|x-2| < 3\delta = \epsilon$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\epsilon}{3} > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (3x+1) = 7$$

Örnek

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3) = 8$$

$\forall \varepsilon > 0$ için $|x-1| < \delta$ olduğunda

$|f(x) - 8| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

$$|f(x) - 8| = |(x^2 - 2x + 3) - 8|$$

$$= |x^2 - 2x + 1|$$

$$= |(x-1)^2| < \delta^2 = \varepsilon$$

bulunur o halde $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} > 0$ vardır.

Örnek

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x} = ?$$

Tanım Kümesi = $[0, \infty)$

$a = -2$ noktası $\sqrt{\cdot}$ fonksiyonunun tanım noktası olmadığından limiti yoktur.

Özellikler

$A \subset \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ limitleri varsa;

1. $\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $c \in \mathbb{R}$

2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

4. $\forall x \in A \Rightarrow g(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ ise

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

5. $P(x)$ polinomu ise

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{v(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} v(x)}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} \log_c v(x) = \log_c \left(\lim_{x \rightarrow a} v(x) \right)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{v(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} v(x)}$$

Tanım

1. $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin

$\forall \varepsilon > 0$ için $0 < x - a < \delta$ olduğunda

$|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ varsa $x \rightarrow a^+$

iken $f(x)$ fonksiyonunun limiti L_1 'dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1 \text{ (sağ limiti)}$$

2. $\forall \varepsilon > 0$ için $a - \delta < x < a$ olduğundan

$|f(x) - L_2| < \varepsilon$ olacak şekilde

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ varsa $x \rightarrow a^-$ iken $f(x)$ fonksiyonunun sol

limiti L_2 'dir denir ve $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$ (sol limiti)

Sonuç!!!

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Örnek $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} = \frac{1}{5}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ mevcut değil

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{(x-2)(x+3)} = -\frac{1}{5}$$

Sandwich Teoremi

Eğer

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ ve}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

ise

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Sonsuzda Limit

$\forall \varepsilon > 0$ için $x > m$ olduğunda

$|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $m > 0$ sayısı varsa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

Örnek

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ için}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1$$

NOT !!!

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{0} = \infty$$

Özellikler

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$3. a > 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

4. $0 < a < 1$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + \dots}{b_m x^m + \dots} = \begin{cases} \infty, & n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & n < m \end{cases}$$

Örnek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^2 + 3} = ? \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{3}{x^2} \right)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)}{2 + \frac{3}{x^2}} \\ &= \frac{\infty (1+0)}{2+0} = \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty \end{aligned}$$

Örnek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = ? (\infty - \infty)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Trigonometrik Fonksiyonların Limiti

$$1. \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Örnek

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin mx}{mx} \cdot \frac{mx}{\sin nx} \cdot \frac{nx}{nx} \cdot \frac{1}{nx} \right] \\ &= \frac{m}{n} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{\sin nx} \right] = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{nx}$$

$$\begin{aligned} mx &= \theta \\ x &= \frac{\theta}{m} \end{aligned} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{nx} = \lim_{x \rightarrow \theta} \frac{\sin \theta}{\frac{n \cdot \theta}{m}} = \frac{m}{n}$$

SÜREKLİLİK

Bir Nuktada Süreklilik

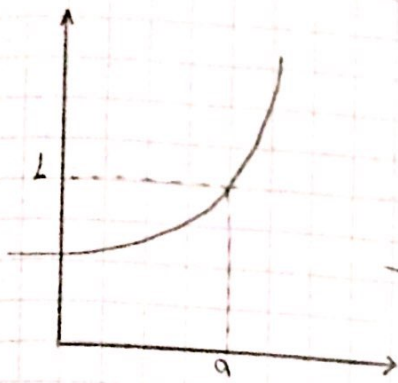
$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ve $a \in A$ noktası verilsin

Eğer;

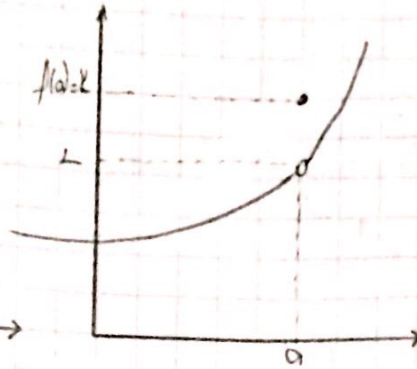
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

$f(x)$ fonksiyonu a noktasında tanımlı olsun

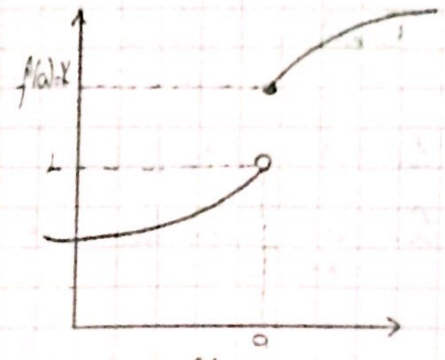
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ise $f(x)$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli dir.



Limiti var
 $L=f(a)$ ve sürekli



Limiti var L'dir
Sürekli değildir



$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = K = f(a)$

$L \neq K$ olduğu için

Sürekli değil
Limiti yok

Limiti Kullanarak Süreklilik Tanımı

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$ olsun

$f(x)$ fonksiyonunun $a \in A$ noktasında sürekli'dir.

$\forall \epsilon > 0$ için $|x-a| < \delta$ olduğunda

$|f(x) - f(a)| < \epsilon$ olacak şekilde

$\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı vardır.

Tanım

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ve $a \in A$ noktası verilsin

1. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ fonksiyon a noktasında sağdan sürekli

2. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ise fonksiyon a noktasında soldan sürekli'dir.

Sonuç!!!

Bir $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart fonksiyonun hem soldan hem sağdan sürekli olması gerektir.

Örnek $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x > 1 \\ 2x-x^2, & x \leq 1 \end{cases}$

1. $x=1$ noktasında fonksiyon tanımlı ve $f(1)=2$

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+1) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-x^2) = 1$

Limit yok

Sürekli değil

UYGULAMALAR

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3) = 3$ olduğunu gösteriniz.

Gözüm

$\forall \varepsilon > 0$ için $|x - 0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - 3| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ bulunabiliyor ise $x \rightarrow a$ iken $f(x)$ 'in limiti L 'dir ve

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ile gösterilir

$|x - 0| < \delta$ iken

$|f(x) - 3| < \varepsilon$ olacak şekilde

$\delta > 0$? $|x - 0| < \delta$

$|x^2 + 3 - 3| < \varepsilon$

$|x^2| < \varepsilon$

$|x|^2 < \varepsilon$

$|x| < \sqrt{\varepsilon}$ $\delta \leq \sqrt{\varepsilon}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ olduğunu gösteriniz.

Gözüm

$|x - 2| < \delta$ iken

$|f(x) - 7| < \varepsilon$ olacak şekilde

$|3x + 1 - 7| < \varepsilon$

$3|x - 2| < \varepsilon$

$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right) = ?$$

(1) (x+1)

Gözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2-x-1}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x}{x^2-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x+1} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1/2} \left(\frac{|2x|}{x} \right) = ?$$

Gözüm

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1/2^+} \frac{|2x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 1/2^+} \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1/2^-} \frac{|2x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 1/2^-} \frac{2x}{x} = 2 \end{aligned} \right\} \text{Limit } 2$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \llbracket x \rrbracket = ?$$

Gözüm

$$\llbracket x \rrbracket = k \quad k \leq x < k+1$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{+} \quad \xleftarrow{-} \\ | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \llbracket x \rrbracket &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \llbracket x \rrbracket &= 1 \end{aligned} \right\} \text{Limit yok}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{x^2} \right) = ?$$

Görem

$\left(\frac{0}{0}\right)$ Belirsizliği

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{x^2} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{1-4x^2}}{1 + \sqrt{1-4x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-4x^2)}{x^2 (1 + \sqrt{1-4x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2 (1 + \sqrt{1-4x^2})} \\ &= 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1-4x^2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a} = ?$$

Görem

$\left(\frac{0}{0}\right)$ Belirsizliği

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a} \right) \left(\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}} \right) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{(x-a)(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt[3]{a}} \end{aligned}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \right) = ?$$

Çözüm

$\left(\frac{0}{0}\right)$ Belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \right) \left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x) = ?$$

Çözüm

$(\infty - \infty)$ Belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x) \left(\frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6 - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x + 6}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} \right)} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x + 6}{|x| \sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x + 6}{x \left(\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(-5 + \frac{6}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1 \right)}$$

$$= -\frac{5}{2}$$

10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 1} + x) = ?$

Gözetim

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 1} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 5x + 1} - x)}{(\sqrt{x^2 + 5x + 1} - x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5x + 1} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 1}{\sqrt{x^2 + 5x + 1} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 1}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(5 + \frac{1}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(5 + \frac{1}{x} \right)}{- \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = ?$

Gözetim

$$f(a) \leq g(a) \leq h(a) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(a) = \lim_{x \rightarrow a} h(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(a)$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = ?$

Gözetim

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} \cdot \frac{ax}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin ax}{\sin bx} \right) = ?$$

Gözüm

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax \cdot \frac{ax}{ax}}{\sin bx \cdot \frac{bx}{bx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{bx} = a/b$$

14. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = ?$$

Gözüm

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 1 - \sin^2 \frac{ax}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 \frac{ax}{2})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(\frac{ax}{2})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(\frac{ax}{2}) \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a}{2} \cdot x \cdot x \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2\sin^2 x} = ?$$

Gözüm

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2(1 - \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1 + \cos^2 x)} = \frac{1}{4}$$

16. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right)^{\beta n}$$

Gözüm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{\alpha}} \right)^{\beta \cdot \frac{n}{\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{\alpha}} \right)^{\frac{n}{\alpha}} \right)^{\beta \cdot \alpha} = e^{\beta \cdot \alpha}$$

Not!!!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty = e$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} (n+1)^{1/n} = e$$

17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = ?$

Gösterim

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{n-1}{n-1}}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}}\right)^{n+1-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \\ &= e^{-1} + 1 \end{aligned}$$

Üç Noktada Süreklilik

$f, [a, b]$ aralığında tanımlı olsun.

1. Eğer f fonksiyonu sol uç noktasında sürekli ise fonksiyon sağdan süreklidir.

2. Eğer f fonksiyonu sağ uç noktasında sürekli ise fonksiyon soldan süreklidir.

Bir aralıkta Süreklilik

$f, [a, b]$ aralığında tanımlı olsun

1. $\forall x \in (a, b)$ noktasında fonksiyon sürekli ise

2. a noktasında sağdan
 b noktasında soldan } sürekli ise

$f, [a, b]$ aralığında süreklidir.

Teorem

f ve g fonksiyonları bir a noktasında sürekli ise $|f|, |f|^2, cf, f+g, f-g, fg$ fonksiyonu da a noktasında sürekli ise gof fonksiyonu da a noktasında sürekli dir.

