

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİNE GİRİŞ

1- MEKANİK

Giriş

Mekanik, temel mühendislik bilimlerinin başlangıcıdır. Cisimlerin kuvvetler etkisindeki davranışlarını inceler. Statik, Dinamik ve Mukavemet olmak üzere üç ana bölüme ayrılır. Statik; cisimlerin kuvvetler etkisindeki dengesini, Dinamik; hareketini, Mukavemet ise dayanımını ve deformasyonunu inceler. Burada bahsedilen cisimler katı cisim olduğundan bunlar teknolojiye; Makine, Cihaz veya Tesislerin katı elemanları olarak karşımıza çıkar. Sıvı veya gaz şeklindeki cisimler ile bunlarla temas halindeki katıların davranışlarını Akışkanlar mekaniği (Hidrostatik, Hidrodinamik, Aerodinamik) bilimi inceler. Mühendislik Mekaniğinin bölümleri olarak ele alınan Statik ve Dinamik bilimlerindeki katı cisim kuvvetler etkisinde şekil değiştirmez. Mukavemetteki katı cisim kuvvetler etkisinde çok küçük şekil değiştirmeler yapar. Mekaniğin amacı, mühendislik öğrencilerine her problemi basit ve mantıklı bir biçimde analiz edecek gücü kazandırmak ve çözüm için az sayıda, iyi anlaşılmış temel ilkeleri uygulatabilmektir.

Temel Kavramlar ve İlkeler

Mekanikte kullanılan temel kavramlar Uzay, zaman, kütle ve kuvvettir. Bu kavramlar tam olarak tarif edilemez; sezgilerimizi esas alarak kabul edilmelidirler ve mekanik çalışmalarında zihinsel bir referans çerçevesi olarak kullanılmalıdırlar. Newton mekaniğinde Uzay, Zaman ve Kütle Birbirinden bağımsız mutlak kavramlardır.

Temel Mekanik çalışmaları deneysel kanıtlara dayanan altı temel ilkenin ve matematiğin yardımı ile sürdürülür.

1-) Paralelkenar kanunu ile vektörlerin toplanması

2-) Kaydırılabilme ilkesi

3-) Newton'un 1. temel kanunu

Eğer bir parçacık üzerine etkiyen bileşke kuvvet sıfır ise parçacık dengede kalır.

($\vec{F} = \vec{0}$ ise cisim dengededir. Cisim denede ise $\vec{F} = \vec{0}$ dır.)

4-) Newton'un 2. temel kanunu

Eğer bir parçacık üzerine etkiyen bileşke kuvvet sıfır değilse, parçacık bileşke kuvvetle doğru orantılı ve aynı yönde ivmeye sahip olacaktır.

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

5-) Newton'un 3. temel kanunu

Temas halinde olan cisimler arasındaki etki ve tepki kuvvetleri aynı büyüklükte, aynı etki doğrusu üzerinde fakat zıt yönlerdedir.

6-) Newton'un Çekim Kanunu

Kütleleri M ve m olan iki parçacık birbirlerini karşılıklı olarak eşit ve zıt yönlü $\vec{F}$ ve $-\vec{F}$ kuvvetleri ile çekerler. Bu kuvvetin şiddeti aşağıda verilmiştir.

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Burada r = iki parçacık arasındaki uzaklık,

G = evrensel çekim sabitidir.

1.1 STATİK

Kuvvetler etkisindeki cisimlerin dengesini inceleyen bilim dalıdır.

Kuvvet: Bir Cismin şeklini veya hızını değiştiren ve başka cisim tarafından uygulanan etkiye kuvve denir.

Rijid Cisim: Kuvvetler etkisinde şeklini değiştirmeyen cisim

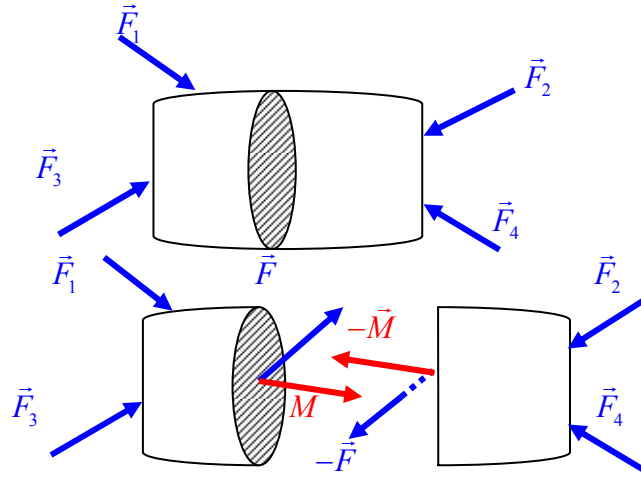
Denge: Newton veya Galileo eksen sistemi denen orijininde güneş bulunan ve sabit yıldızlara doğru yönelen eksen sistemine göre hareketsiz duran veya sabit hızla hareket eden cisim dengededir denir.

Kuvvetler etkinin cinsine göre : Temas etkisi (yüzey kuvvetleri) ve uzaktan etki (hacim kuvvetleri) olmak üzere ikiye ayrılır.

Dengesi incelenen cisimle temasta olan mafsals,mesnet,kablo,çubuk gibi diğer cisimlerden gelen kuvvetler yüzey kuvvetleridir.

Uzaktan etki kuvvetlerine örnek, ağırlık kuvvetleri, manyetik ve elektriksel alanlardan gelen kuvvetler verilebilir.

Kuvvetler cisme etki bölgesine göre: İç kuvvet dış kuvvet şeklinde ikiye ayrılır.



Şekilde gösterilen $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ kuvvetleri dış kuvvetler, $\vec{F}$ ve $-\vec{F}$ kuvvetleri ise iç kuvvetlerdir. İç kuvvetler şekilde gösterildiği gibi cismin içinde var olduğu düşünülen bir kesitte oluşur.Bu hayali kesitle cisim iki parçaya ayrılır. Oluşan bu iki ayrı kesitteki iç kuvvetlerin etki tepki ilkesine göre şiddet ve doğrultuları aynı yönleri zıttır.

Kuvvetler cisme mesnetler ve diğer cisimlerden uygulanma durumuna göre : Bilinen kuvvetler (aktif kuvvetler) ve mesnet veya bağlardan geleceği düşünülen tepki kuvvetleri (reaktif kuvvetler) olmak üzere ikiye ayrılır.

Aktif kuvvetler: Ağırlık kuvvetleri veya cismin zorlanma koşullarına göre bilinen dış kuvvetlerdir.

Tepki kuvvetleri : mesnet,mafsal, kablo, çubuk gibi diğer cisimlerin uyguladıkları kuvvetlerdir. Bu tepki kuvvetlerinin tam zıttı dengesi incelenen cisim tarafından diğer cisimlere aynı şekilde etkir.

Sürtünmesiz temaslarda tepki kuvveti temas yüzeyine diktir.

Rijid cismin dengesi : Bir rijid cisim kuvvetle etkisinde dengede ise cisme etki eden tüm kuvvetlerin vektörel toplamı ve tüm momentlerin vektörel toplamı sıfırdır.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} , \quad \sum \vec{M}_O = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$$

Kuvvetlerle ilgili olan ilk üç denklem kuvvetlerin bileşenleri ve doğrultuları ile ilgili değerleri içerebilir. Momentlerle ilgili olan son üç denklemde ise ilk üç denklemdekine ek olarak uzaklıklarla ilgili değerlere de rastlanabilir.

Bu altı denklem yardımı ile sürtünmesiz denge problemleri çözülebilir.

Sürtünmeli problemlerde ek olarak aşağıdaki sürtünme denklemi kullanılır.

$$f = \mu N$$

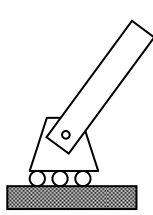
Burada f = maksimum sürtünme kuvveti

μ = sürtünme katsayısı

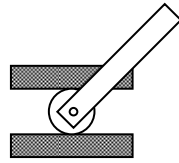
N = sürtünen yüzeylerdeki baskı kuvveti (Normal kuvvet)

Bu denklemlerdeki kuvvet ve momentlerin genelde bilinen kısmına aktif kuvvetler, bilinmeyenlere reaktif (tepki) kuvvetleri denir. Tepki kuvvetleri Mesnetlerden ve mafsallardan gelir. Aşağıda çok karşılaşılan mafsal ve mesnetler ve bunlardan cisim üzerine gelebilecek kuvvet ve momentlerin doğrultuları gösterilmiştir.

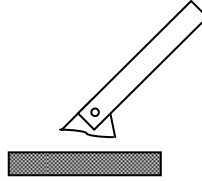
İki boyutlu mesnet ve bağlar ile bunlardan cisme gelen tepki kuvvetleri:



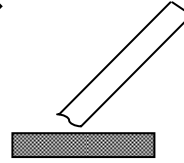
Yuvarlanan elemanlar



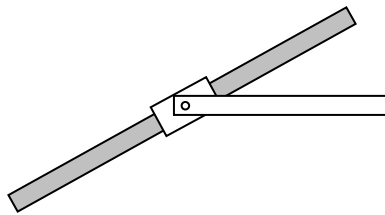
kavisli yüzey



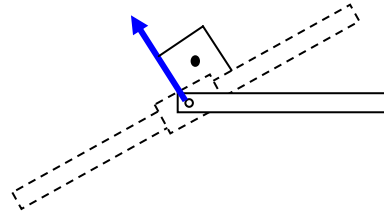
sürtünmesiz
yüzey



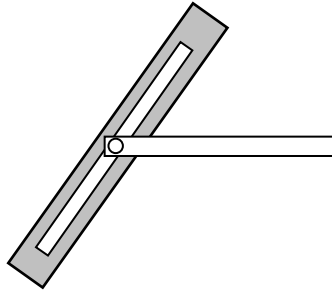
kayma yüzeyine
dik tepki kuvveti



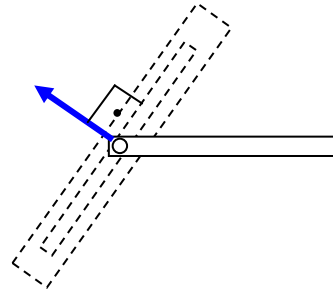
Çubuk doğrultusunda hareket edebilen
bilezik ve buna mafsallı diğer çubuk



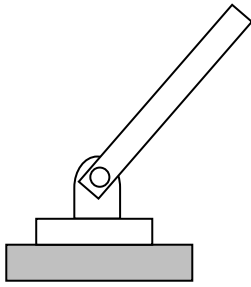
tepki kuvveti hareket
doğrultusuna dik



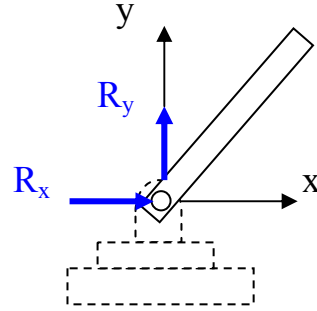
Kanal doğrultusunda hareket



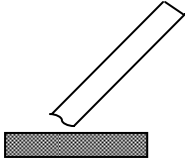
kanal doğrultusuna dik tepki kuvveti



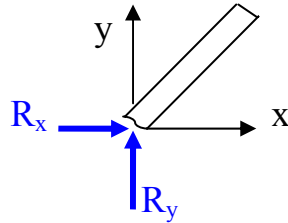
Sabit silindirik mafsallı



Tepki kuvvetinin doğrultusu bilinmiyor.