Tanım

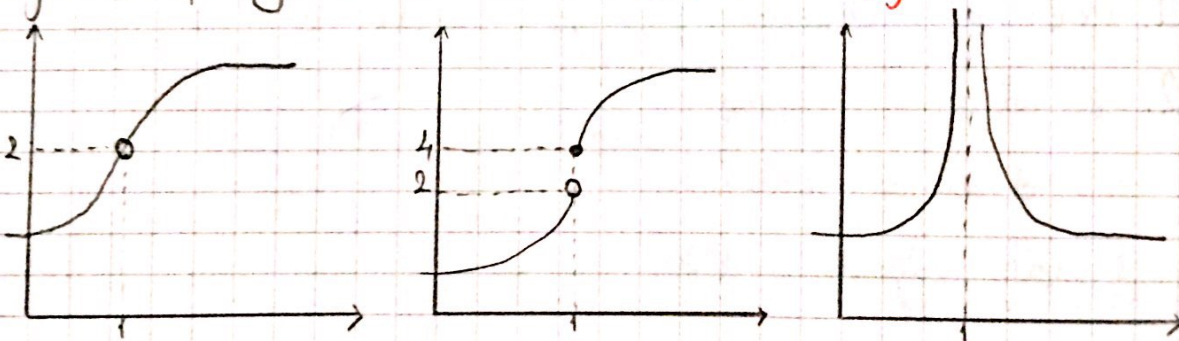
1. Eğer f fonksiyonunun bir a noktasında limiti var ise sürekli ise fonksiyonu a noktasında $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ olarak tanımlarsak bu noktada sürekli bir fonksiyon elde edilir. Bu tip süreksizlere **kaldırılabilir süreksizlik** denir.

Eğer fonksiyonunun süreksiz olduğu noktada limit yoksa, bu tip süreksizliklere **kaldırılmaz süreksizlik** denir.

2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ limitleri var ve birbirinden farklı ise f fonksiyonu a noktasında **sayısal süreksizliğe** sahiptir $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

Şeklinde f 'in a noktasındaki **sayısal** denir

3. Sağ ve sol limitlerden en az bir ∞ veya $-\infty$ ise veya mevcut değilse, bu fonksiyon a noktasında **sonsuz süreksizliğe** sahiptir



funk. $x=1$ noktasında kaldırılabilir süreksizliğe sahiptir

funk. $x=1$ noktasında sayısal süreksizliğe sahiptir

funk. $x=1$ noktasında sonsuz süreksizliğe sahiptir

Örnek: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $x=0$ noktasında sürekli midir? İnceleyiniz.

Fonksiyon $x=0$ noktasında tanımlı olmadığından dolayı sürekli değildir.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ olduğundan}$$

Fonksiyon $x=0$ noktasında kaldırılabilir sürekliliğe sahiptir.

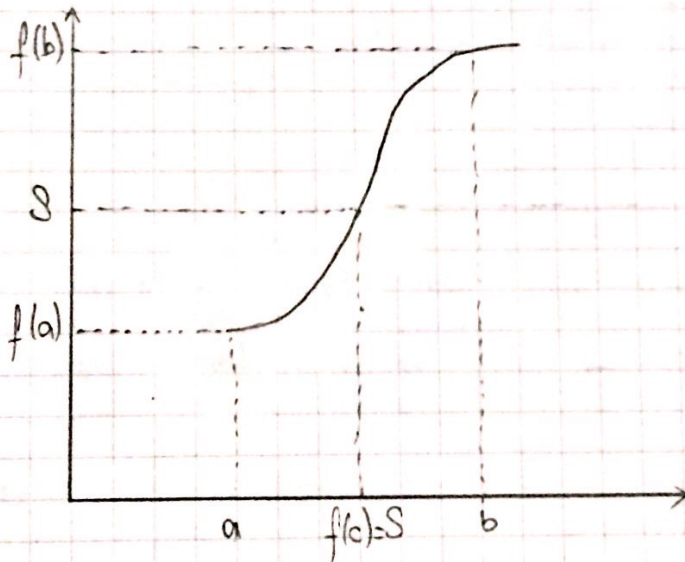
Teorem

Eğer $f, [a, b]$ sürekli ise

$\forall x \in [a, b]$ için $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ olacak şekilde $\exists p, q \in [a, b]$ var.

Burada $f(p)$ değerine **mutlak minimum değeri** $f(q)$ değerine de **mutlak maximum değeri** denir.

Böyle $[a, b]$ sürekli olan f fonksiyonunun bu aralıktaki en büyük değeri diyebiliriz.



Teorem (Aradeger Teoremi)

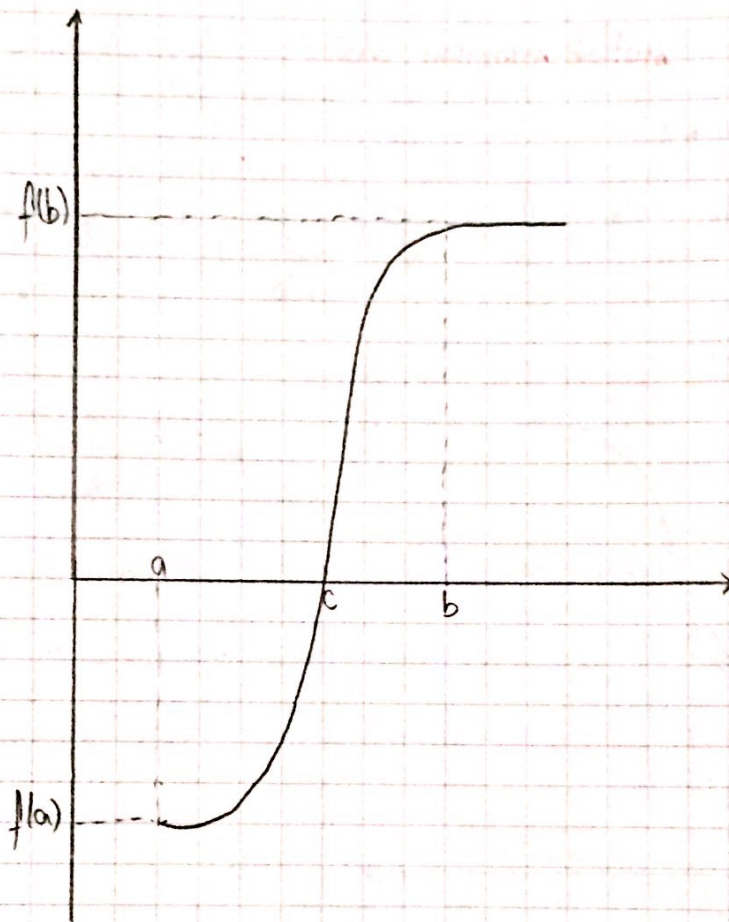
f fonksiyon $[a, b]$ aralığında sürekli olsun ve s $f(a)$ ile $f(b)$ arasında bir değer ise $[a, b]$ aralığında $f(c) = s$

olacak şekilde $\exists c \in [a, b]$ noktası vardır.

Teorem (Bolzano Teoremi)

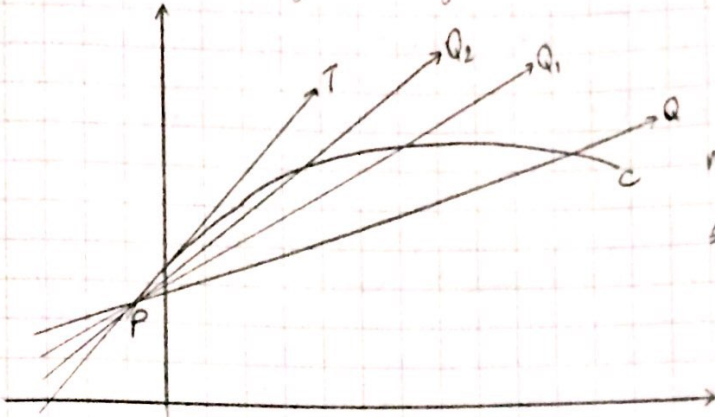
f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise $f(a)$ ile $f(b)$ zıt işaretli ise

$f(c) = 0$ olacak şekilde $\exists c \in (a, b)$ noktası vardır.



TÜREN

Bir ekrinin tepe doğru



c eğrisi herhangi bir sürekli ve $y=f(x)$ denklemleri için c eğrisi üzerinde P(Q) kirisini ele alalım

Q noktası P noktasına yaklaştıkça |PQ| kirisinin konumu değişir. Q noktasının P noktasıyla aynı olması durumunda |PQ| kirisinin konumuna c eğrisinin P noktasındaki tepeti adı verilir.

!!! rol

c eğrisi $y=f(x)$

$P=(x_0, f(x_0))$, $Q=(x_0+h, f(x_0+h))$ bulunur

|PQ| kirisinin eğimi mPQ olarak üzere

$$mPQ = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0}$$

$$\text{veya } mPQ = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ elde edilir}$$

Q, P noktasına yaklaştıkça PQ kirisinde T tepetine de yaklaşır.

O halde $h \rightarrow 0$ iken PQ kirisinde T tepetine yaklaşır $h=0$ için |PQ| kirisyle P noktasında tepet aynıdır. Buna göre c eğrisinin P noktasındaki tepetinin eğimi

$$m_T = mPQ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ elde edilir.}$$

Öyleyse $P(x_0, f(x_0))$ noktasındaki tepetin denklemini

$$y - f(x_0) = m_T - (x - x_0)$$

Bir ekrinin bir P noktasındaki eğimi eğriye tepet azerken bu T tepetinin eğimidir.

Bir fonksiyonun Türevi

$y=f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında x_0 'i içeren bir aralıkta tanımlı olsun. Eğer limit mevcut ise fonksiyon $x=x_0$ türevelidir ve bu lim değeri fonksiyonunun x_0 noktasının türevidir.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{ve} \quad f'(x_0) \text{ veya } f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

Eğer (a,b) aralığında tanımlı f fonksiyonu $\forall x \in (a,b)$ noktasında türemlenebilirse f fonksiyonu (a,b) aralığında türemlenebilir.

Not!!!

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{türevi} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

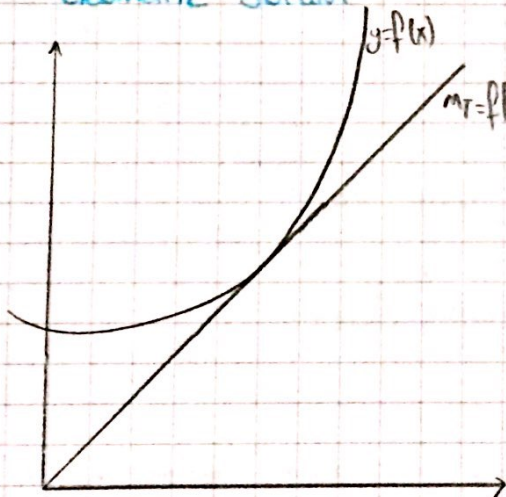
veya $x+h=x$ için $h \rightarrow 0$ $x \rightarrow x_0$ durumunda

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ile tanımlanır.}$$

Genel olarak $f'(x)$ 'in türevi

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad \text{şeklinde tanımlanır}$$

Geometrik Yorum



$y=f(x)$ fonksiyonu $x=x_0$ noktasında $f'(x_0)$ türevi, eğrinin $x=x_0$ noktasındaki teğet doğrusunun eğimidir.

$m_T=f'(x_0)$ yazılır.

Teğet doğrusunun denklemi

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Tanım

$$1. \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) = f'_+(x_0^+)$$

Limitleri varsa bu limit değeriye fonksiyonun $x=0$ noktasında sağdan türevi denir.

$$2. \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) = f'_-(x_0^-)$$

Limitleri varsa bu limitin değeriye fonksiyonun $x=x_0$ noktasında soldan türevi denir.

Teorem

f fonksiyonu $x=0$ noktası türevler olması için gerek ve yeter şart fonksiyonun sağdan ve soldan türevli olmasıdır.

Tanım

f fonksiyonu $[a,b]$ olsun

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Eğer fonksiyon (a,b) her noktasında türemlenebilir a noktasında sağdan, b noktasında soldan türevli ise (a,b) kapalı aralıkta türemlenebilir denir.

Örnek

a) $y = f(x) = x^2$

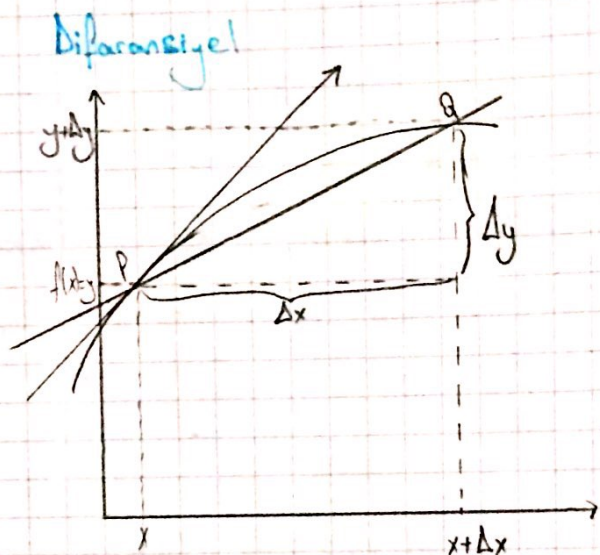
b) $y = f(x) = \frac{1}{x}$

c) $y = f(x) = \sqrt{x}$ türevinin limit tanımını kullanarak f fonksiyonunun türevini bulun.

$$\begin{aligned} d) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(x^2+h^2)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x^2+h)} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad h'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \right) \left(\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$


$$P = (x, y), Q = (x + \Delta x, f(x + \Delta x)) \\ = (x + \Delta x, y + \Delta y)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad \text{yoalabilir.}$$

Ayle Axle kadar artırım yapıldığına
yabekci değirmiştir.

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

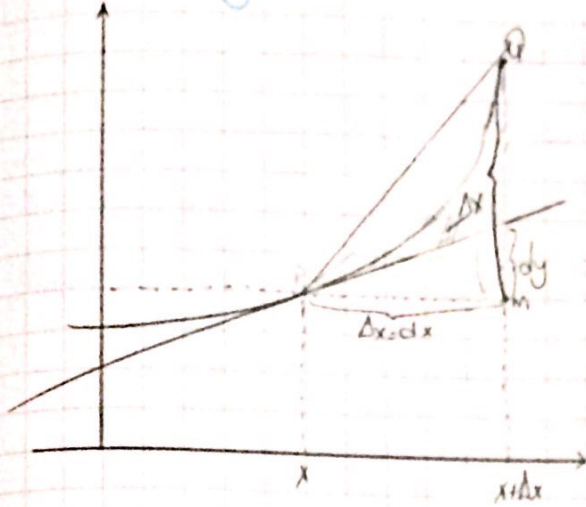
$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = f'(x) dx \quad \text{ganz bla. r.}$$

Bu ifade (dy) y'nin diferansiyelidir. dx ise x 'in diferansiyelidir.

Bu bir çok yakın deşerdir.

$$dx \approx \Delta x$$

Diferansiyelin Geometrisi



P noktasında çizilen teğetin eğimi:

$$y' = f'(x) = \frac{|MP|}{|MP|} \quad |MP| = f'(x) \cdot dx = dy$$

O halde x ile Δx arttırımı yapılarak dipında fonksiyonun y denkleminde meydana gelen değişime Δy ile ve eğrinin teğeti boyunca y' 'deki

değişimi y 'nin değişimi dy diferansiyel ile bulunur.

Burada Δy ve dy tamamen birbirinden farklı ama birbirine çok yakın değerlerdir.

Örnek $f(x) = x^2$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow dy = 2x dx$$

Teorem

Eğer bir f fonksiyonu x noktasında türevli ise bu x noktasında sürekli'dir. Bunun tersi doğru değildir.

Eğer fonksiyon x noktasında sürekli ise türevi olabilir de olmayabilir de ama sürekli değilse türevi kesinlikle yoktur.

Türev Alma Kuralları

$$1. f(x) = c = \text{sabit} \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$2. f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

f ve g fonksiyon x noktasında türemlenebilir.

n sabit sayı ise $f \cdot g, f - g$, ve nf fonksiyonunda türemlenebilir.

$$3. (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$4. (f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$5. (nf)'(x) = n f'(x)$$

6. f ve g x noktası türelenebilir ise

f, g 'de x noktasında türelenebilirlik.

$$(f+g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

7. Eğer f fonksiyonu x noktasında türelenebilir ve $f(x) \neq 0$ ise $\left(\frac{1}{f}\right)$ fonksiyonu x noktasında türelenebilir

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

8. f ve g x noktasına türelenebilir ve $g(x) \neq 0$ ise $\left(\frac{f}{g}\right)$ de x noktasında

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

İspat

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\&= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

UYGULAMALAR

1. Tek dereceli polinomların en az bir sıfır garantisi nin) olduğunu gösteriniz.

Görem

Bolzano teoremi

"f fonk. $[a, b]$ sürekli ve $f(a)$ ile $f(b)$ zıt işaretli ise $\exists c \in [a, b] \exists f(c) = 0$ dir."

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1}$$

ve $a_{2n+1} > 0$ olsun

Not!!! Polinom fonksiyonu her yerde sürekli dir.

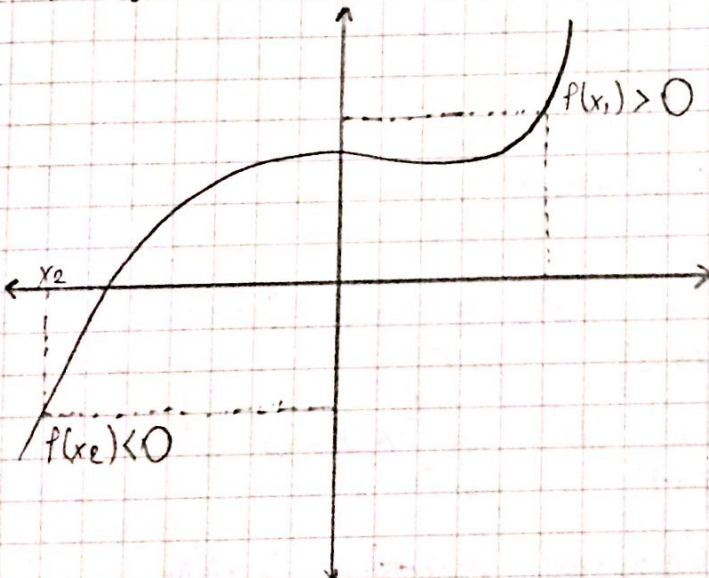
Günkü: $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

ve $\forall a \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + \dots + a_na^n = P(a)$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ ve $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ olduğunda



olduğunda $P(c) = 0$ olacak şekilde $c \in \mathbb{R}$ sayısı vardır.

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ fonksiyonunun $x=2$ 'de sürekli olup olmadığını araştırınız.

Çözüm

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 - 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 2 - 1 = 1 \end{aligned} \right\} \neq$$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ olduğundan fonksiyon $x=2$ 'de sürekli değildir (sıçrama sürekli değildir).

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonun $x=0$ 'da sürekli olup olmadığını araştırınız.

Çözüm

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{aligned} \right\} +\infty = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

olduğundan $x=0$ 'da sürekli değildir (sonsuz sürekli değildir).

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = |x+2|$

$x=-2$ noktasında sürekli midir?

Çözüm

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases} \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} x+2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} -x-2 = 0 \end{aligned} \right\} =$$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(-2) = f(-2)$ olduğundan fonksiyon sürekli dir.

5. $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x, & x \geq c \text{ ise} \\ ax^2 + b, & x < c \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için b ve c verildiğinde $x=c$ noktasında sürekli yapan a değerleri nedir?

Gözüm

$$\lim_{x \rightarrow c^+} 2\cos x = 2\cos c$$

$$2\cos c = ac^2 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} ax^2 + b = ac^2 + b$$

$$\frac{2\cos c - b}{c^2} = a$$

6. $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ c-2x, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

şekliyle tanımlanan

$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olması için $c = ?$

Gözüm

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} c - 2x = c - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$$

$$c - 2 = 2$$

$$c = 4$$

7. f ve ρ $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve $x \in A$ noktasında türetilen fonksiyon ise $f \cdot \rho$ 'de $x \in A$ noktasında türetilir. bilirdir ve

$$(f \cdot \rho)'(x) = f'(x) \cdot \rho(x) + f(x) \cdot \rho'(x) \text{ olduğunu gösteriniz}$$

Gösterim

$$(f \cdot \rho)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot \rho)(x+h) - (f \cdot \rho)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot \rho(x+h) - f(x) \cdot \rho(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(x+h) \cdot \rho(x+h) - f(x) \cdot \rho(x+h)}^{h \cdot \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)]} + \overbrace{f(x) \cdot \rho(x+h) - f(x) \cdot \rho(x)}^{f(x) \cdot [\rho(x+h) - \rho(x)]}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \rho(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(x+h) - \rho(x)}{h}$$

$$= f'(x) \cdot \rho(x) + f(x) \cdot \rho'(x)$$

Özel Durum

$$f(x) = c \in \mathbb{R} \text{ dursa } (c \cdot \rho)'(x) = 0 \cdot \rho(x) + c \cdot \rho'(x) = c \cdot \rho'(x)$$

8. f ve ρ , $A \subset \mathbb{R}$

$x \in A$ ve $\rho(x) \neq 0$ ise

$\left(\frac{f}{\rho}\right)$ 'de $x \in A$ noktasında türetilir ve

$$\left(\frac{f}{\rho}\right)'(x) = \left(\frac{f' \cdot \rho - (f \cdot \rho)'}{\rho^2} \right)(x)$$

olduğunu gösteriniz.

Gözümler

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) [g(x) - g(x+h)]}{g(x+h) \cdot g(x)} + \frac{f(x) [g(x) - g(x+h)]}{g(x+h) \cdot g(x)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (-f(x)) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= \frac{1}{g^2(x)} \cdot f'(x) \cdot g(x) - \frac{1}{g^2(x)} \cdot f(x) \cdot g'(x) \\
 &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}
 \end{aligned}$$

9. $[(x^3+x+1)(x^7-5)]' = ?$

Gözümler

$$f'(x) = (3x^2+1)(x^7-5) + (x^3+x+1)(7x^6)$$

10. $f(x) = \frac{3x^2}{x^3-5}$ $f'(x) = ?$

Gözümler

$$f'(x) = \frac{6x(x^3-5) - 3x^2(3x^2)}{(x^3-5)^2}$$

11. $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

$x \rightarrow f(x) = \sin x$ türevini türev tanımını kullanarak bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = (\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{(\cos h + 1)}{(\cos h + 1)} + \cos x$$

$$= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h} + \cos x$$

$$= -\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{\left(\frac{h}{\cos h + 1}\right) h (\cos h + 1)}$$

$$= -\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos h + 1} + \cos x = \cos x$$

12. $f(x) = \cos x$ $f'(x) = ?$

Çözüm

$$f'(x) = (\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x$$

$$= -\sin x$$

13. $f(x) = \tan x$ $f'(x) = ?$

Gözümlü

$$f'(x) = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)'$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

14. $f(x) = x^2 + 3x + 2$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Teğet ve Normal denklemleri bulunuz.