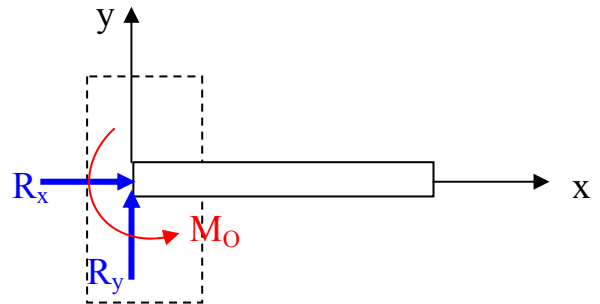
Pürüzlü yüzey



Yüzey tepkisinin doğrultusu bilinmiyor

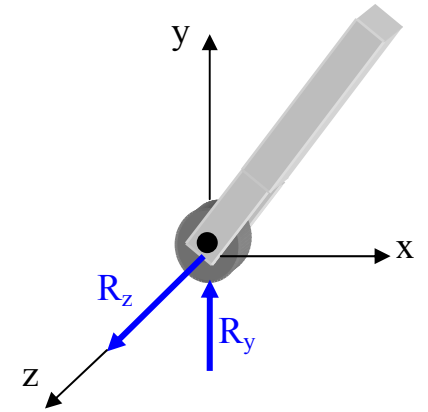
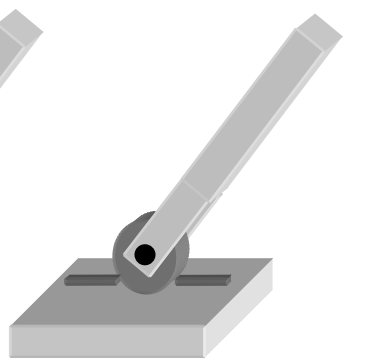
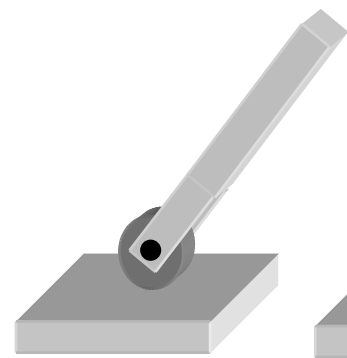
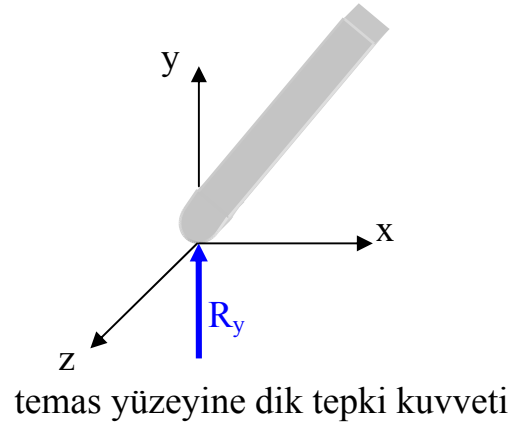
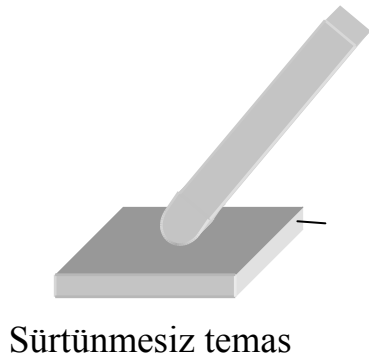
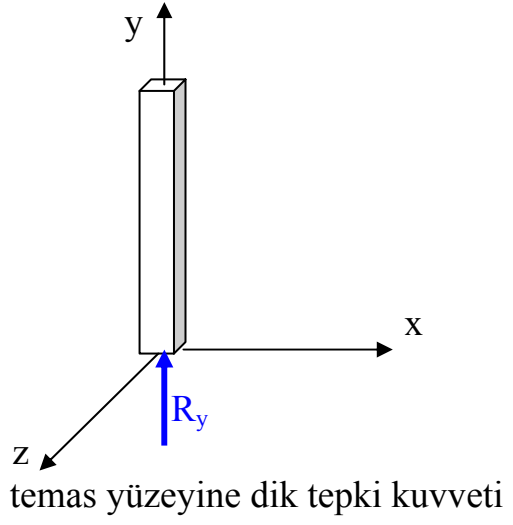
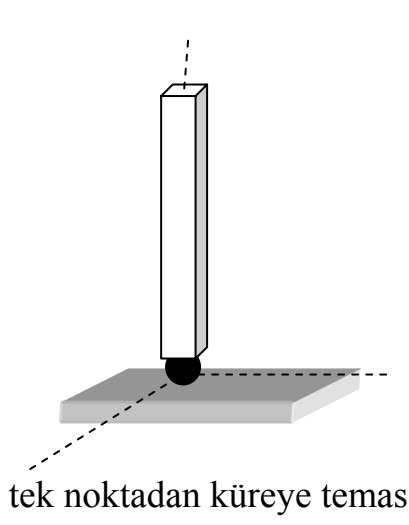


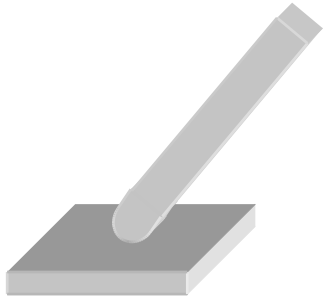
Ankastre mesnet



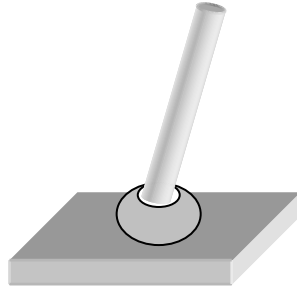
Bilinmeyen kuvvet ve şiddeti
bilinmeyen moment

Üç boyutlu mesnet ve bağlar ile bunlardan cisme gelen tepki kuvvetleri:

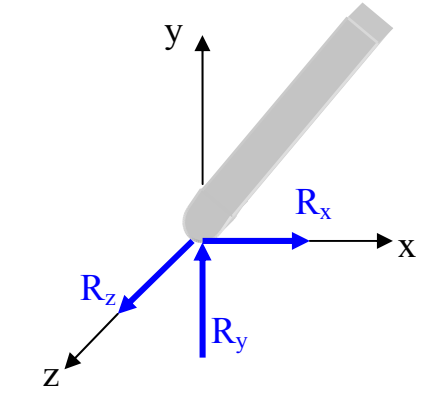




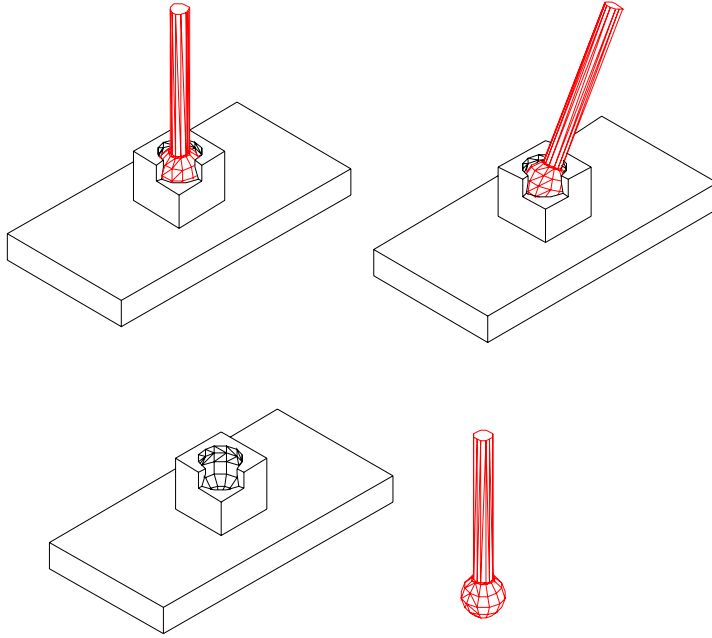
Pürüzlü yüzey



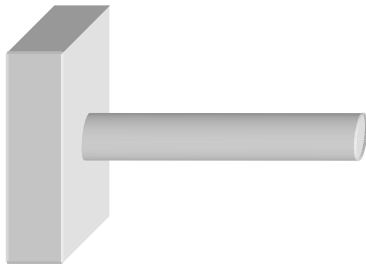
küresel mafsalsal



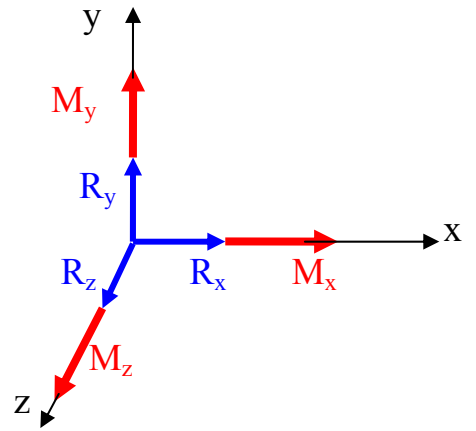
üç doğrultuda bilinmeyen tepki kuvvetleri



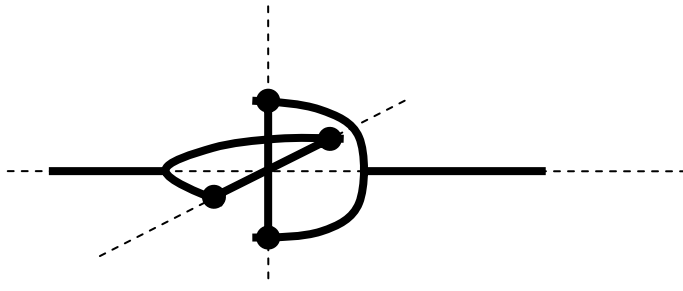
Küresel mafsalsal ayrıntılı şekli



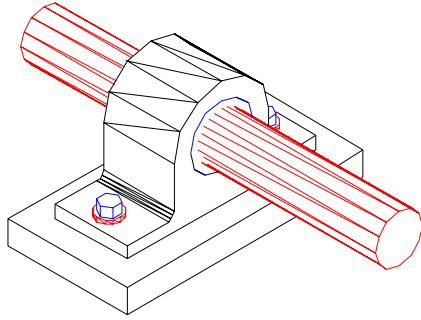
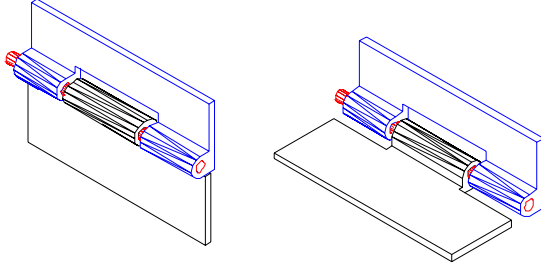
ankastre mesnet



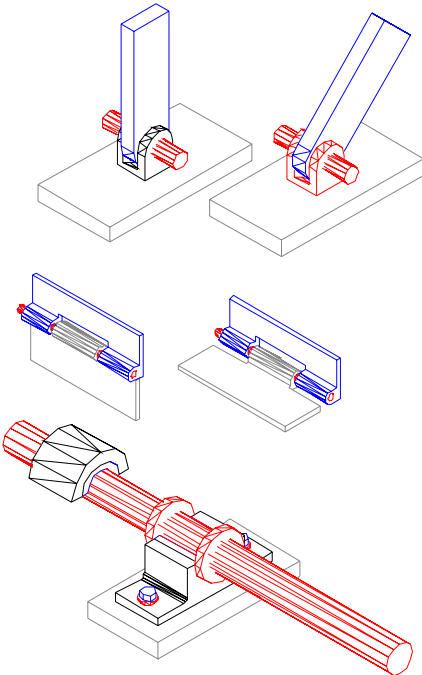
üç doğrultuda bilinmeyen tepki kuvveti ve üç doğrultuda bilinmeyen tepki momenti



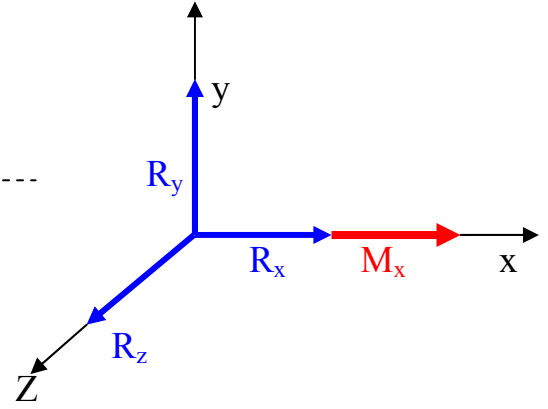
Üniversal kavrama



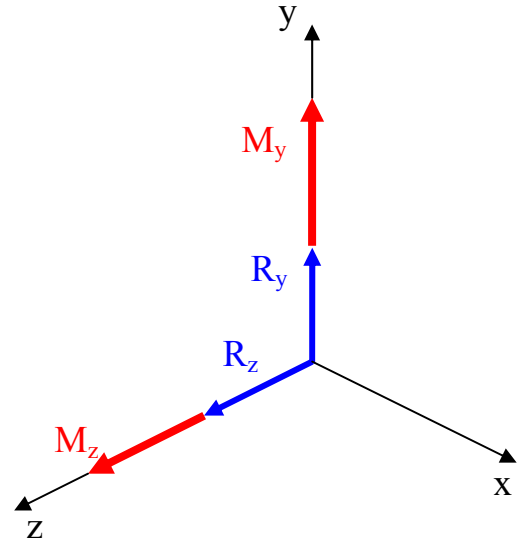
Eksenel doğrultuda hareket edebilen silindirik mafsal



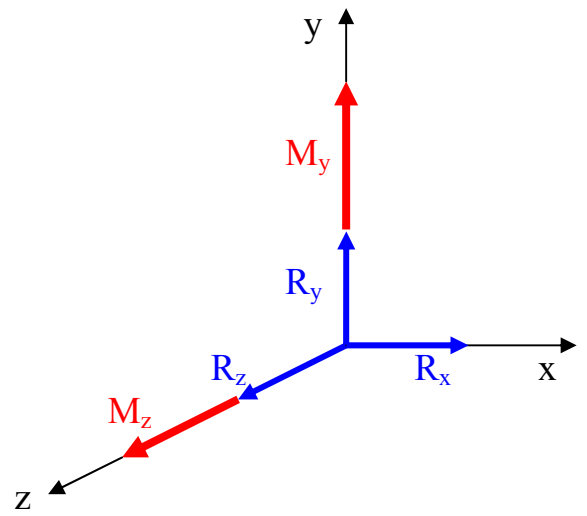
Eksenel doğrultuda hareket yeteneği olmayan silindirik mafsal



üç doğrultuda bilinmiyen kuvvet ve
bir doğrultuda bilinmiyen moment



İki doğrultuda bilinmiyen kuvvet ve
iki doğrultuda bilinmiyen moment



Üç doğrultuda bilinmiyen kuvvet ve
İki doğrultuda bilinmiyen moment

Bunlardan başka ip kuvveti ip doğrultusundadır. Birde ağırlıksız olup uç noktalarından sürtünmesiz mafsallı ve uç noktaları dışında yük taşımayan çubuklardan gelen tepki kuvvetleride çubuk doğrultusunda kabul edilir.