Gözümlü

$$f'(0) = m_{\text{teğ}} = 2x + 3 = 0$$

$$f(0) = n = x^2 + 3x + 2 = 2$$

$$\text{Teğet} = \frac{3}{2}x + 2$$

$$\text{Normal} = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$m_{\text{teğ}} \cdot m_{\text{nor}} = -1$$

$$m_{\text{nor}} = -\frac{2}{3}$$

Türev Kuralları

Kural 1 (Bir Sabitin Türevi)

Örnek

c bir sabitse, $\frac{dc}{dx} = 0$ olur.

$$\frac{d(18)}{dx} = 0$$

Kural 1'in İspatı

Türevin tanımını sonuçları hep sabit c değeri olan $f(x) = c$ fonksiyonuna uygularız. Her x değerinde;

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Kural 2 (Pozitif Tam Sayılar İsm Kuvvet)

n pozitif bir tam sayıysa

$$\frac{dx^n}{dx} = n x^{n-1} \text{ olur}$$

Kural 2'nin İspatı

$f(x) = x^n$ ise, $f(x+h) = (x+h)^n$ olur. n pozitif bir tam sayı olduğu için;

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

esitliğini kullanarak f 'nin farklar oranını sadeleştirilebiliriz. $x+h=0$ ve $x=b$ alarak, $a-b=h$ elde ederiz. Böylece

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \frac{(h)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \left\{ \begin{array}{l} \text{her birinin } h \rightarrow 0 \text{ iken} \\ \text{limiti } x^{n-1} \text{ olan} \\ n \text{ terim} \end{array} \right.$$

Buluruz. Doğruysa;

$$\frac{dx^n}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n x^{n-1} \text{ çıkar}$$

Örnek

$$f(x) = x^4 = 4x^3$$

Kural 3 (Sabitte Çarpım Kuralı)

u x 'in türelenabilir bir fonksiyonu ve c bir sabit ise;

$$\frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx}$$

Örnek

$$\frac{d(8x^2)}{dx} = 16x$$

Kural 4 (Toplam Kuralı)

u ve v x 'in türelenabilir fonksiyonlarıysa, toplamı u ve v her ikisinin de türelenebildiği her noktada türelenir. Böyle her noktada

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{olarak hesaplanır}$$

Kural 4'ün İspatı

Türev tanımını $f(x) = u(x) + v(x)$ 'e uygulayalım.

$$\begin{aligned} \frac{d[u(x) + v(x)]}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

Örnek

$$y = x^4 + 12x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 12$$

Kural 5 (Çarpım Kuralı)

u ve v x 'te türelenabilirse, çarpımları uv 'de türelenebilir ve :

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} \text{ olur.}$$

Kural 5'in ispatı

$$\frac{d(uv)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

Bu kesri u ve v 'nin türelerinin farklar oranını içeren bir hale dönüştürmek için kesrin ist tarafına $u(x+h)v(x)$ ekler ve sıfıra çıkarır.

$$\frac{d(uv)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

h sıfıra yaklaştıkça $u(x+h)$ $u(x)$ 'e yaklaşıyor, çünkü u , x 'te türelenilebilirliği için, x 'te sürekli'dir. İki kesir de dv/dx ve du/dx 'in x 'teki değerlerine yaklaşıyor kısacası.

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

Örnek

$$f(x) = (x^2+1)(x^3+3) \quad f'(x) = ?$$

$$f'(x) = 2x(x^3+3) + (x^2+1)3x^2$$

$$= 2x^4 + 6x + 3x^4 + x^2$$

$$= 5x^4 + x^2 + 6x$$

Kural 6 (Bölüm Kuralı)

u ve v x 'te türetilen ve $v(x) \neq 0$ ise, u/v bölümü x 'te türetilen ve sonucu

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \text{ olur}$$

Kural 6'nın ispatı

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{h v(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

Son kesri u ve v 'nin türevlerinin farkı oranını içeren bir kesre çevirmek için, kesrin üst tarafına $v(x)u(x)$ ekler ve aşağıya. Böylece;

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{h v(x+h)v(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

Böylece Bölünen ve bölenin limitini alarak, bölüm kuralını elde ederiz.

Örnek

$$y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad y' = ?$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2t(t^2 + 1) - (t^2 - 1)(2t)}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4t^2}{(t^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

İkinci ve Daha Yüksek Mertebe Türevler

$y' = \frac{dy}{dx}$ türevi y 'nin x 'e göre birinci (birinci mertebe) türevidir. Bu türevin kendisi de x 'in türemlenebilir bir fonksiyonu olabilir; bu durumda

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Herhangi bir pozitif n sayısı için:

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)}$$

y 'nin x 'e göre n .inci (n .inci mertebe) türevi bu şekilde de-ran eder.

Örnek

$y = x^3 - 3x^2 + 2$ 'nin ilk dört türevi

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y''' = 6$$

$$y^{(4)} = 0$$

Kural 7 (Sinüsün Türevi)

$$\frac{d}{dx} \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right)$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

Örnek

$$y = x^2 - \sin x \quad y' = ?$$

$$y' = 2x - \cos x$$

Kural 8 (Kosünüsün Türevi)

$$\begin{aligned} \frac{d(\cos x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

buluruz. Kısacası, kosünüsün türevi sinüsün negatifidir.

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

Örnek

$$y = 5x + \cos x \quad y' = ?$$

$$y' = 5 - \sin x$$

Kural 9 (Tangent, cotangent, secant, cosecant)

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x = (1 + \tan^2 x) \quad \frac{d(\sec x)}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{d(\cot x)}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x = -(1 + \cot^2 x) \quad \frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

Not!!! θ nasıl tanımlanırsa tanımlansın $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ denklemi geçerlidir;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \theta = x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1, \theta = 7x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{2}{3}x)}{(\frac{2}{3})x} = 1, \theta = \frac{2}{3}x$$

$x \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0 \quad \quad \quad x \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0 \quad \quad \quad x \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0$

Örnek $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

Kural 10 (Zincir Kuralı)

$f(u) \cdot u = p(x)$ noktasında türemlenebiliyorsa ve $p(x)$ 'de x 'te türemlenebiliyorsa, $(f \circ p)(x)$ bileşke fonksiyonu da x 'de türemlenebilir ve bu türev;

$$(f \circ p)'(x) = f'(p(x)) \cdot p'(x)$$

olur. Leibniz gösterimiyle $y = f(u)$ ve $u = p(x)$ ise, bu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

olarak yazılır Burada $\frac{dy}{du}$ $u = p(x)$ 'te hesaplanmaktadır.

Örnek

$y = \sqrt{x^2 + 1}$ fonksiyonunun türevini bulun.

$f(u) = \sqrt{u}$ ve $\varphi(x) = x^2 + 1$ olmak üzere $y = f(\varphi(x))$ tir. f ve φ nin türevleri;

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{ve} \quad \varphi'(x) = 2x$$

olduğu için, zincir kuralı;

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(f(\varphi(x)))}{dx} = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)}} \cdot \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Kural 11 (Kapalı Fonksiyonun Türevi)

$$F'(x, y) = - \frac{F'(x)}{F'(y)}$$

Örnek

$$F(x, y) = x^2 + 5xy - y^2 \quad F'(x, y) = ?$$

$$F'(x, y) = \frac{-(2x + 5y)}{5x - 2y}$$

UYGULAMALAR

1. $y = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y' = ?$

Çözüm

$$y = f(x) = \arctan(u(x))$$

$$y' = f'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$y' = \frac{1}{x^2+1}$$

2. $y = \operatorname{arccot}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \quad y' = ?$

Çözüm

$$y = f(x) = \operatorname{arccot}(u(x))$$

$$y' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

$$y' = -\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2}}{1 + \frac{1+x}{1-x}}$$

$$= \frac{\frac{1(1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{(1+x)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}}}{\frac{2}{1-x}}$$

$$= \frac{\frac{2}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2}}{\frac{2}{1-x}}$$

3. $y = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x \Rightarrow y' = ?$

Gözetim

$$y' = \tan^2 x (1 + \tan^2 x) - (1 + \tan^2 x) + 1$$

$$y' = \tan^4 x$$

4. $y = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \Rightarrow y' = ?$

Gözetim

$$y' = \frac{\frac{1\sqrt{1+x^2} - x \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{\frac{1+x^2 - x^2}{(1+x^2)^{3/2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{1}{1+x^2}$$

5. $y = \frac{1}{15} \cos^3 x (3 \cos^2 x - 5) \Rightarrow y' = ?$

Gözetim

$$y' = \frac{1}{15} (3 \cos^2 x - \sin x \cdot 3 \cos^2 x - 5) + \cos^3 x (6 \cos x) (-\sin x)$$

$$= \cos 2x \cdot \sin^3 x$$

6. $y = \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x + \cos x} \Rightarrow y' = ?$

Gözetim

$$y' = \frac{[-1(-\cos x) + x(-\sin x) - \cos x](x \sin x + \cos x) - (x \cos x - \sin x)[1 + \sin x + x \cos x - \sin x]}{(x \sin x + \cos x)^2}$$

7. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ ise $y' = ?$

Gözetim

$$y = f(x) = \ln u(x)$$

$$y' = f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$y' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}}{x + \sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

8. a, b. ℝ olmak üzere

$$y = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x\right) \Rightarrow y' = ?$$

Görüm

$$y' = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{a}}}{\sqrt{1 - \frac{b}{a}x^2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-bx^2}}$$

9. $y = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \ln(\tan x) \Rightarrow y' = ?$

Görüm

$$y' = -\frac{1}{2}(-2)\sin^{-3}x \cdot \cos x + \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}$$
$$= \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\tan x} + \tan x$$

10. $y = \ln(e^{-x} + x \cdot e^{-x}) \Rightarrow y' = ?$

Görüm

$$y' = \frac{-e^{-x} + 1e^{-x} + x e^{-x}(-1)}{e^{-x} + x e^{-x}} = -\frac{x}{1+x}$$

11. $y = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y' = ?$

Görüm

$$y' = 1 \cdot \arccos x + x \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

12. a ∈ ℝ olmak üzere:

$$y = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(x^2 + a^2) \Rightarrow y' = ?$$

Görüm

$$y' = 1 \arctan \frac{x}{a} + x \cdot \frac{\frac{1}{a}}{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{a}{2} \frac{2x}{x^2 + a^2}$$
$$= \arctan \frac{x}{a}$$

13. $y = \arcsin \sqrt{1-x^2} + \arctan\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

Çözüm

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{(-\sin x)((1+\sin x) - \cos x \cos x)}{(1+\sin x)^2 + \left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)^2}$$

14. $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonun $x=0$ 'da türelenebilirliğini araştırın.

Çözüm

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} -1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

$\Rightarrow$ limit yoktur

fonksiyonu $x=0$ 'da türevli değildir.

15. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyon $x=0$ 'da türevli midir?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} = 0$$

16. Verilen herhangi bir $y=f(x)$ fonksiyonu için $f(x)$ fonksiyonu tek ise $f(x)$ aiftir. olduğunu gösteriniz.

Gösterim

$$\begin{aligned} \text{Eğer } -f(x) &= f(-x) \quad \text{ise } f \text{ tek} \\ f(x) &= f(-x) \quad \text{ise } f \text{ aiftir.} \end{aligned}$$

$$\frac{d(-f(x))}{dx} = \frac{d(f(-x))}{dx}$$

$$-f'(x) = -1 f'(-x)$$

$$f'(x) = f'(-x)$$

17. $f(x)$ fonksiyonu aiftir ise $f'(x)$ tektir olduğunu gösteriniz.