6.2 İç kuvvetler ve kesit zorları

İç kuvvetlerin cismin bir kesiti içindeki bileşenlerine kesit zorları denir.

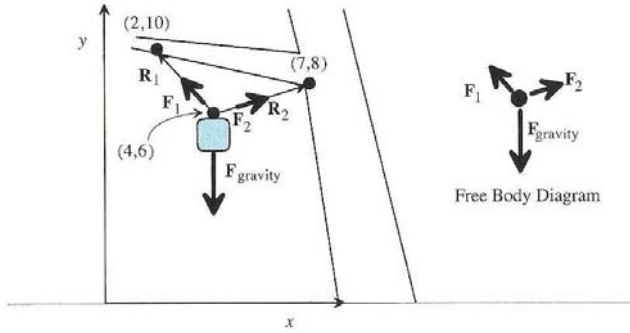
Kesite etki eden kuvvetin kesite dik bileşenine **Normal kuvvet** denir.

Kesite etki eden kuvvetin kesit içindeki bileşenine **Kesme kuvveti** denir.

Kesite etki eden momentin kesite dik bileşenine **Burulma momenti** denir.

Kesite etki eden momentin kesit içindeki bileşenine **Eğilme momenti** denir.

Uygulamalar:



Yiyecekleri aylardan korumak için kamp sakinleri, yiyecekleri doldurdukları bir kutuyu ağaçlara şekildeki gibi bağlıyorlar. Kutu ile birlikte yiyeceklerin toplam ağırlığı 144 N olduğuna göre her bir ipteki kuvveti bulunuz.

$$\vec{R}_1 = (2-4)\vec{i} + (10-6)\vec{j} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{R}_2 = (7-4)\vec{i} + (8-6)\vec{j} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{F}_1 = a\vec{R}_1 = -2a\vec{i} + 4a\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = b\vec{R}_2 = 3b\vec{i} + 2b\vec{j}$$

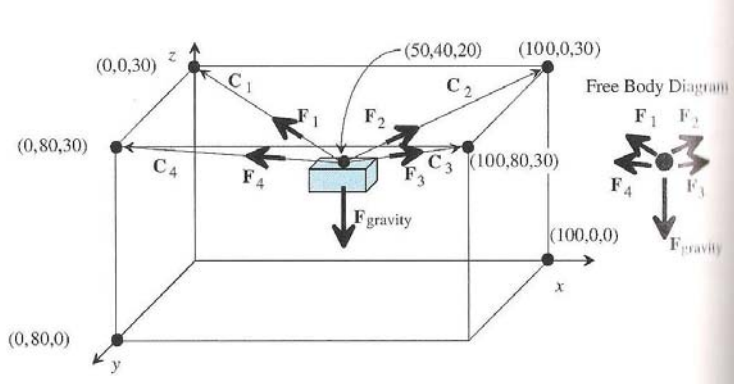
$$\vec{F}_{gravity} = 0\vec{i} - 144\vec{j}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -2a + 3b + 0 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}b$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 4a + 2b - 144 = 0 \Rightarrow 4\left(\frac{3}{2}b\right) + 2b - 144 = 0 \Rightarrow b = \frac{144}{8} = 18, \quad a = 27$$

$$\vec{F}_1 = -54\vec{i} + 108\vec{j} \quad F_1 = \sqrt{54^2 + 108^2}, \quad \boxed{F_1 = 120,75 \text{ N}}$$

$$\vec{F}_2 = 54\vec{i} + 36\vec{j} \quad F_2 = \sqrt{54^2 + 36^2}, \quad \boxed{F_2 = 64,9 \text{ N}}$$



Bir spor stadyumunda 1000 kg kütleli bir skor tablosu şekilde gibi 4 adet kabloyla bağlanmıştır. Kablolardaki emniyet katsayısı 3 olduğuna göre her bir kablonun taşıma kapasitesi ne olmalıdır.

Çözüm:

$$\vec{C}_1 = (0 - 50)\vec{i} + (0 - 40)\vec{j} + (30 - 20)\vec{k} = -50\vec{i} - 40\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\vec{C}_2 = (100 - 50)\vec{i} + (0 - 40)\vec{j} + (30 - 20)\vec{k} = 50\vec{i} - 40\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\vec{C}_3 = (100 - 50)\vec{i} + (80 - 40)\vec{j} + (30 - 20)\vec{k} = 50\vec{i} + 40\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\vec{C}_4 = (0 - 50)\vec{i} + (80 - 40)\vec{j} + (30 - 20)\vec{k} = -50\vec{i} + 40\vec{j} + 10\vec{k}$$

Kablodaki kuvvetlerin doğrultuları birbirine göre simetrik olduğundan a skala sabiti bütün kablolarda aynı olur.

$$\vec{F}_1 = a\vec{C}_1 = -50a\vec{i} - 40a\vec{j} + 10a\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = a\vec{C}_2 = 50a\vec{i} - 40a\vec{j} + 10a\vec{k}$$

$$\vec{F}_3 = a\vec{C}_3 = 50a\vec{i} + 40a\vec{j} + 10a\vec{k}$$

$$\vec{F}_4 = a\vec{C}_4 = -50a\vec{i} + 40a\vec{j} + 10a\vec{k}$$

$$\vec{F}_{gravity} = 0\vec{i} + 0\vec{j} - 9800\vec{k}$$

$$\sum F_x = -50a + 50a + 50a - 50a + 0 = 0$$

$$\sum F_y = -40a - 40a + 40a + 40a + 0 = 0$$

$$\sum F_z = 10a + 10a + 10a + 10a - 9800 = 0 \Rightarrow a = 245$$

$$\vec{F}_1 = -12250\vec{i} - 9800\vec{j} + 2450\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = 12250\vec{i} - 9800\vec{j} + 2450\vec{k}$$

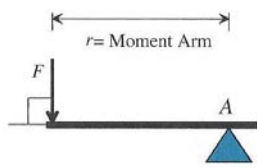
$$\vec{F}_3 = 12250\vec{i} + 9800\vec{j} + 2450\vec{k}$$

$$\vec{F}_4 = -12250\vec{i} + 9800\vec{j} + 2450\vec{k}$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \sqrt{12250^2 + 9800^2 + 2450^2} = 15900 \text{ N}$$

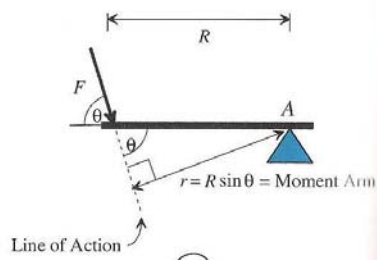
Emniyet katsayısının 3 olması istendiğine göre kablolar $3 \cdot 15900 \text{ N} = 47700 \text{ N}$ luk kuvvete dayanabilmelidir.

Force Applied at Right Angle

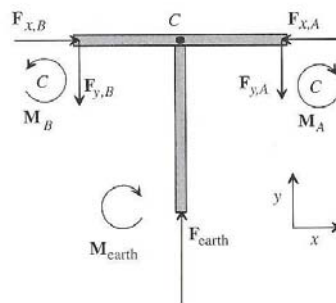
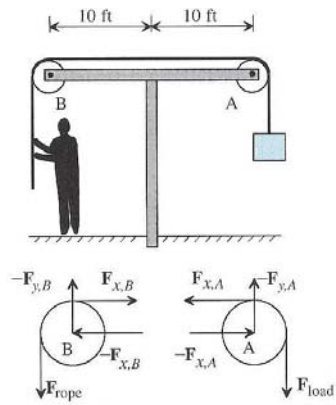
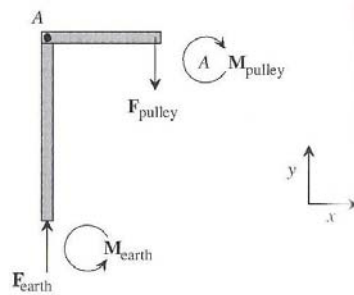
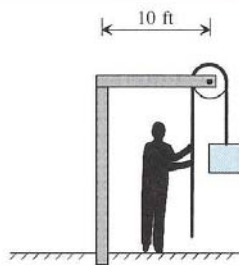


$\curvearrowright A$
 Moment about Point $A = rF$
 (Positive)

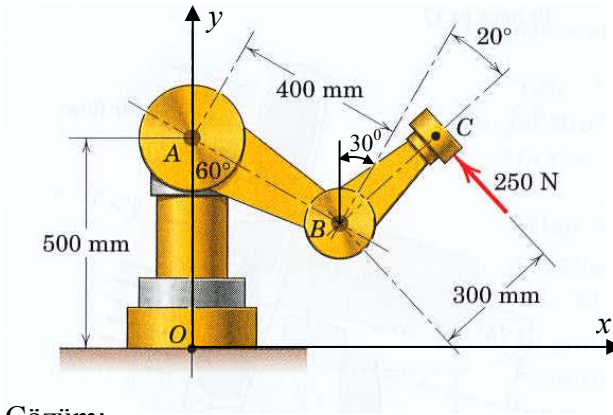
Force Applied at Arbitrary Angle



$\curvearrowright A$
 Moment about Point $A = rF$
 (Positive)



Makina 1 G8 Statik 1. Vize soruları ve Cevapları



SORU 1: 250 N şiddetindeki kuvvetin robotun tabanındaki O noktasına göre momentini bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{M}_O = \vec{OC} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} \quad , \quad \vec{F} = 250\vec{k} \wedge \vec{U}_{BC}$$

$$\vec{OA} = 500\vec{j}$$

$$\vec{AB} = 400\sin 60^\circ \vec{i} - 400\cos 60^\circ \vec{j}$$

$$\vec{BC} = 300\sin 50^\circ \vec{i} + 300\cos 50^\circ \vec{j} \quad , \quad \vec{U}_{BC} = \sin 50^\circ \vec{i} + \cos 50^\circ \vec{j}$$

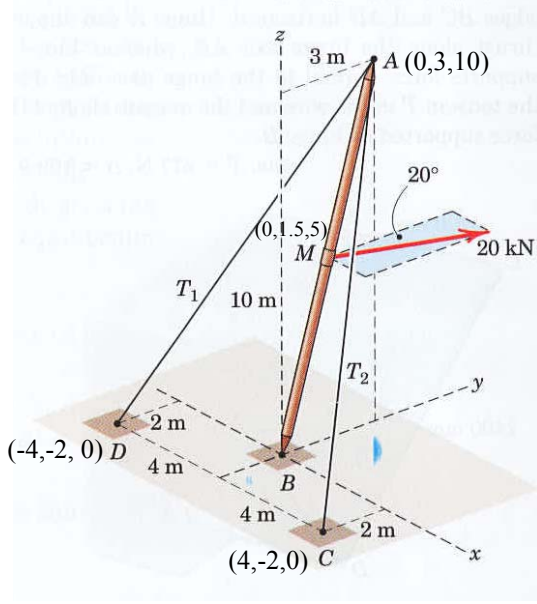
$$\vec{OC} = 576.22\vec{i} + 492.84\vec{j}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{U}_{BC} = -\cos 50^\circ \vec{i} + \sin 50^\circ \vec{j}$$

$$\vec{F} = -160.7\vec{i} + 191.51\vec{j}$$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 576.22 & 492.84 & 0 \\ -160.7 & 191.51 & 0 \end{vmatrix} = 189551\vec{k}$$

$$\boxed{M_O = 189.6 \text{ Nm}}$$



SORU 2: y-z Düzleminde bulunan AB direği B noktasından küresel mafsalsal, A noktasından ise AD ve AC ipleri yardımı ile tesbit edilmiştir. Direğin orta noktası olan M ye etki eden 20 kN şiddetindeki kuvvet yatay düzlemde bulunmaktadır. Direğin ağırlığını ihmal ederek İplerdeki kuvvetleri ve B deki mafsalsal tepkisini bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{S}_{AD} + \vec{S}_{AC} + \vec{R}_B + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_B = \vec{0} \Rightarrow \vec{BA} \wedge \vec{S}_{AD} + \vec{BA} \wedge \vec{S}_{AC} + \vec{BM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{S}_{AD} = S_{AD} \frac{\vec{AD}}{|\vec{AD}|} = S_{AD} \frac{-4\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k}}{\sqrt{141}}, \quad \vec{S}_{AC} = S_{AC} \frac{4\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k}}{\sqrt{141}}$$

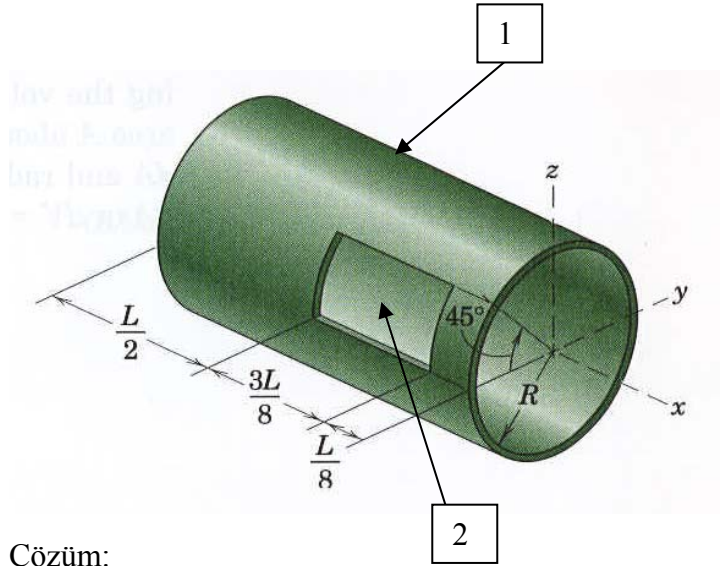
$$\vec{F} = 20 \sin 20^\circ \vec{i} + 20 \cos 20^\circ \vec{j}, \quad \vec{BA} = 3\vec{j} + 10\vec{k}, \quad \vec{BM} = 1.5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\sum \vec{M}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 10 \\ -\frac{4}{\sqrt{141}} S_{AD} & -\frac{5}{\sqrt{141}} S_{AD} & -\frac{10}{\sqrt{141}} S_{AD} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 10 \\ \frac{4}{\sqrt{141}} S_{AC} & -\frac{5}{\sqrt{141}} S_{AC} & -\frac{10}{\sqrt{141}} S_{AC} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1.5 & 5 \\ 20 \sin 20^\circ & 20 \cos 20^\circ & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sum \vec{M}_B = \left(\frac{20}{\sqrt{141}} S_{AD} - \frac{20}{\sqrt{141}} S_{AC} - 100 \cos 20^\circ \right) \vec{i} + \left(\frac{-40}{\sqrt{141}} S_{AD} + \frac{40}{\sqrt{141}} S_{AC} + 100 \sin 20^\circ \right) \vec{j} + \left(\frac{12}{\sqrt{141}} S_{AD} - \frac{12}{\sqrt{141}} S_{AC} - 30 \sin 20^\circ \right) \vec{k} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{20}{\sqrt{141}} S_{AD} - \frac{20}{\sqrt{141}} S_{AC} - 100 \cos 20^\circ \right) &= 0 \\ \left(\frac{-40}{\sqrt{141}} S_{AD} + \frac{40}{\sqrt{141}} S_{AC} + 100 \sin 20^\circ \right) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} S_{AC} = 22.82 \text{ kN} \\ S_{AD} = 32.97 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{aligned} -\frac{4}{\sqrt{141}} S_{AD} + \frac{4}{\sqrt{141}} S_{AC} + 20 \sin 20^\circ + R_x &= 0 \\ -\frac{5}{\sqrt{141}} S_{AD} - \frac{5}{\sqrt{141}} S_{AC} + 20 \cos 20^\circ + R_y &= 0 \\ -\frac{10}{\sqrt{141}} S_{AD} - \frac{10}{\sqrt{141}} S_{AC} + R_z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} R_x = -3.42 \text{ kN} \\ R_y = 4.7 \text{ kN} \\ R_z = 46.98 \text{ kN} \end{cases}$$



SORU 3: Şekilde gösterilen homojen malzemeden ince cidarlı içi boş silindir (Boru) şeklinde yapılan cisimden pencere şeklinde bir parça çıkarılmıştır. Bu oluşturulan cismin kütle merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

Çözüm:

	x	y	z	A	Ax	Ay	Az
1	$-L/2$	0	0	$2\pi RL$	$-\pi RL^2$	0	0
2	$-5L/16$	$-0.9R$	$0.373R$	$-3\pi RL/32$	$15\pi RL^2/512$	$2.7\pi R^2L/32$	$-1.119\pi R^2L/32$
			Σ	$\pi RL(2-3/32)$	$\pi RL^2(-1+15/512)$	$2.7\pi R^2L/32$	$-1.119\pi R^2L/32$

$$y_2 = -\frac{R \sin \alpha}{\alpha} \cos \alpha = -\frac{R \sin \pi/8}{\pi/8} \cos \pi/8 = -0.9R$$

$$z_2 = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} \sin \alpha = \frac{R \sin \pi/8}{\pi/8} \sin \pi/8 = 0.373R$$

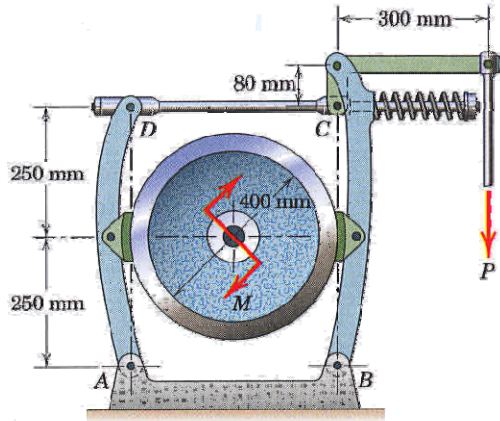
$$A_2 = -\frac{2\pi R}{8} \frac{3L}{8} = -\frac{3\pi RL}{32}$$

$$x_G = \frac{\pi RL^2(-1+15/512)}{\pi RL(2-3/32)} = -\frac{497/512}{61/32} L, \quad \boxed{x_G = -\frac{497}{976} L = -0.509L}$$

$$y_G = \frac{2.7\pi R^2L/32}{\pi RL(61/32)} = \frac{2.7/32}{61/32} R, \quad \boxed{y_G = \frac{2.7}{61} R = 0.044R}$$

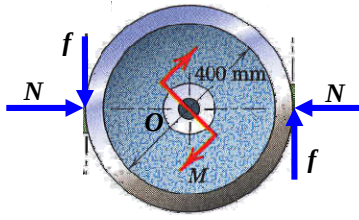
$$z_G = \frac{-1.119\pi R^2L/32}{\pi RL(61/32)} = \frac{-1.119/32}{61/32} R, \quad \boxed{z_G = \frac{-1.119}{61} R = -0.0183R}$$

Makina 1 G8 Statik 2.Vize soruları ve Cevapları



SORU 1: Şekildeki çift bloklı fren sisteminde yay vasıtası ile volan frenlenmektedir. Volanı serbest bırakmak için kola P kuvveti uygulanması gerekir. Eğer $P = 0$ ise yay 30 mm sıkışmış durumdadır. Eğer fren papuçları ile volan arasındaki sürtünme katsayısı $\mu = 0.20$ ise $M = 100 \text{ N.m}$ lik döndürme momenti etkisindeki volanı frenleyebilmek için gerekli olan en küçük yay sabitini bulunuz. Papuçların boyutunu ihmal ediniz.

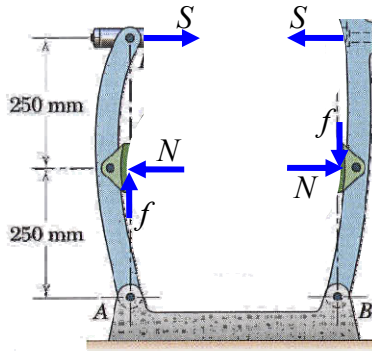
Çözüm:



$$\sum M = 0 \Rightarrow M - 2f \cdot R = 0 \Rightarrow f = \frac{M}{2R} = \frac{100}{0.4}, \quad f = 250 \text{ Newton}$$

$$f = \mu N \Rightarrow N = \frac{250}{0.2},$$

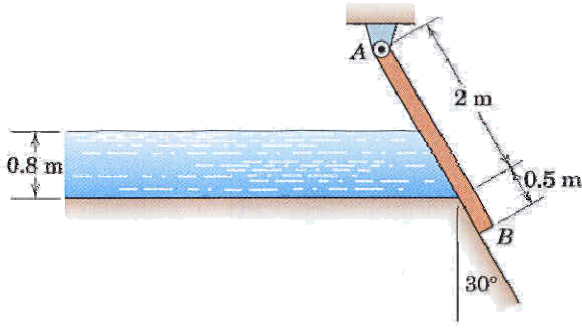
$$N = 1250 \text{ Newton}$$



$$M_A = 0 \Rightarrow 500S - 250N = 0$$

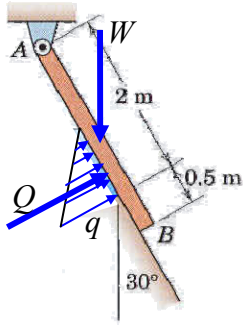
$$S = \frac{250 \cdot 1250}{500}, \quad S = 625 \text{ Newton}$$

Yaya gelen kuvvet için $S = k \cdot \Delta x$ den , $k = \frac{S}{\Delta x} = \frac{625}{0.030}$, $k = 20833 \text{ N/m}$



SORU 2: A dan silindirik mafsall ile mesnetlenmiş homojen yapıdaki 2.5 metre uzunluğundaki bir AB plakası bir su kanalında şekildeki gibi kullanılmaktadır. Su seviyesinin 0.8 metreye ulaştığında kapağın suyu tutabilmesi için kapak malzemesinin birim uzunluğunun kütlesi en az ne olmalıdır.

Çözüm:



$$q = 1000 * 0.8 * g = 800 * g, \quad q = 800 * g \text{ (N/m)}$$

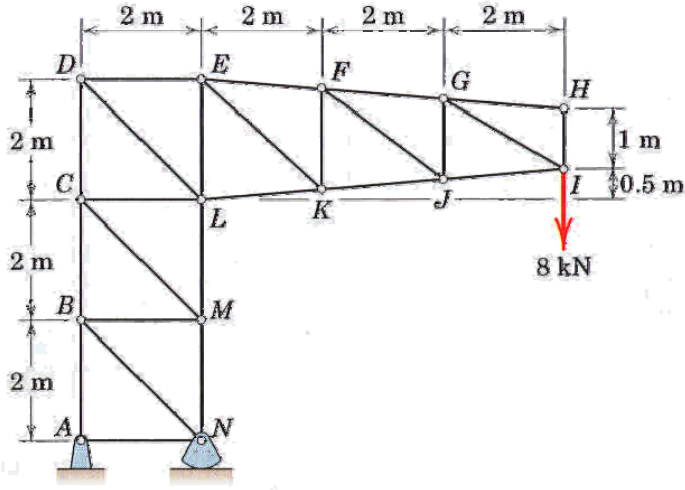
$$Q = \frac{q * 0.8 / \cos 30^\circ}{2} = \frac{800 * g * 0.8 \sqrt{3}}{4},$$

$$Q = 277.13 * g \text{ (N)}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{2 + 0.5}{2} W - \left(2 - \frac{1}{3} \frac{0.8}{\cos 30^\circ}\right) Q = 0$$

$$W = \frac{2}{2.5} \left(2 - \frac{1}{3} \frac{2 * 0.8}{\sqrt{3}}\right) 277.13, \quad W = 375.14 * g \text{ (N)}$$

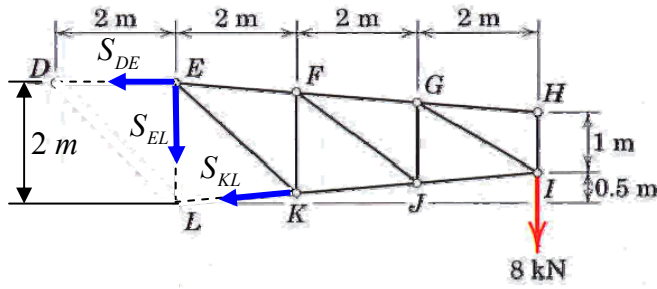
$$W = mg, \quad m = 375.14 \text{ kg}, \quad \rho = \frac{m}{2 + 0.5} = \frac{375.14}{2.5}, \quad \boxed{\rho = 150 \text{ kg/m}}$$



SORU 3: Şekildeki kafes sisteminde DE ve DL çubuklarındaki kuvvetleri bulunuz.