Gösterim

$$f(x) = f(-x)$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d [f(-x)]}{dx}$$

$$f'(x) = -1 f'(-x) \quad \text{olduğundan } f'(x) \text{ tektir.}$$

18. $y=y(x)$ olmak üzere

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y' = ?$$

Gösterim

1. yol

$$F(x,y) = 0$$

$$\frac{d F(x,y)}{dx} = - \frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$F_x(x,y) = \frac{2x}{a^2} \quad F_y(x,y) = \frac{-2y}{b^2}$$

$$\frac{d F(x,y)}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

2. yol

$$\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial z} \cdot y' = 0$$

19. $y=y(x)$ olmak üzere

$$\arctan y = x + y \Rightarrow y' = ?$$

Çözüm

$$y' = -\frac{1+y^2}{y^2} \Rightarrow y'' = \frac{-2y \cdot y' - y^2 - (1+y^2) 2y y'}{y^4}$$

$$y'' = \frac{2y'}{y^3}$$

$$= \frac{2}{y^3} \left(-\frac{1+y^2}{y^2} \right) = -\frac{2}{y^5} (1+y^2)$$

20. $x^2 + xy + y^2 = 7$ şeklinde kapalı olarak $y=f(x)$ fonksiyonu $(x,y)=(1,2)$ civarlarındaki denklemini bulunuz.

Çözüm

meristem

$$m_T = F'(x_1, y)$$

$$F'(x, y) = \frac{-2x+y}{x+2y}$$

$$y-2 = -\frac{4}{5}(x-1)$$

$$F'(1,2) = -\frac{4}{5}$$

21. $f(x) = x^{\tan x} \Rightarrow f'(x) = ?$

$$\ln f(x) = \ln x^{\tan x}$$

$$\ln f(x) = \tan x \cdot \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (1 + \tan x) \ln x + \tan x \cdot \frac{1}{x}$$

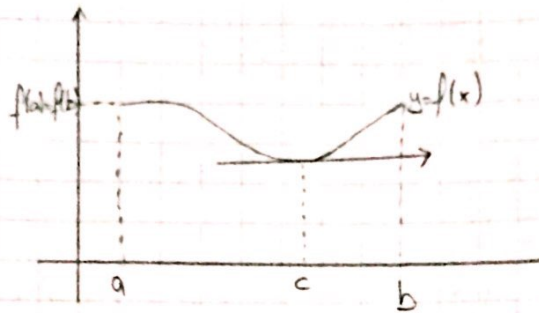
$$f'(x) = x^{\tan x} \left[(1 + \tan x) \ln x + \tan x \cdot \frac{1}{x} \right]$$

Teorem (Rolle Teoremi)

$f, [a, b]$ kapalı aralıyında sürekli ve (a, b) açık aralıyında türelenabilir fonksiyon olsun.

Eğer $f(a) = f(b)$ ise

$f'(c) = 0$ olacak şekilde $\exists c \in (a, b)$ noktası vardır.



Örnek

$f(x) = x^2 - 2x + 3$, $[0, 2]$ aralıyında Rolle teoremini uygulayalım.

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ polinom fonksiyonu $[0, 2]$ aralıyında sürekli'dir.

2. $f'(x) = 2x - 2$ türev fonksiyonu var olduğundan $(0, 2)$ açık aralıyında türelenebilir.

3. $f(0) = 3$, $f(2) = 3$ olduğundan Rolle teoremi uygulanabilir.

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 2c - 2 = 0$$

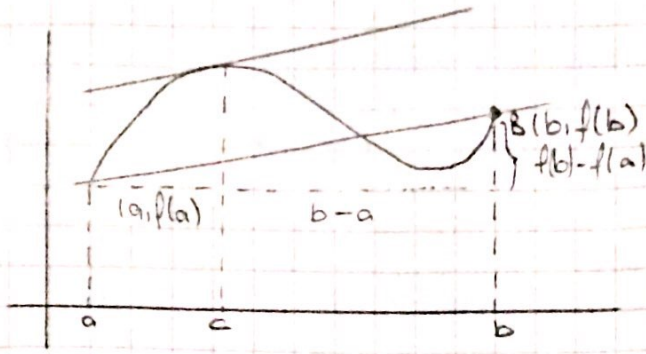
$$c = 1 \in (0, 2)$$

Teorem (Ortalama Değer Teoremi)

f fonksiyonu $[a, b]$ aralıyında sürekli (a, b) aralıyında türelenebilir olsun.

Bu durumda:

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olacak şekilde $\exists c \in (a, b)$ noktası vardır.



Örnek

$0 \leq a < b$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında verilen $f(x) = \sqrt{x}$ için ortalama değer teoremini uygulayınız.

1. $f(x) = \sqrt{x}$ $[a, b]$ aralığında sürekli ve
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ olduğundan $f(x)$ (a, b) aralığında türelenelidir.

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olacak şekilde $c \in (a, b)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{c} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ bulunur.}$$

$$\Rightarrow c = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2 \text{ olmak üzere}$$

$a < b$ olduğundan

$$\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a}}{2} \right)^2 < \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2 < \left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{b}}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow a < c < b \text{ bulunur}$$

Örnek

Her $x > 0$ için $\sin x < x$ olduğunu gösteriniz

$x > 0$

1. $x > 2\pi$

$$\sin x \leq 1 < 2\pi < x$$

2. $0 < x < 2\pi$ için ortalama değer teoremini uygulayarak

tanı;

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $[x, 2\pi]$ aralığında sürekli ve $f'(x) = \cos x$ olduğundan $f'(x)$ $(x, 2\pi)$ aralığında türelenebilir.

Ayrıca $f(x) = \sin x$ fonksiyonu $[0, x]$ aralığında sürekli ve $(0, x)$ aralığında türelenebilir.

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = f'(c) \\ &= (\sin x)'|_{x=c} \\ &= \cos c < 1\end{aligned}$$

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \quad \sin x < x$$

Artan - Azalan Fonksiyon

f fonksiyonu bir I aralığında tanımlı olsun

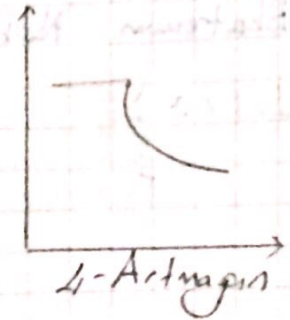
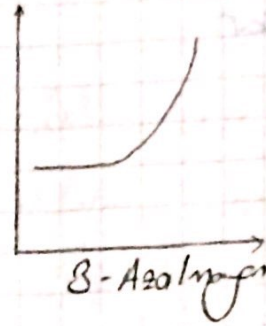
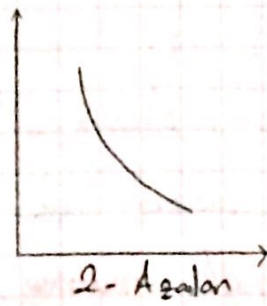
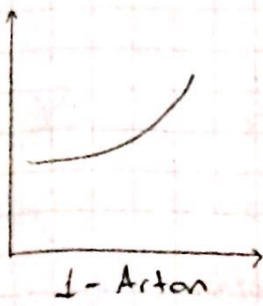
$\forall x_1, x_2 \in I$ için

1. $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonuna **artan fonksiyon** denir.

2. $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonuna **azalan fonksiyon** denir.

3. $x_2 < x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonuna **azalmayan fonksiyon** denir.

4. $x_2 < x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonuna **artmayan fonksiyon** denir.



Not!!!

f fonksiyonu artan veya azalan ise birebirdir.
artan fonksiyon için azalmayan, azalan fonksiyon için artma-
yan fonksiyon denebilir.

Örnek

$$f(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right), (x \neq 0)$$

$x_1 \neq 0 \quad x_2 \neq 0$

$$f(x_1) = \left(\frac{x_1^2 - 1}{x_1} \right) \quad f(x_2) = \left(\frac{x_2^2 - 1}{x_2} \right)$$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \left(1 + \frac{1}{x_1 + x_2} \right) (x_1 - x_2)$$

Teorem

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli (a, b) aralığında türevlenebilir olsun

1. $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında artandır.

2. $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında azalandır.

Örnek $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ hangi aralıkta azalandır.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad 1 \quad -1$

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$(x^2 - 1)$	+	0	-	0	+

Ekstremum Noktalar

1. $\forall x \in D_f$ için
tanım kümesi

$f(x) \leq f(x_0)$ olacak şekilde $x_0 \in D_f$ noktası varsa x_0 noktasına fonksiyonun **mutlak maksimum noktası** denir.

2. $\forall x \in D_f$ için

$f(x) \geq f(x_0)$ olacak şekilde $x_0 \in D_f$ noktası varsa x_0 noktasına fonksiyonun **mutlak minimum noktası** denir. !!! rali

Genel olarak bu noktalara **ekstremum noktalar** ve $f(x_0)$ değerine de **ekstremum değerler** denir.

Not!!! Eğer 1 ve 2 özellikleri fonksiyonun tanım kümesi içinde tabiri x_0 noktasının bir komşuluğundaki her eleman için sağlanıyorsa bu x_0 noktasına **yerel maksimum, yerel minimum** denir.

Teorem (1. Türev Testi)

$x \in D_f$ için $f'(x) = 0$ ise x noktasına **kritik nokta** ve $f'(x) = \text{tanımsız}$ ise x noktasına **şeyteler nokta** denir.

f fonksiyonu I aralığında tanımlı ve I 'daki bir x_0 noktasında yerel-mutlak ekstremuma sahipse x_0 noktası

1. Kritik nokta

2. Şeyteler nokta

3. I 'nın dışı noktası olabilir.

I. Kısım (Şeyteler, Kritik, ve noktalar testi)

f 'nin x_0 'da sürekli ve x_0 'in fonksiyonun tanım kümesinin bir elemanı olması kabul edilir

1. (a, x_0) üzerinde $f'(x) > 0$ olacak şekilde x_0 'i içeren bir açık (a, b) aralığı var ve (x_0, b) üzerinde $f'(x) < 0$ ise f , x_0 noktasında bir yerel maksimum değere sahiptir.

2. (a, x_0) üzerinde $f'(x) < 0$ olacak şekilde x_0 'i içeren (a, b) açık aralığı var ve (x_0, b) üzerinde $f'(x) > 0$ ise x_0 'da f fonksiyonu bir yerel minimum değere sahiptir.

II. Kısım (Tanım Kümesinin Uç Noktaları Testi)

a 'nın f 'nin tanım kümesinin sol uç noktası ve f , a noktasında sağdan sürekli olsun;

3. (a, b) aralığında $f'(x) > 0$ ise f a 'da bir yerel minimum değere sahiptir.

4. (a, b) aralığında $f'(x) < 0$ ise f a 'da bir yerel maksimum değere sahiptir.

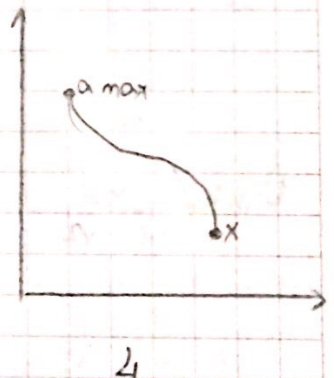
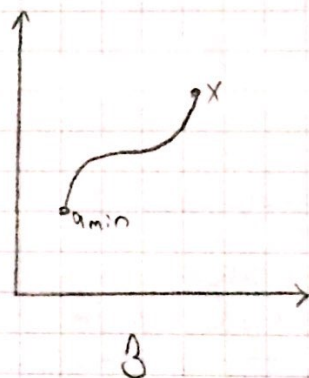
b f 'nin Tanım Kümesinin bir sağ uç noktası ve f b 'de soldan sürekli olsun

5. (a, b) aralığında $f'(x) > 0$ ise f b 'de yerel maksimum değere sahiptir.

6. (a, b) aralığında $f'(x) < 0$ ise f b 'de yerel minimum değere sahiptir.