Çözüm:

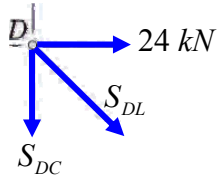
DE çubuğundaki kuvvet kesim metodu ile bulunabilir.



$$\sum M_L = 0 \Rightarrow 2S_{DE} - 6 \cdot 8 = 0$$

$$S_{DE} = 24 \text{ kN} \text{ çekme kuvveti}$$

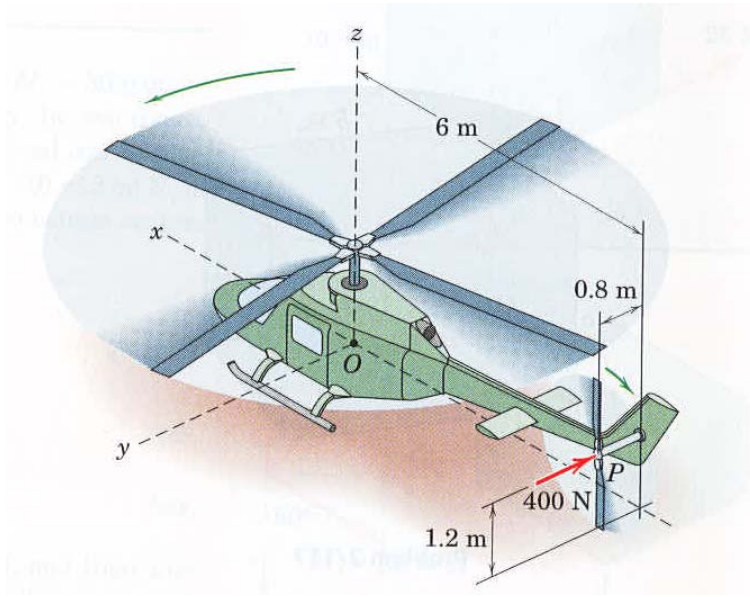
DL çubuğundaki kuvvet düğüm noktası metodu ile bulunabilir.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow S_{DL} \frac{\sqrt{2}}{2} + 24 = 0$$

$$S_{DL} = 24\sqrt{2}, \quad S_{DL} = 33.94 \text{ kN} \text{ Basma kuvveti}$$

Statik Final 20072 soruları ve çözümleri



SORU 1: Bir helikopter üç boyutlu bazı geometrik değerleri ile şekilde verilmiştir. Yerde yapılan bir test esnasında 400N luk aerodinamik kuvveti kuyruktaki rotora P noktasında uygulanmıştır. Bu kuvvetin O noktasına göre momentini bulunuz.

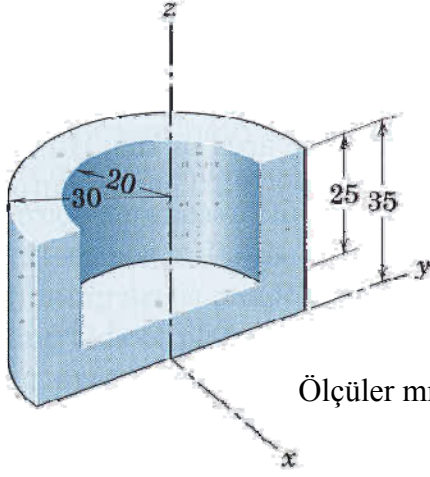
Çözüm:

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge -400\vec{j}$$

$$\vec{OP} = 6\vec{i} + 0.8\vec{j} + 1.2\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = (6\vec{i} + 0.8\vec{j} + 1.2\vec{k}) \wedge -400\vec{j}$$

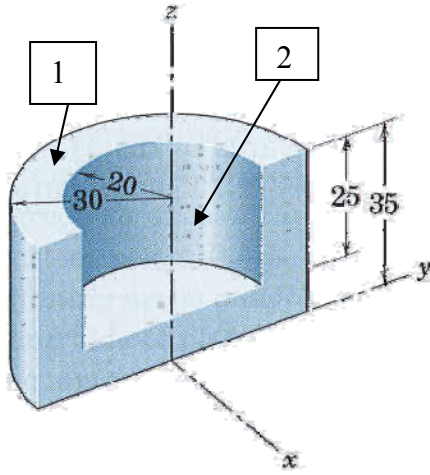
$$\boxed{\vec{M}_O = 480\vec{i} - 2400\vec{k}} \text{ N} \cdot \text{m}$$



SORU 2: Metalden döküm yoluyla elde edilen şekildeki parçanın kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Ölçüler mm cinsindendir.

$\eta = y_G = 0$ ($y = 0$ düzlemi, simetri düzlemi olduğundan dolayı)



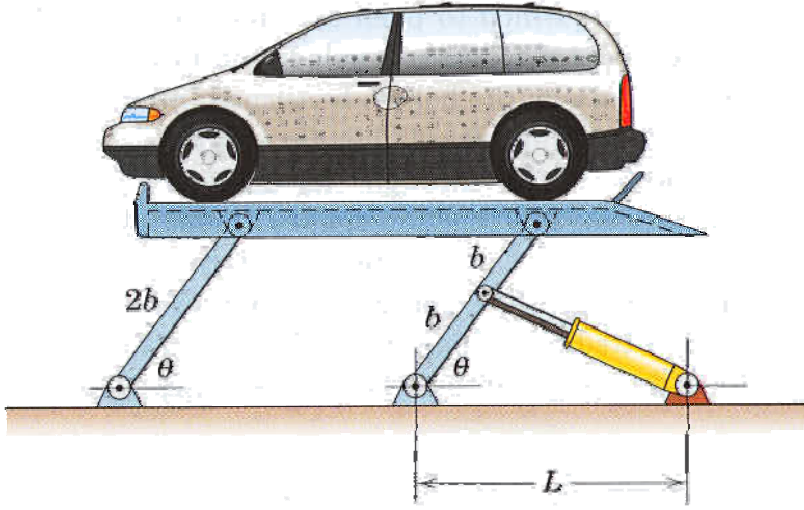
$$x_1 = -\frac{4 \cdot 30}{3\pi} = -\frac{40}{\pi}, \quad V_1 = \frac{\pi(30)^2 35}{2} = 15750\pi$$

$$x_2 = -\frac{4 \cdot 20}{3\pi} = -\frac{80}{3\pi}, \quad V_2 = -\frac{\pi(20)^2 25}{2} = -5000\pi$$

	x	z	V	Vx	Vz
1	$-\frac{40}{\pi}$	$\frac{35}{2} = 17.5$	15750π	-630000	275625π
2	$-\frac{80}{3\pi}$	$10 + \frac{25}{2} = 22.5$	-5000π	$\frac{400000}{3}$	-112500π
		Σ	10750π	$-\frac{1490000}{3}$	163125π

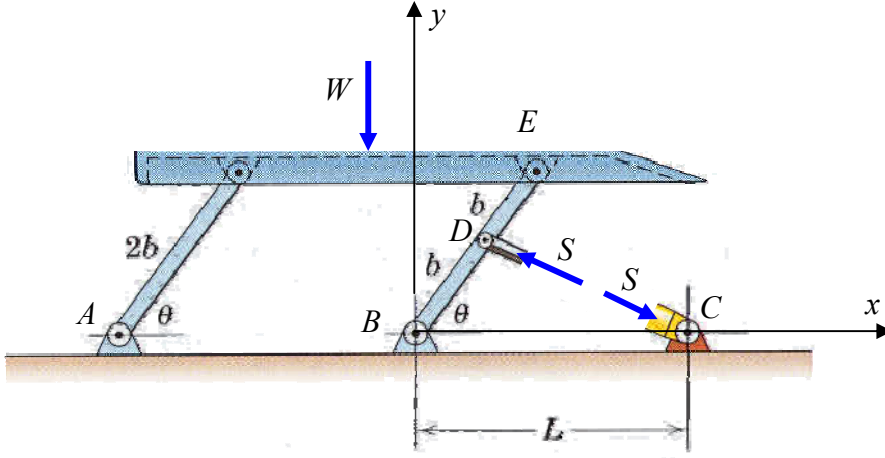
$$\xi = x_G = \frac{-1490000}{3 \cdot 10750\pi}, \quad \boxed{\xi = x_G = -14.7 \text{ mm}}$$

$$\zeta = z_G = \frac{163125\pi}{10750\pi}, \quad \boxed{\zeta = z_G = \frac{1305}{86} = 15.17 \text{ mm}}$$



SORU 3: Şekilde gösterilen araç kaldırma sistemindeki
a) hidrolik silindirin uyguladığı kuvveti θ ya bağlı olarak bulunuz.
b) $L = 2b$ olursa silindirdeki kuvvetin θ ya bağlı ifadesi ne olur.
(Sistemin kütlesi aracın m kütlesi yanında ihmal edilebilir.)

Çözüm:



$$\delta\tau = \vec{S} \cdot \delta\vec{r}_D + \vec{W} \cdot \delta\vec{r}_E = 0$$

$$\vec{S} = S\vec{U}_{CD}, \quad \vec{W} = -mg\vec{j}$$

$$\vec{U}_{CD} = \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} = \frac{-(L - b\cos\theta)\vec{i} + b\sin\theta\vec{j}}{\sqrt{b^2 + L^2 - 2bL\cos\theta}}, \quad \vec{S} = \frac{-(L - b\cos\theta)\vec{i} + b\sin\theta\vec{j}}{\sqrt{b^2 + L^2 - 2bL\cos\theta}} S$$

$$\vec{r}_D = b\cos\theta\vec{i} + b\sin\theta\vec{j}, \quad \vec{r}_E = 2b\cos\theta\vec{i} + 2b\sin\theta\vec{j}$$

$$\delta\vec{r}_D = -b\sin\theta\delta\theta\vec{i} + b\cos\theta\delta\theta\vec{j}, \quad \delta\vec{r}_E = -2b\sin\theta\delta\theta\vec{i} + 2b\cos\theta\delta\theta\vec{j}$$

$$\delta\tau = \frac{bL\sin\theta - b^2\sin\theta\cos\theta + b^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{b^2 + L^2 - 2bL\cos\theta}} S\delta\theta - 2bmg\cos\theta\delta\theta = 0$$

$$\frac{L\tan\theta}{\sqrt{b^2 + L^2 - 2bL\cos\theta}} S - 2mg = 0, \quad \boxed{S = \frac{2mg\sqrt{b^2 + L^2 - 2bL\cos\theta}}{L\tan\theta}}$$

$$L = 2b \text{ ise } S = \frac{2mg\sqrt{b^2 + 4b^2 - 4b^2\cos\theta}}{2b\tan\theta}, \quad \boxed{S = \frac{mg\sqrt{5 - 4\cos\theta}}{\tan\theta}}$$

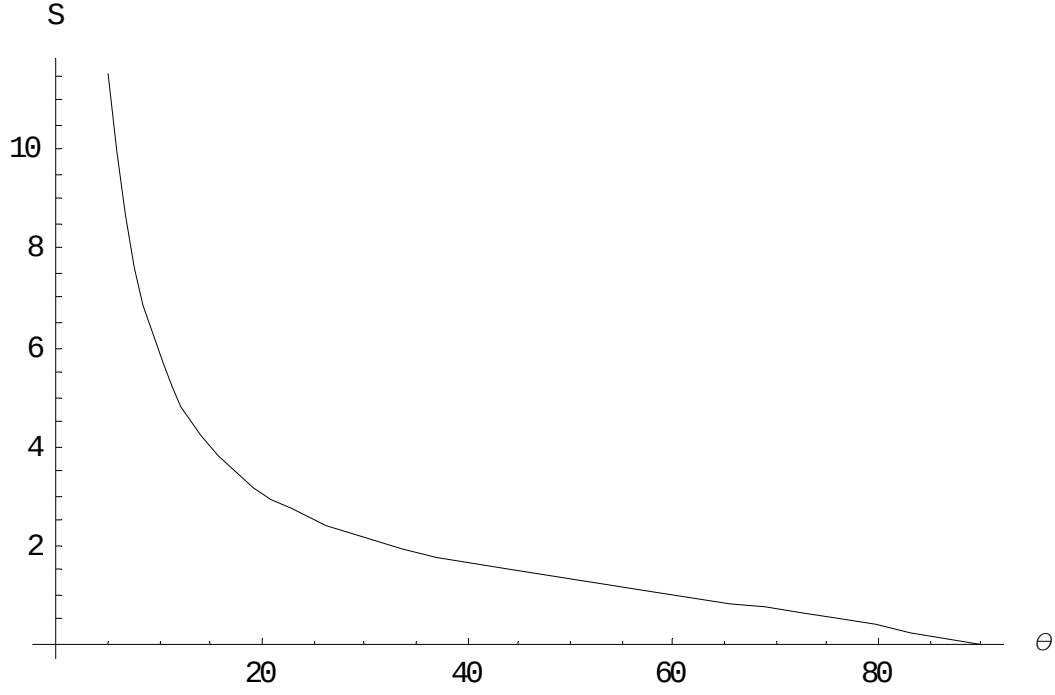
Ek bilgi : Silindirdeki kuvvetin $L = 2b$ ve $W = mg = 1$ için θ ya göre değişiminin mathematica programında çizdirilmesi:

W = 1;

$$s[\theta_] = \frac{W \sqrt{5 - 4 \cos[\theta]}}{\tan[\theta]}$$

Plot[s[θ Degree], {θ, 5, 90}, AxesLabel → {θ, S}];

$$\sqrt{5 - 4 \cos[\theta]} \cot[\theta]$$

















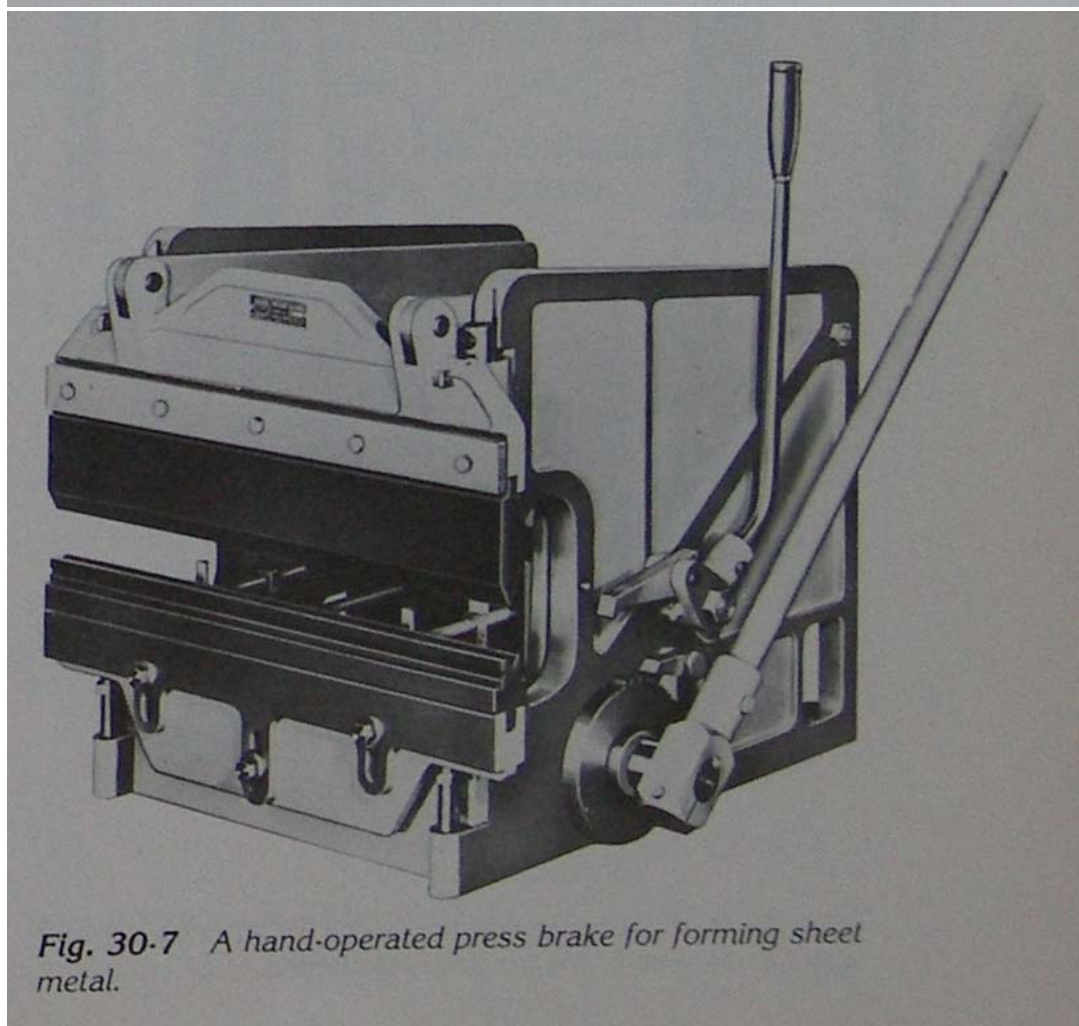
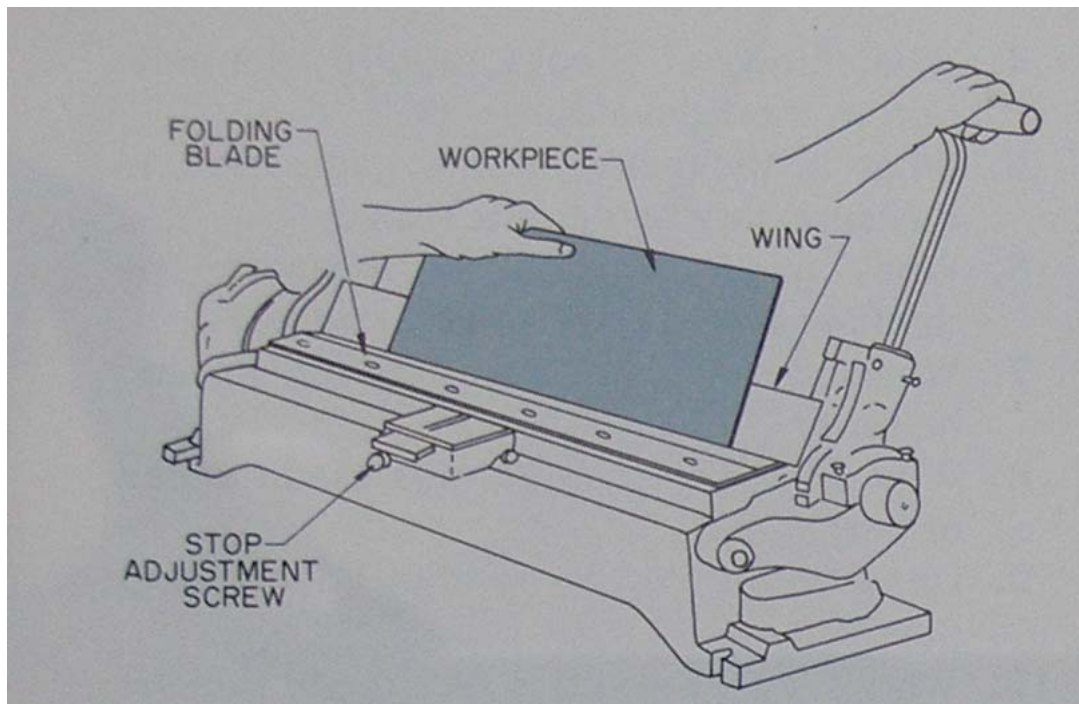


Fig. 30-7 A hand-operated press brake for forming sheet metal.

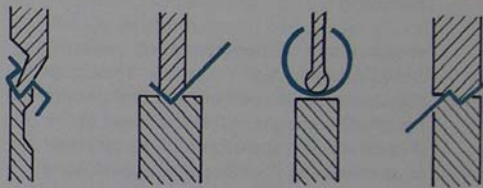


Fig. 31-12 Different types of bends made in press brakes.

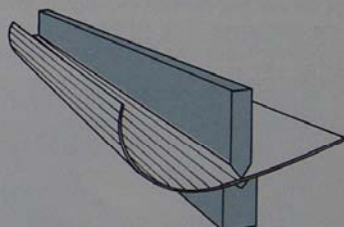
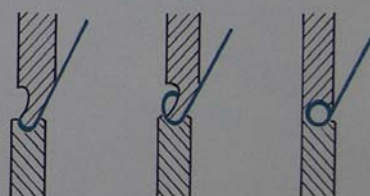


Fig. 31-13 A curvilinear shape bent in a press brake.



Step 1

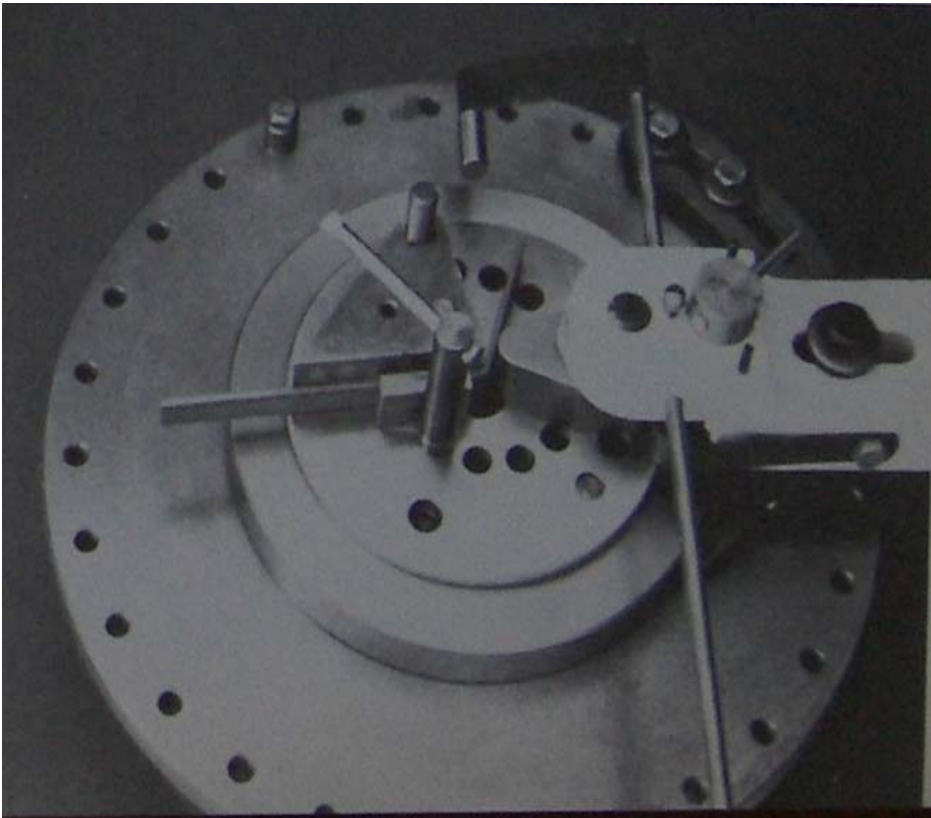
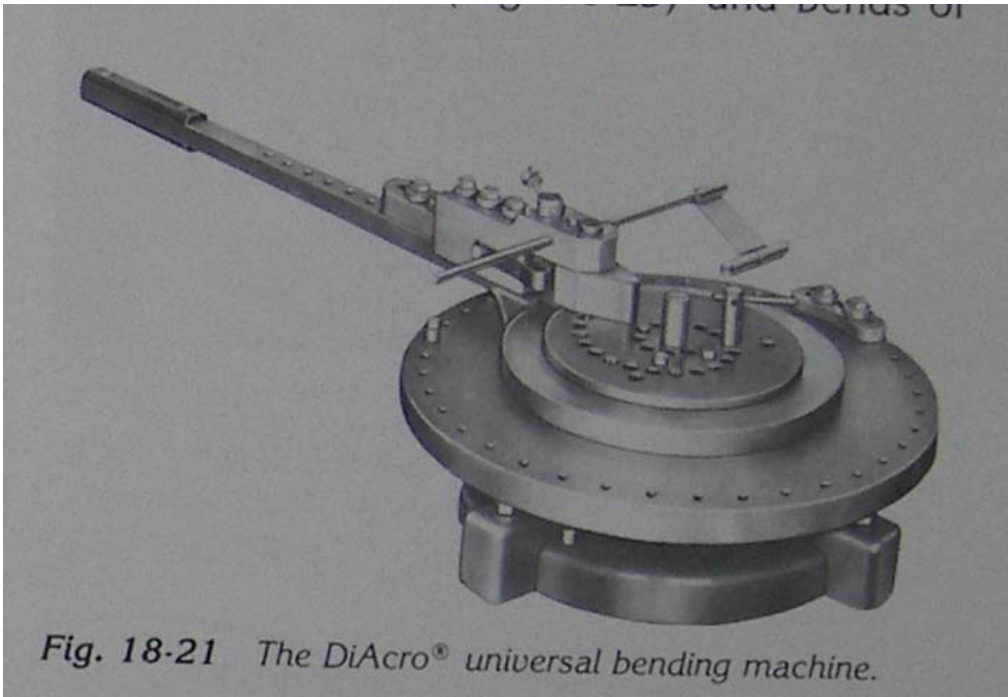
Step 2

Step 3

Fig. 31-14 The dies and sequence of bends used for forming a bead in a press brake.



Niagara Machine and Tool Works



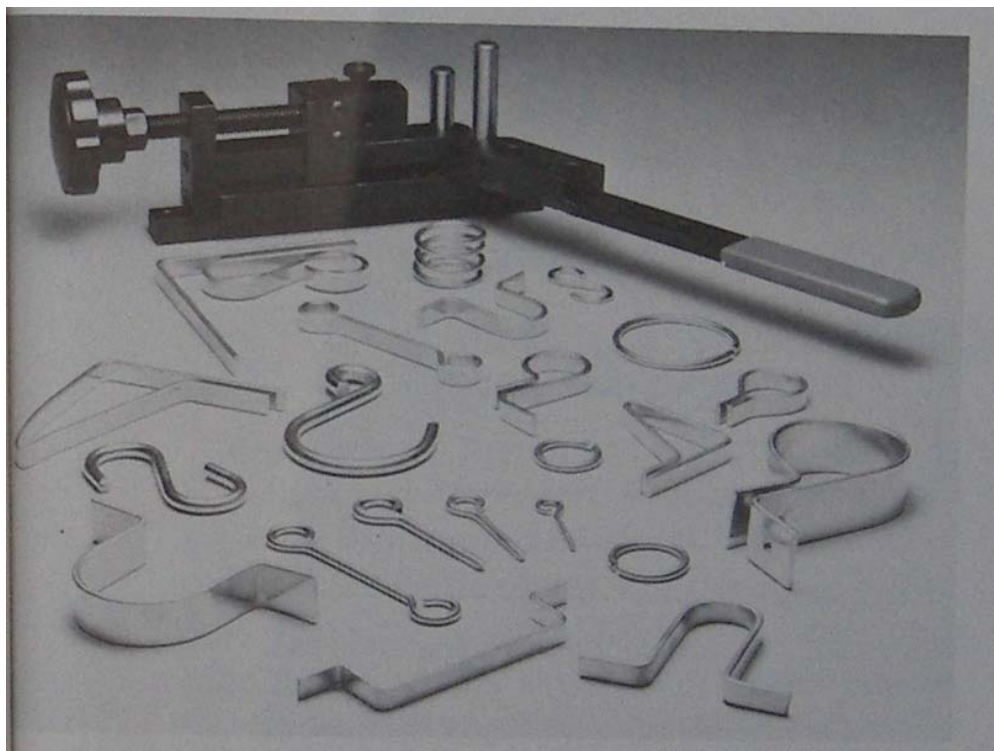
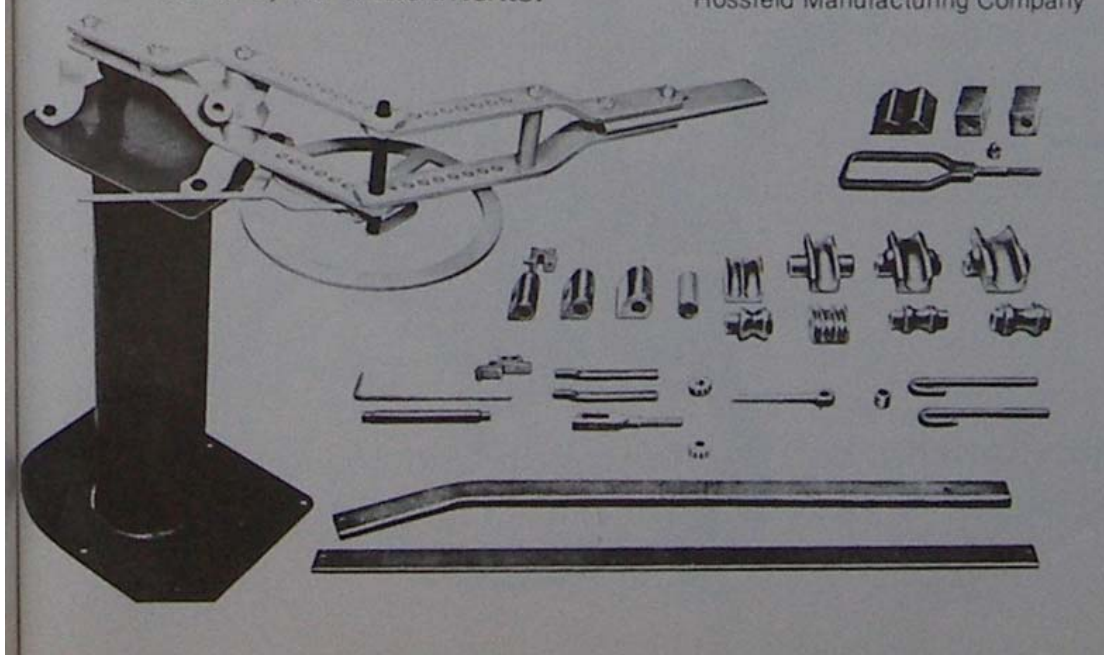
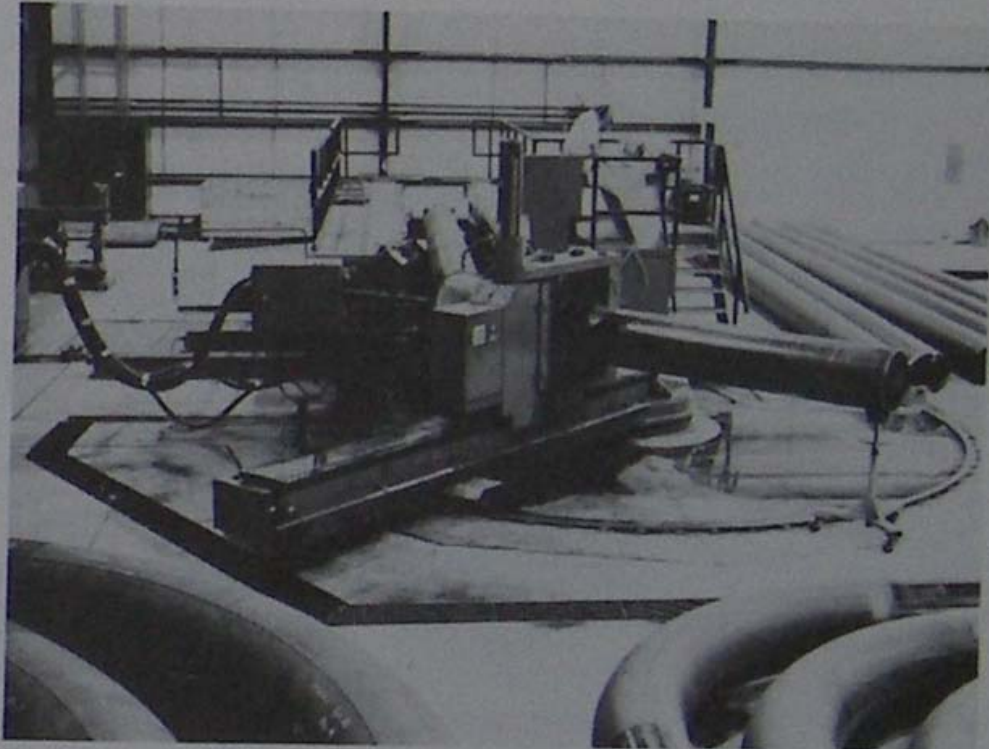


Fig. 18-20 The Hossfeld universal bending machine with some of its attachments.

Hossfeld Manufacturing Company

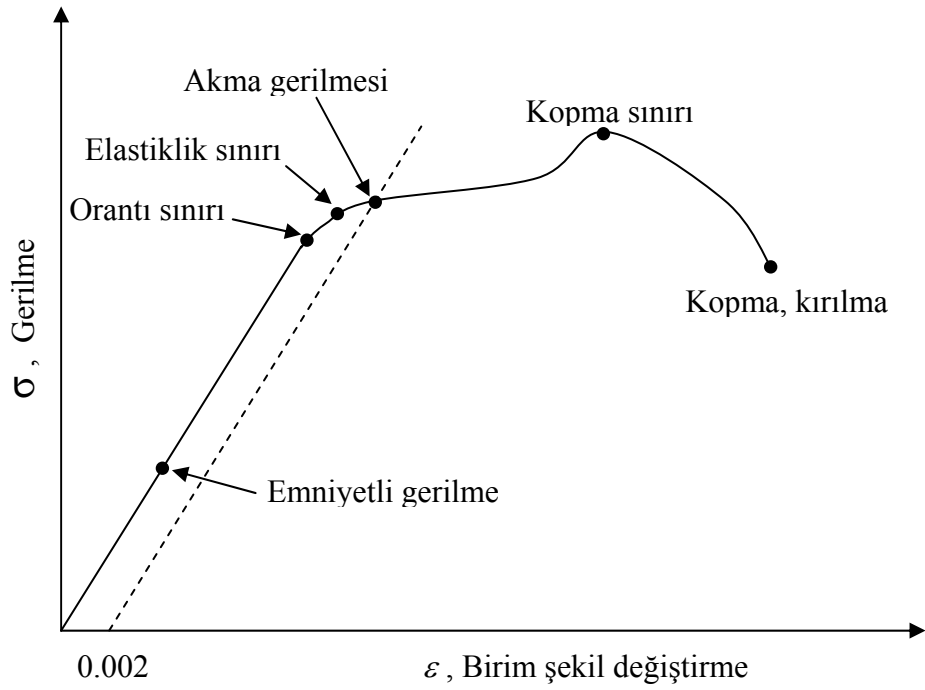




Johnson Controls

Fig. 18-22 This piping is being bent by an induction bending machine.

1.2 MUKAVEMET

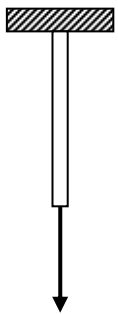


$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{Gerilme}$$

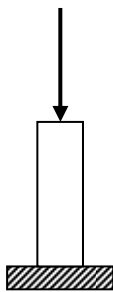
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{Birim şekil değiştirme (Uzama oranı)}$$

$$\text{emniyet katsayısı} = \frac{\text{Akma gerilmesi}}{\text{Emniyetli gerilme}}$$

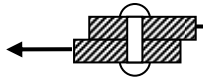
Çekme



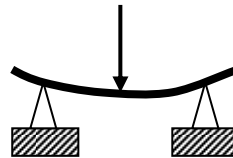
Basma



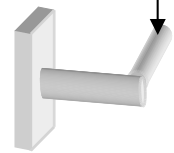
Kesme
(Makaslama)



Eğilme



Burulma



Burkulma



Parçaların zorlanma şekilleri

Basit Gerilmeler

Çekme..... $\sigma_c = \frac{F}{A}$

Basma..... $\sigma_b = -\frac{F}{A}$

Kesme..... $\tau_m = \frac{F}{A}$

Eğilme..... $\sigma_e = \frac{M_e}{W} \left(\sigma_1 = \frac{M_e}{W_1}, \sigma_2 = \frac{M_e}{W_2} \right)$

$W_1 = \frac{I}{e_1}, W_2 = \frac{I}{e_2}, \left(\text{emniyetli taşıma için } \sigma_1 \leq \sigma_{\text{çeki}}, |\sigma_2| \leq |\sigma_{\text{basi}}| \right)$

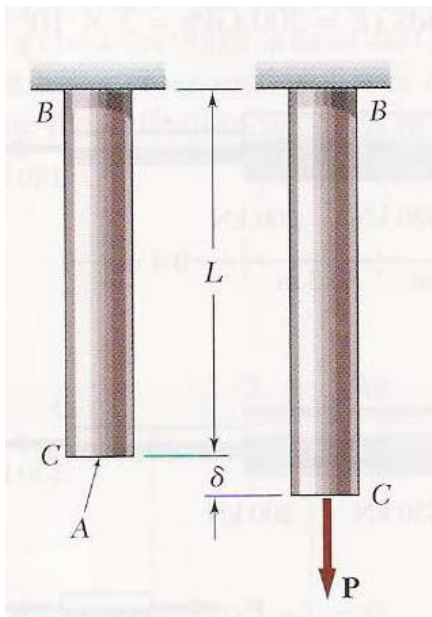
Burulma..... $\tau = \frac{M_b}{W_p}$

Dairesel kesitli paçalar için $W_p = \frac{I_p}{d/2} = \frac{\pi d^4 / 32}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$

Burada F kuvvet, A alan, M_e eğilme momenti, M_b burulma momenti, W kesitin mukavemet momenti, W_p kesitin polar mukavemet momenti, I tarafsız eksene göre atalet momenti, I_p kesitin merkezine göre atalet momenti, d dairenin çapı, e_1 kesitte tarafsız eksenden çekme gerilmeleri yönünde en uzak mesafe, e_2 kesitte tarafsız eksenden basma gerilmeleri yönünde en uzak mesafedir.

Basit Şekil Değişirmeler

Çekme ve Basma

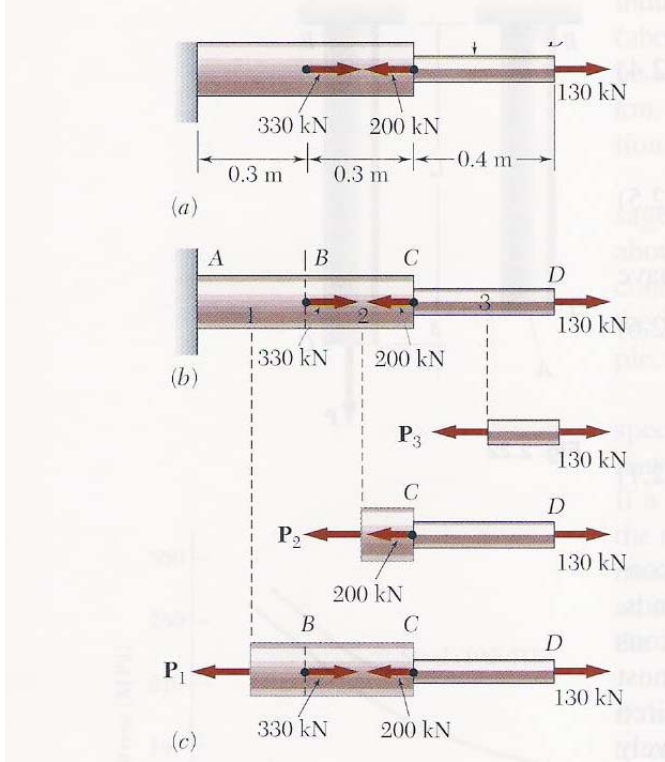


$$\sigma = E \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \varepsilon L, \quad \delta = \frac{PL}{AE}$$

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

$$\varepsilon = \frac{d\delta}{dx} \Rightarrow d\delta = \varepsilon dx = \frac{P dx}{AE} \Rightarrow \delta = \int_0^L \frac{P dx}{AE}$$



Verilen yükleme altındaki çubukta oluşan şekil değişimini bulunuz.

$$(E = 200 \text{ GPa} = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2)$$

$$L_1 = L_2 = 0.3 \text{ m}, \quad L_3 = 0.4 \text{ m}$$

$$A_1 = A_2 = 600 \text{ mm}^2, \quad A_3 = 200 \text{ mm}^2$$

P_1, P_2, P_3 iç kuvvetlerini bulmak için her bir parçadan geçen kesitler alınıp her bir kesilen para için serbest cisim diyagramları çizip denge denklemleri yazılabilir.