	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
		↗	↘
		1	

	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
		↘	↗
		2	



Örnek

$[-2, 2]$ aralığında

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$$

max, min noktalarını bulunuz.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

signalar ($f'(x) = 0$) noktaya yok

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

$$x = 0, x = 1, x = -1$$

	-2	-1	0	1	2	
x	-	-	0	+	+	
x^2-1	+	0	-	-	0	+
$f'(x)$	-	-	+	-	+	
$f(x)$	5 max	-4 min	-3 max	-4 min	5 max	

Örnek

$$y = x^3$$

ekstremin

noktaları varsa bulunuz.

$$y' = 3x^2$$

$$x = 0$$

x	0		
y'	+	0	+
y			

$x = 0$ ekstremin değil

Örnek

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$y' = -\frac{2}{x^3}$$

$$x = 0$$

singular
nokta

	0
f'	+ 0 -
f	↗ ↘

Örnek

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x) = x^{2/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

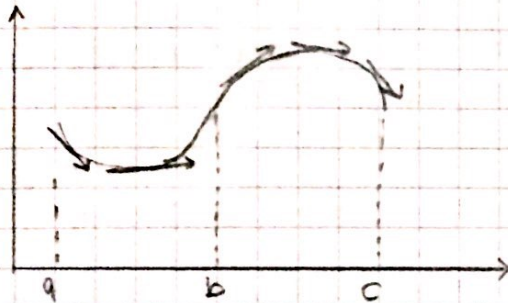
$$\Rightarrow x=0 \text{ singular noktası} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

		0	
f'	-		+
f	$\nearrow$		$\searrow$

Konveks ve Konkav ve Büküm Noktası

Bir f fonksiyonu I aralığında türevlenebilir olsun f' türev fonksiyonu bu I aralığında artan ise $f(x)$ fonksiyonu I açık aralığında yukarı büküldür (yukarı konkav)

Eğer f' türev fonksiyonu I aralığında azalan ise $f(x)$ fonksiyonu I açık aralığında aşağı büküldür.



(a,b) aralığında konveks (dış büküm - yukarı büküm)
 (b,c) aralığında konkav (iç büküm - aşağı büküm)

f' (a,b) aralığında yukarı büküm ise fonksiyonun bütün tepe-leri eğrinin altındadır. aşağı büküm ise fonksiyonun tepe-leri eğrinin üstündedir. Yukarıdan, aşağıya; aşağıdan yukarıya geçişi ve fonksiyonların sürekli olduğu noktaya **büküm noktası** veya **devrim noktası** denir.

Teorem

1. I aralığında $f'(x) > 0$ ise f , I 'da yubarı bükley
2. I aralığında $f'(x) < 0$ ise f , I 'da arıy bükley
3. f , x_0 noktasında bir büküm noktası ve $f'(x_0)$ var ise $f''(x_0) = 0$

Örnek

$$f(x) = x^5 - 10x^4$$

$$f'(x) = 5x^4 - 40x^3$$

$$f''(x) = 20x^3 - 120x^2 = 20x^2(x^2 - 6)$$

	-2	0	2		
f''	+	0	-	0	+
f	U	∩	∩	U	
	Dönüm noktası (Büküm noktası)			Dönüm noktası (Büküm noktası)	

Teorem (2. türev testi)

1. $f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) < 0$ ise x_0 noktası f 'nin yerel max. noktasıdır.
2. $f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) > 0$ ise x_0 noktası f 'nin yerel min. noktasıdır.
3. $f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) = 0$ ise f , x_0 'da yerel max ve yerel min veya büküm noktasına sahip değildir.

Örnek

$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıf birliğini.

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + (1 - e^{-x})x^2 = \frac{e^{-x}}{+0} (-x^2 + 2x)$$

$$f''(x) = e^{-x}(-x^2 + 2x) + (-2x + 2)e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 2x - 2x + 2)$$

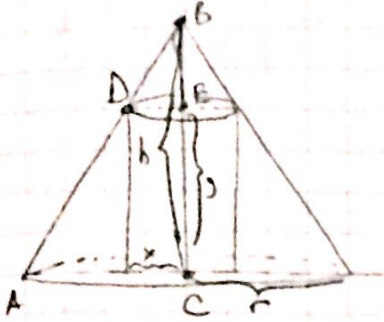
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2 = 0 \\ x(-x + 2) = 0 \\ x = 0, x = 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \text{ elde edilir}$$

$$\left. \begin{aligned} f''(0) &= 2 > 0 \\ f''(2) &= e^{-2}(-2) < 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x=0 &\text{ yerel max} \\ x=2 &\text{ kritik noktaların yerel max noktaları} \end{aligned}$$

Örnek

Bir dik koni aynı yerleştirilmiş max hacimli silindrin yüksekliğini bulunuz.



$$\triangle BDE \approx \triangle BAC$$

$$\frac{|BD|}{|BA|} = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|AC|}$$

Silindrin boyu:

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{r-x} \quad x = r \frac{(h-y)}{h}$$

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2} (h^2 y - 2hy^2 + y^3) = f(y)$$

$$V' = \frac{dV}{dy} = \frac{\pi r^2}{h^2} (h^2 - 4hy + 3y^2) = 0 \quad y_1 = h \quad y_2 = h/3 \text{ bulunur}$$

$$V'' = \frac{\pi r^2}{h^2} (-4h + 6y) \text{ olmak üzere } y = h/3 \text{ olmak}$$

$$V''(h) = \frac{\pi r^2}{h^2} = 2h = \frac{2\pi r^2}{h} > 0$$

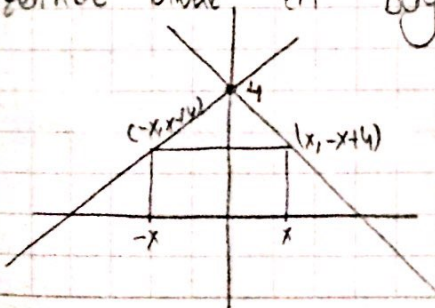
$$V''(h/3) = \frac{\pi r^2}{h^2} (-4h + 2h)$$

$$y = h/3 \text{ olmalı}$$

$$= -2\pi r^2 < 0$$

Örnek

$y = x + 4$, $y = -x + 4$ doğruları ve x eksenini arasındaki kapalı alanda çizilebilen 2 köşeli x ekseninde diğer iki köşeli doğrularla oluşan en büyük hacimli dikdörtgenin diğer köşeleri



$$\text{Alan} = 2x(1-x+4)$$

$$f(x) = -2x + 8x$$

$$f'(x) = -4x + 8 = 0$$

$$f'(x) = -4$$

$$f''(2) = -4 < 0$$

$$x = 2$$

Örnek



Genesi 36 cm dan dikabartan de.
kibeki karton kenarlarından birinin
etrafında döndürölüyor. meydana gelen
dairesel silindirin hacmi kactir

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi x^2 (18 - x)$$

$$V = \pi (18x^2 - x^3)$$

$$V' = \pi (36x - 3x^2)$$

$$x = 0, 12 \text{ Kritik Nokta}$$

$$V'' = \pi (36 - 6x)$$

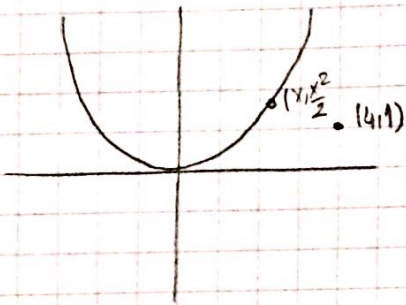
$$V''(0) = 36\pi > 0 \text{ minimum}$$

$$V''(12) = -36\pi < 0 \text{ maksimum}$$

$$V_{\max} = \pi (144) \cdot 6$$

Örnek

$y = x^2/2$ fonksiyonunun $(4, 1)$ noktasına en yakın nokta.
sınırı apsis kactir



$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$$

$$d^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + \left(\frac{x^2-2}{2}\right)^2$$

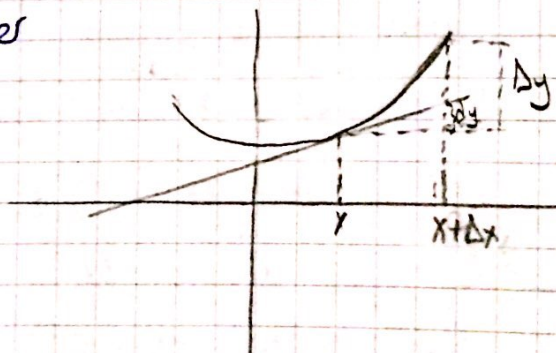
$$d^2 = 2(x-4) + 2 \cdot 2x \left(\frac{x^2-2}{2}\right)$$

$$x = 4 \quad x = 0, \quad x = \sqrt{2} \quad x = -\sqrt{2}$$

Yaklaşık Değer

$\Delta y;$

$dy;$



$$\Delta y \approx dy$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

UYGULAMALAR

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun n . mertebesindeki türevi $(f^{(n)}(x) = ?)$ bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = x^{-1}$$

$$f'(x) = -1x^{-2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 x^{-5}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$$

2. $f(x) = \sin x$ için $f^{(n)}(x) = ?$

Çözüm

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + \pi\right)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin\left(x + 2\pi\right)$$

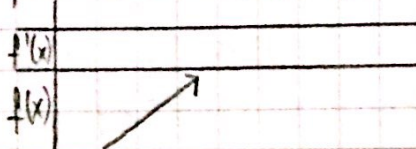
$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

3. $f(x) = x^3 + 3x$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0$$

$(-\infty, \infty)$ aralığında artan bir fonksiyon

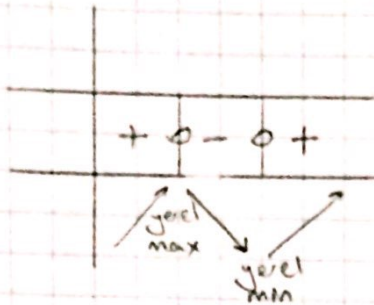


4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - 27x + 1$ artan ve azalan olduğu aralıklarını bulunuz.

Çözüm

$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 9) = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm 3 \text{ (kritik noktalar)}$$



$$x = -3 \text{ fonksiyon yerel max} \Rightarrow f(-3) = 55$$

$$x = 3 \text{ fonksiyon yerel min} \Rightarrow f(3) = -53$$

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$ yerel max. ve yerel min noktalarını bulunuz.

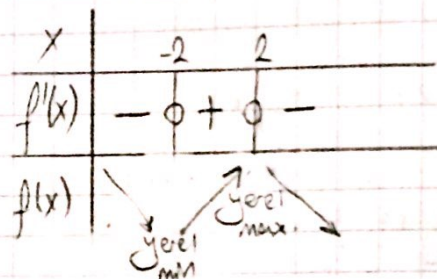
Çözüm

$$f'(x) = \frac{(4+x^2) - x(2x)}{(4+x^2)^2}$$

$$= \frac{4-x^2}{(4+x^2)^2} = 0$$

$$4-x^2 = 0$$

$$x = \pm 2 \text{ kritik noktalar}$$



$$f(-2) = \frac{-2}{4+4} = -\frac{1}{4} \text{ (yerel min değeri)}$$

$$f(2) = \frac{2}{4+4} = \frac{1}{4} \text{ (yerel max değeri)}$$

6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x = f(x) = x \cdot e^{-x}$ fonksiyonun yerel max ve yerel min değerleri bulunuz.

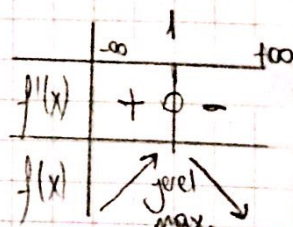
Çözüm

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = 0$$

$$= e^x(1-x) = 0$$

$$= (1-x) = 0$$

$$x = 1$$



$$x = 1 \text{ yerel max}$$

$$f(1) = \frac{1}{e} \text{ (yerel max değeri)}$$

7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = 8x^5 - 20x^3$$

Çözüm

$$f'(x) = 40x^4 - 60x^2 = 0$$

$$= 10x^2(x^2 - 6) = 0$$

$$= 10x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

veya

$$x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm \sqrt{6}$$

	$-\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		yerel max	yerel min

8. $f: [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = 2^x$$

Çözüm

$$f(x) = \frac{2^x}{1} \quad \frac{1}{0} > 0 \text{ artan}$$

$$f(-1) = 2^{-1} = 1/2$$

$$f(5) = 2^5 = 32 \text{ (mutlak maksimum değer)}$$

9. $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = 2^x$$

Çözüm

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 25) - (x^2 + 100)(2x)}{(x^2 - 25)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 50x - 2x^3}{(x^2 - 25)^2}$$

$$= \frac{-250x}{(x^2 - 25)^2} = 0 \Rightarrow -250x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	
$f'(x)$	+
$f(x)$	yerel max

$$f(0) = -24 \text{ mutlak max değer}$$

$$f(-1) = -\frac{101}{24}$$

$$f(3) = -\frac{109}{24} \text{ mutlak min}$$

10. Toplamları 1000 ve kareleri toplamı mümkün olduğunca küçük olan iki sayı bulunsun.

Gözüm

$$x+y=1000$$

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

$$F(x)=x^2+(1000-x)^2$$

$$F'(x)=2x-2(1000-x)$$

$$=2x-2000+2x$$

$$=4x-2000=0$$

$$x=500$$

$$y=500$$

11. Toplamları 40 olan 2 pozitif tam sayının kareleri toplamı en fazla kaç olur?

Gözüm

$$x+y=40$$

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

$$F(x)=x^2+(40-x)^2$$

$$F'(x)=(x-2)(40-x)$$

$$=4x-80$$

$$x=20$$

$$F(20)=20^2+20^2$$

$$=800$$

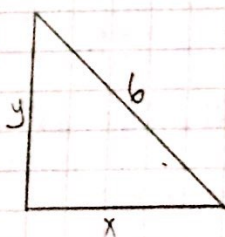
$$F(1)=1^2+39^2=1522$$

$$F(1)=39^2+1^2=1522$$

$$(1,39)$$

12. Hipotenüsün uzunluğu 6 birim olan bir dik üçgenin alanı en fazla kaç birim karedir?

Gözüm



$$A(x,y)=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}3\sqrt{2}3\sqrt{2}=9b^2$$

$$B(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$$

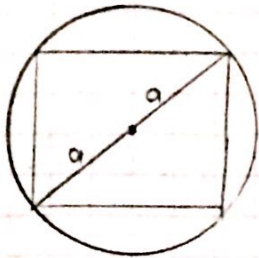
$$B'(x)=\frac{1}{2}\left(1\cdot\sqrt{36-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{36-x^2-x^2}{\sqrt{36-x^2}}\right)\Rightarrow 36-2x^2=0\Rightarrow x=3\sqrt{2}$$

x	3\sqrt{2}
f'(x)	+ 0 -
f(x)	↗ yerel max ↘

13. a yarıçaplı bir aemberin içine azelebilen dikdörtgenin en fazla ne olabilir?

Çözüm



$$A(x,y) = xy = 2a^2$$

$$S(x) = x \sqrt{4a^2 - x^2}$$

$$S'(x) = \sqrt{4a^2 - x^2} + x - \frac{2x}{2\sqrt{4a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{4a^2 - 2x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$$

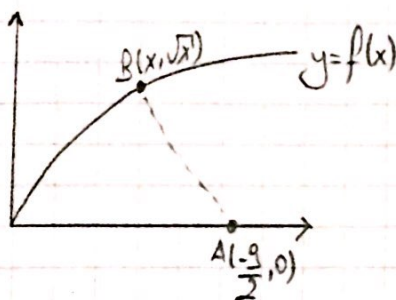
$$0 \Rightarrow 4a^2 = x^2$$

$$x = 2\sqrt{a^2}$$

$$y = 2\sqrt{a^2}$$

14. $y = \sqrt{x}$ eğrisinin $A = (\frac{a}{2}, 0)$ noktasına en yakın olan nokta. sırası bulunuz.

Çözüm



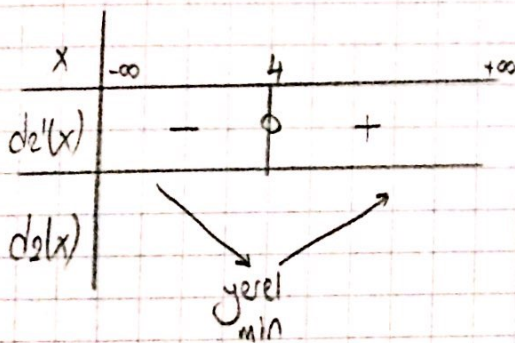
$$d_1 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x} - 0\right)^2}$$

$$d_2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + x$$

$$d_2'(x) = 2\left(x - \frac{a}{2}\right) + 1 = 0$$

$$2x - a = 0$$

$$x = \frac{a}{2}$$



Not!!!

$$1. y = \sinh x \quad y' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$2. y = \cosh x \quad y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$3. y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$4. y = \operatorname{arcsinh} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

$$5. y = \operatorname{arcosh} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$6. y = \operatorname{artanh} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1 - u^2}$$

$$7. y = \operatorname{arcoth} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1 - u^2}$$

15. $y = \sinh(2x-1) \Rightarrow y' = ?$
Çözüm
 $y' = 2 \cosh(2x-1)$

16. $y = \operatorname{arctanh}(\ln x)$

Çözüm

$$y' = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \ln^2 x} = \frac{1}{x(1 - \ln^2 x)}$$

17. $y = \sin(\sinh x) + \sinh(\sin x)$

$$y' = \cosh x \cos(\sinh x) + \cos x \cosh(\sin x)$$

18. $f(x) = x^5$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(32) = ?$
Çözüm

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$y_0 = 32 = x_0^5 \Rightarrow x_0 = 2$$

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f(x_0) = 80$$

$$(f^{-1}(32))' = \frac{1}{80}$$

19. $f(x) = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow (f^{-1})'(y)$

Gesam

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{2}{(1+y)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$y = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow y - yx + 1 + x$$
$$y - 1 = x(1+y)$$
$$x = \frac{y-1}{1+y}$$

Belirsizlikler

Tipi	Örnek
1. $\frac{0}{0}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
2. $\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1/x)}{\cot x^2}$
3. $0 \cdot \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $\infty - \infty$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\tan x - \frac{1}{\pi - 2x} \right)$
5. 0^0	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
6. ∞^0	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos x}$
7. 1^∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

LİMİTE BELİRSİZLİKLERİN KALDIRILMASI

A. $\frac{0}{0}$ Belirsizliği

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x + 2} = ? \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} x = -2$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2} \right) : x \right] = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2} \right) : x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-x}{2(2+x)} \cdot \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(2+x)} = \frac{1}{4}$$

3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - \sqrt{a^2 x}}{\sqrt{ax} - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - \sqrt{a^3})}{\sqrt{a}(\sqrt{x} - \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{(\sqrt{x^3} - \sqrt{a^3})(\sqrt{x^2} + \sqrt{ax} + \sqrt{a^2})}{(\sqrt{x^3} - \sqrt{a^3})} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{x + \sqrt{ax} + a}{1} = \frac{3a}{1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = ? \left(\frac{0}{0}\right)$$

$1+x = y^6$ diyelim

$x \rightarrow 0$ iken $y \rightarrow 1$ dir o halde $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1}$ olur

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y^2 - 2y + 1}{(y^3 - 1)^2} \quad (x = y^3 \text{ dönüşümü})$$

$$= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)^2}{(y-1)^2(y^2+y+1)^2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{(y^2+y+1)^2} = \frac{1}{9}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3} - 1}{\sqrt[4]{x^3} - 1} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3} - 1}{\sqrt[4]{x^3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y^4 - 1}{y^3 - 1} \quad (x = y^{12} \text{ dönüşümü})$$

$$= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y+1)(y^2+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} = \frac{4}{3}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 6 - (x^2 + 2x - 6)}{(x-3)(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6}}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4x + 12}{(x-3)(x-1)} = \frac{-4}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(x-1)}$$

$$= -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-1} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$$

B. $\frac{\infty}{\infty}$ Betragselpi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)}{b_m x^m \left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \dots + \frac{b_0}{b_m x^m}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 7x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{3x^2 \left(1 + \frac{7}{3x} - \frac{5}{3x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^{3/2}} = \infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+1} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + 1\right]}{3^x \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1\right]} = 3$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n!}{n} = 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \cdot \frac{\cos 5x}{\sin 5x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x}{\cos 3x}$$

$$= - \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos 2x + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin x} \right]$$

$$= - \left[-1 + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x}{\cos 2x - 2 \sin^2 x} \right] = - \left[-1 + \frac{2}{-1-2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \right]$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{500 + 2^x}{500 - 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \left(\frac{500}{2^x} + 1\right)}{2^x \left(\frac{500}{2^x} - 1\right)} = -1$$

C. $0 \cdot \infty$ Belirsizliği:

$A \cdot B = \frac{A}{\frac{1}{B}} = \frac{B}{\frac{1}{A}}$ eşitliklerinden faydalanarak belirsizlik önce $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ haline getirilir.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cot \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} (1-x)}{\tan \frac{\pi}{2} (1-x)} = \frac{2}{\pi}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \cot 2x \cot \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot(\frac{\pi}{2} - x)}{\tan 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \tan^2 x}{2} = \frac{1}{2}$$

D. $\infty - \infty$ Belirsizliği:

Önce Belirsizlik $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birine dönüştürülür.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+a-x}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + (1-x^3)}{x^2 - x^2 \sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)^2} \right)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4x + 3} + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-4 + \frac{3}{x} \right)}{\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1}$$

E. 1^{oo} Belirteci:

e sayısının hesabı

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \text{ tam}) \text{ zettinde tanımlar.}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = ?$$

$x = -y$ dönüşümüyle

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-y}\right)^{-y} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = e$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{p}}\right)^{\frac{x}{p}}\right]^p = e^p$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$$

($y = \frac{1}{x}$ dönüşümü) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{x+1} / \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{-1}\right] = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}$$

$$\frac{e^{-1}}{e} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x+2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x+2}} = \frac{e^{-1}}{e^3} = e^{-4}$$

L'HOPITAL'LE BELİRSİZLİKLERİN KALDIRILMASI

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 \cos 2x}{2e^x - 2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x + 2 \sin 2x}{2e^x - 2} = \frac{-2 \cos x + 4 \cos 2x}{2e^x} = \frac{6}{2} = 3$$

$$3. \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{2x - \pi}{\cos^2 x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\cos x (-\sin x)} = -\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x \quad (a \in \mathbb{R}^+)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-a}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-ax^{-a-1}} = -\frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{-a}} = -\frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$$

$$y = \sin x^{\tan x}$$

$$\ln y = \tan x \ln \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \ln(\sin x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\cot x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-(\operatorname{cosec}^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x (\operatorname{cosec}^2 x)} = 0$$

$$\ln y = 0 \quad y = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\tan x} = 1$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = ?$$

$$y = x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

$$\ln y = 0$$

$$y = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} x^x = 1$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{3}{x}\right)^x = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{3}{x}\right)^x$$

$$y = \left(1 + \sin \frac{3}{x}\right)^x$$

$$\ln y = x \ln \left(1 + \sin \frac{3}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \sin \frac{3}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \sin \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{3}{x^2} \cdot \cos \frac{3}{x}}{\left(1 + \sin \frac{3}{x}\right) \cdot -\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{3}{x}}{1 + \sin \left(\frac{3}{x}\right)} = 3$$

$$\ln y = 3 \quad y = e^3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{3}{x}\right)^x = e^3$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = ?$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

NOT!!! $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax} = e^a$

12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = ?$

$y = x^{\ln x}$

$\ln y = \ln x \ln x$

$\ln y = \ln^2 x$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = \infty$

$\ln y = \infty$

$y = e^\infty \quad y = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x = ?$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = ?$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0$

15. $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^x)^{\sin x} = ?$

$y = (1 - e^x)^{\sin x}$

$\ln y = \sin x \ln(1 - e^x)$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x \ln(1 - e^x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1 - e^x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{e^x}{1 - e^x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \sin^2 x}{(1 - e^x) \cos x}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \sin^2 x + 2e^x \sin x \cos x}{-e^x \cos x - (1 - e^x) \sin x}$

$\ln y = 0 \quad y = e^0 = 1$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\tan x}}$$

$$y = \cot x^{\frac{1}{\tan x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{\ln x} \ln \cot x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} \ln(\cot x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{\cos x \sin x}{\cot x}}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x}{\sin x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x}{\sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\cos^2 x (\sin^2 x)} = -1$$

$$\ln y = -1 \quad y = e^{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\tan x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

UYGULAMA

1. $y = f(x) = x^4 - 8x$ fonksiyonunun konveks ve konkav noktaları, sırtlıkları (2. türev testini uygulayarak) bulunur.

Cözüm

$$y' = 4x^3 - 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 2) = 0$$

$$4x = 0 \quad x^2 - 2 = 0$$
$$x = 0 \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$$y'' = 12x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

x		-2	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	2	
y'		-	0	-	0	-	+
y''		+	+	0	-	+	+
		KONVEKS		KONKAV		KONVEKS	

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right) \text{ KONVEKS}$$

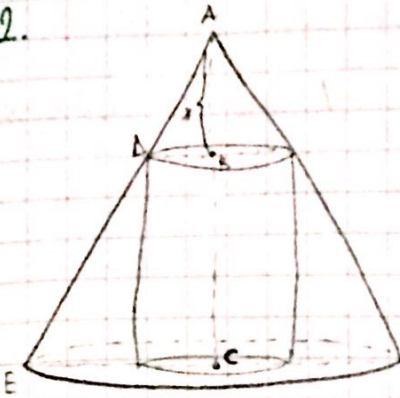
$$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \text{ KONKAV}$$

$$f''(0) = -8 < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ yerel max}$$

$$f''(-2) = 32 > 0 \Rightarrow x = -2 \text{ yerel min}$$

$$f''(2) = 32 > 0 \Rightarrow x = 2 \text{ yerel min}$$

2.



Şekilde görüldüğü gibi bir dik koniden düz
gün bir silindiri koninin tabanına yarıçapı
12cm ve yüksekliği 12cm sahip silindirin
hacmi maksimum olması için silindirin
yüksekliği ve taban yarıçapı kaç cm olur?

Çözüm

$$\triangle ABD \cong \triangle ACE$$

$$\frac{x}{12} = \frac{c}{2}$$

$$r = \frac{x}{6}$$

$$V = \pi r^2 (12-x)$$

$$= \pi \frac{x^2}{36} (12-x)$$

$$= \frac{\pi}{36} (12x^2 - x^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{36} (24x - 3x^2)$$

$$0 = 24x - 3x^2$$

$$0 = 3x(8-x)$$

$$x=0 \quad x=8$$

$$V''(x) = \frac{\pi}{36} (24 - 6x)$$

$$V''(0) = \frac{2\pi}{3} > 0 \text{ olduğuna göre}$$

$$x=0 \text{ yerel min}$$

$$V''(8) = \frac{\pi}{36} (24 - 6 \cdot 8)$$

$$= -\frac{2\pi}{3} < 0 \text{ olduğundan}$$

$$x=8 \text{ yerel max}$$

$$h = 12 - x = 12 - 8 = 4 \text{ cm}$$

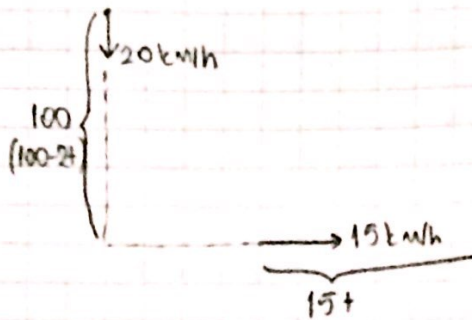
$$r = \frac{x}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

$$V = \pi r^2 (12-x)$$

$$= \pi \frac{16}{9} \cdot 8 = \frac{128\pi}{9}$$

8. Bir gemi 20 km/h güce diğer bir gemi 15 km/h güce doğru ilerliyor. Belirli bir anda ikinci gemi 1. geminin 100 km ş. ngyindedir. Kaç saat sonra gemiler birbirine en yakın olur?

Çözüm



$$d^2 = (100 - 20t)^2 + (15t)^2$$

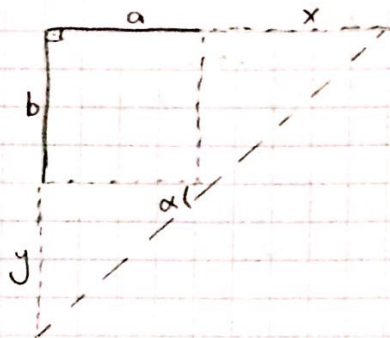
$$d = \sqrt{(100 - 20t)^2 + 15t^2}$$

$$d'(t) = (100 - 20t)^2 + 15t^2$$

$$= -4000 + 800t$$

4. A metre genişliğinde 1. koridor b metre genişliğinde; 2. koridor dik olarak kesiyor 1 koridordan 2 koridora geçerek paralel olarak taşınabilecek en uzun borunun boyunu bulunuz.

Çözüm



$$d^2 = (a+x)^2 + (b+y)^2$$

$$l(x) = (a+x)^2 + \left(b + \frac{ab}{x}\right)^2$$

$$l'(x) = 2(a+x) + 2\left(b + \frac{ab}{x}\right)\left(-\frac{ab}{x^2}\right) = 0$$

$$x = (ab^2)^{1/3}$$

$$d^2 = (a + (ab^2)^{1/3} + (b + (ab^2)^{1/3}))^2$$

$$d = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$$

$$y = \frac{ab}{x} = \frac{ab}{(ab^2)^{1/3}} = ab^{2/3} \cdot b^{1/3} = (a^2b)^{1/3}$$

5. Düzgün bir silindirik olan su tankı düzgün bir su tankı 4 cm/s hızla dolduruluyor. Suyun yükselme hızını bulunuz?

Cözüm

$$V = \pi r^2 h$$

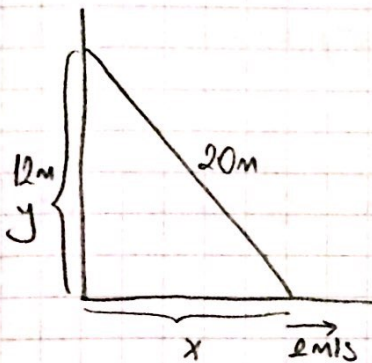
$$V(h(t)) = \pi r^2 h(t)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$4 = \pi r^2 \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi r^2}$$

6. Bir binanın duvarına 20m uzunluğundaki bir direğin yatacağı bir bina altına 2 m/s hızla kayıyor üst ucu 12m'de iken kayma hızı kaçtır?

Cözüm



$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/s} \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

$$x^2 + y^2 = 20^2 \Rightarrow x = 16$$

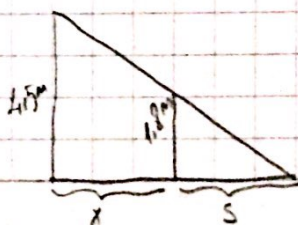
$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 16 2 12

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3}$$

7. 1.8m uzunluğundaki adam 4.5 m uzunluğundaki lambadan 2 m/s hızla ilerliyor 9m uzaklığına kadar adamın gölge uzunluğundaki değişimi bulunuz.

Cözüm



$$\frac{1.8}{4.5} = \frac{s}{x+s}$$

$$\frac{dx}{dt} = ?$$

$$\frac{ds}{dt} = ?$$

$$\frac{ds}{dt} = ? \quad \frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1.8}{2.7} \cdot 2$$

$$s = \frac{1.8x}{2.7} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{1.8}{2.7}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \sin(x^2)} = ?$$

Gesam

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(x^2)}{2x \sin(x^2) + 2x^3 (\cos x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^2)}{2x \cos(x^2) + 2x \cos x^2 - 2x^3 \sin(x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)}{2 \cos(x^2) - x^2 \sin(x^2)} = \frac{1}{2}$$

9. $a, b \in \mathbb{R}$ dann beweise,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \frac{a^2}{b^2}$$

Gesam

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \frac{\sin ax}{\cos ax}}{-b \frac{\sin bx}{\cos bx}} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\cos ax} \cdot \frac{\cos bx}{\sin bx} = a^2/b^2$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} = ?$$

Gesam

$$\frac{a^x / \ln a - \cos x a^{\sin x} / \ln a}{3x^2}$$

$$\ln a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \ln a - a^{\sin x} \cdot \cos^2 x \ln a + a^{\sin x} \cdot \sin x}{bx}$$

$$(\ln a)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x} \cos^2 x}{bx} + (\ln a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\sin x} \cdot \sin x}{bx}$$

$$0 + \frac{\ln a}{b} = \frac{\ln a}{b}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = ?$$

Gesum

$$y = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \frac{\ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)}{\ln \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \cdot \sin x - \sin x}{\sin^2 x - x^2 \sin x \cdot \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sin x + 2x \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\cos x + 2 \cos x - 2x \sin x} = -\frac{1}{3}$$

$$y' = e^{-1/3}$$

Eğri Çizimi

Asimptotlar

Bir eğri üzerindeki belirli bir noktası eğrinin en az bir tarafta sonsuza yaklaştığında bu noktası ile belli bir doğruya veya eğri arasındaki uzaklık sıfıra yaklaşıyor ise bu doğruya veya eğriye eğrinin asimptotu adı verilir.

1. Düşey Asimptot

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

veya

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

veya

$x = a$ $y = f(x)$ Düşey Asimptotu denir.

Örnek

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 - x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - x} = \infty$$

olduğundan $x = 0$ ve $x = 1$ $y = \frac{1}{x^2 - x}$ düşey asimptotudur.

2. Yatay Asimptot

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ veya $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ veya her ikisinde sağlanıyorsa

$y = L$ doğru $y = f(x)$ eğrinin yatay asimptotu denir.

3. Eğik Asimptot

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - (ax+b)| = 0 \text{ veya } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax+b)) = 0 \text{ veya her ikisinin}$$

de sağlanıyorsa $y = ax + b$ ($a \neq 0$) doğrusuna $y = f(x)$ eğrisine "eğik asimptot" denir.

veya

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

ise eğrinin eğik asimptotu vardır.

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

olmak üzere

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m_1 x)$$

ise $y = m_1 x + n_1$ doğrusuna eğrinin 1. eğik asimptotu denir.

Not: Pay ve paydası polinom fonksiyon olan rasyonel fonksiyon-
da payın derecesi paydan derecesinden büyük ise eğik asimptot
vardır ve bölüne eksittir. Payın derecesi paydanın derecesinden 2 veya
daha fazla ise bir durumda bölüm eğri asimptotu verir.