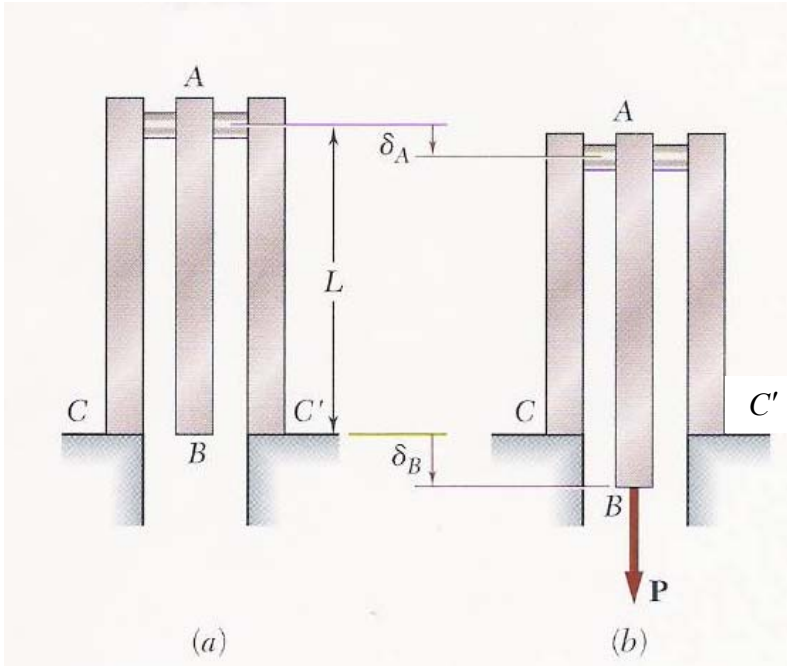
$$P_1 = 130 + 330 - 200 = 260 \text{ kN}$$

$$P_2 = 130 - 200 = -70 \text{ kN}$$

$$P_3 = 130 \text{ kN}$$

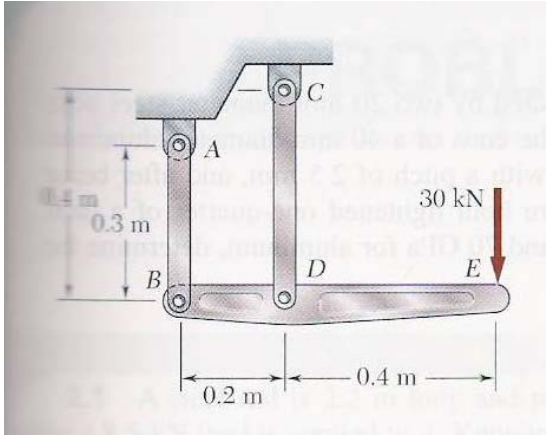
$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E} \left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3} \right)$$

$$\delta = \frac{1}{2 \times 10^5} \left(\frac{(260 \times 10^3) 300}{600} + \frac{(-70 \times 10^3) 300}{600} + \frac{(130 \times 10^3) 400}{200} \right), \quad \boxed{\delta = 1.775 \text{ mm}}$$



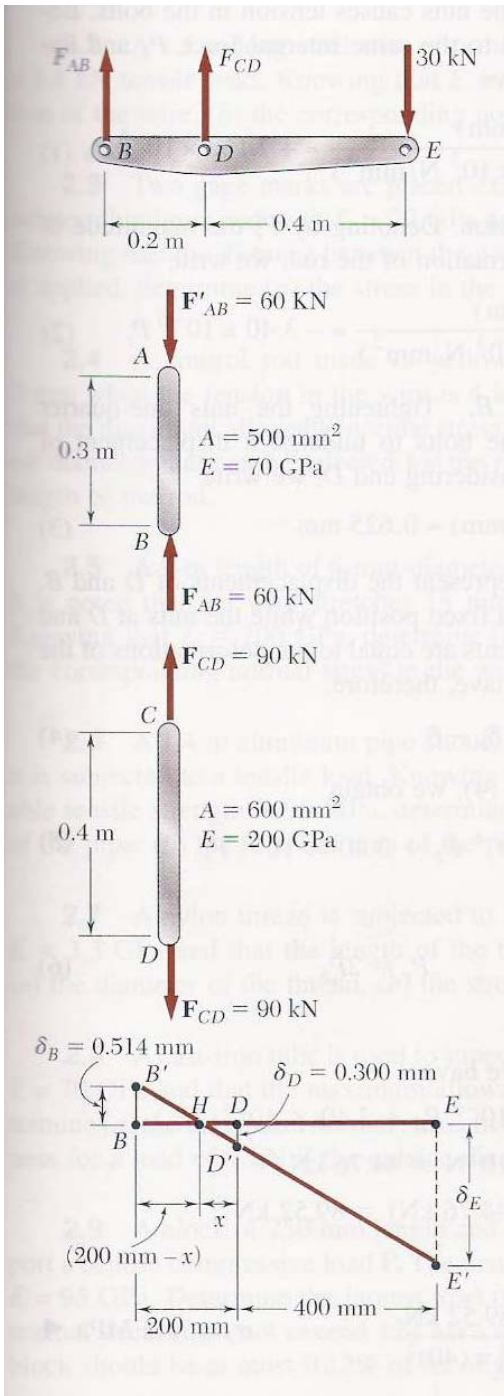
Şekilde üç tane L uzunluğundaki elastik çubuk, A'daki rijit bağlantı çubuğu ile birbirlerine bağlanmıştır. C ve C' deki rijit temellere yandaki iki çubuk dayanmaktadır. AB çubuğundaki boy uzaması, B'nin A'ya göre $\delta_{B/A}$ yer değiştirmesidir.

$$\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \frac{PL}{AE}$$



Rijit BDE kolu AB ve CD bağlantı çubukları ile desteklenmektedir. Kesit alanı 500 mm^2 olan AB bağlantısı Alüminyumdan ($E = 70 \text{ GPa}$), kesit alanı 600 mm^2 olan CD çubuğu çelikten ($E = 200 \text{ GPa}$) yapılmıştır. E ye uygulanan 30 kN şiddetindeki düşey doğrultudaki kuvvetten dolayı B, D ve E deki düşey yer değiştirmeleri (sehimleri) bulunuz.

Çözüm:



BDE kolu için serbest cisim diyagramı

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow -(30 \text{ kN})(0.6 \text{ m}) + F_{CD}(0.2 \text{ m}) = 0$$

$$F_{CD} = +90 \text{ kN} \quad F_{CD} = 90 \text{ kN} \text{ çekme}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \Rightarrow -(30 \text{ kN})(0.4 \text{ m}) + F_{AB}(0.2 \text{ m}) = 0$$

$$F_{CD} = -60 \text{ kN} \quad F_{AB} = 60 \text{ kN} \text{ Basma}$$

B deki sehim

AB çubuğundaki iç kuvvet bası olduğundan $P = -60 \text{ kN}$ dir.

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3 \text{ N})(0.3 \text{ m})}{(500 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(70 \times 10^9 \text{ Pa})}$$

$$\delta_B = -514 \times 10^{-6} \text{ m} \quad \boxed{\delta_B = 0.514 \text{ mm} \uparrow}$$

(Negatif işaret AB çubuğundaki kısalmayı gösterir.)

D deki sehim

CD çubuğundaki iç kuvvet çeki olduğundan $P = 90 \text{ kN}$ dir.

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3 \text{ N})(0.4 \text{ m})}{(600 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ Pa})}$$

$$\delta_D = 300 \times 10^{-6} \text{ m} \quad \boxed{\delta_D = 0.3 \text{ mm} \uparrow}$$

E deki sehim

B, D ve E nin yer değiştirmiş konumlarını B' , D' ve E' ile gösterelim. BDE kolu rijit olduğundan B' , D' ve E' aynı doğru üzerinde olur ve aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

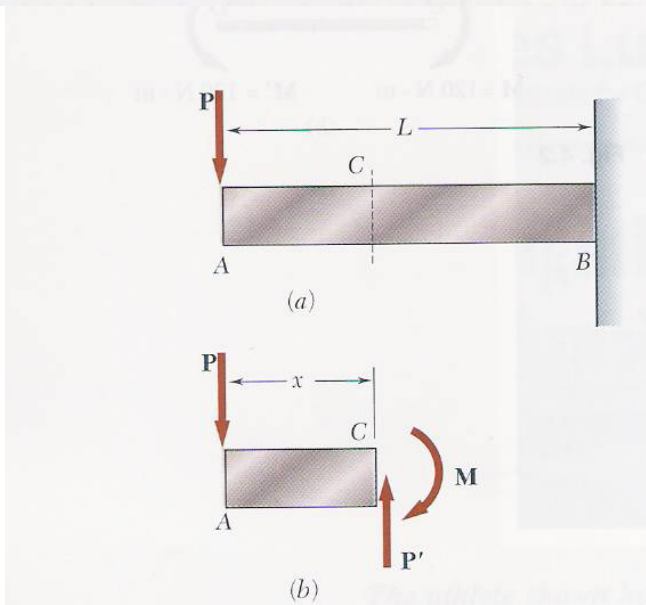
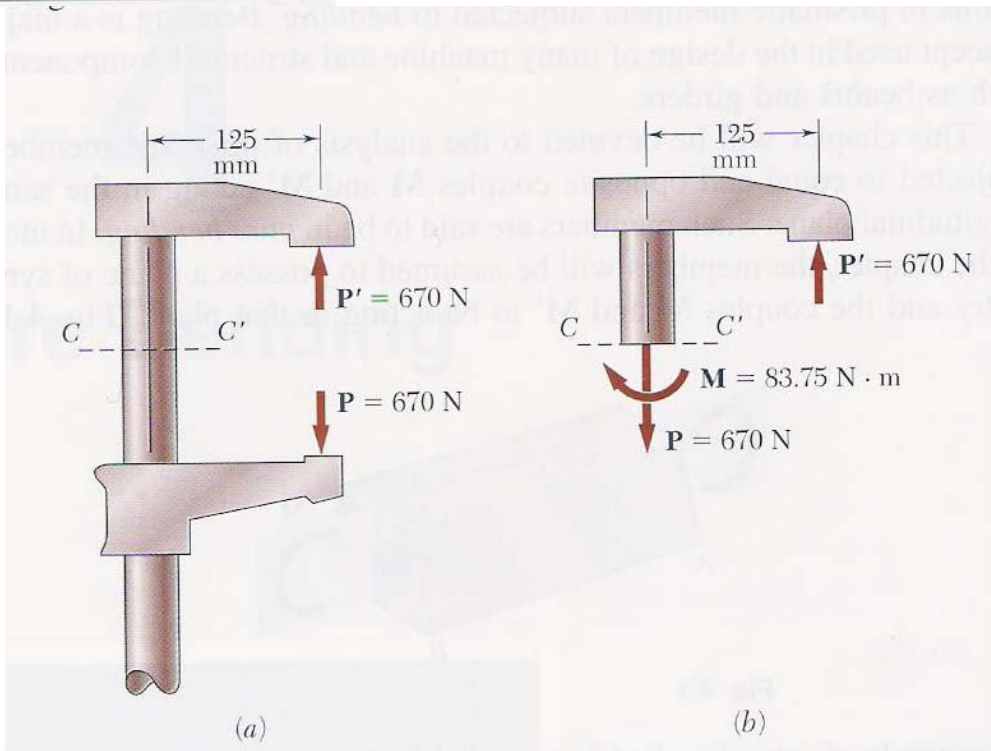
$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \quad \frac{0.514 \text{ mm}}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(200 \text{ mm}) - x}{x}$$

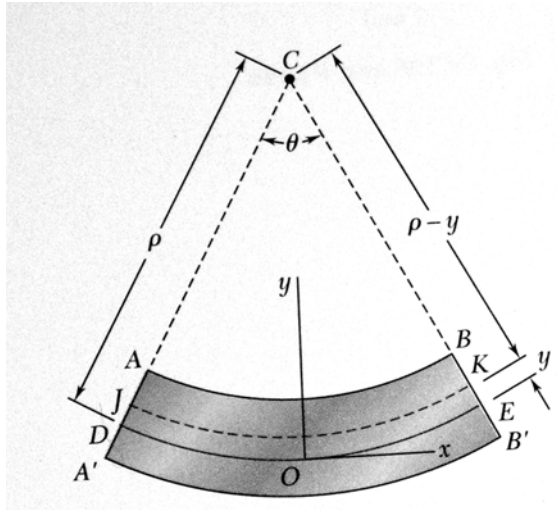
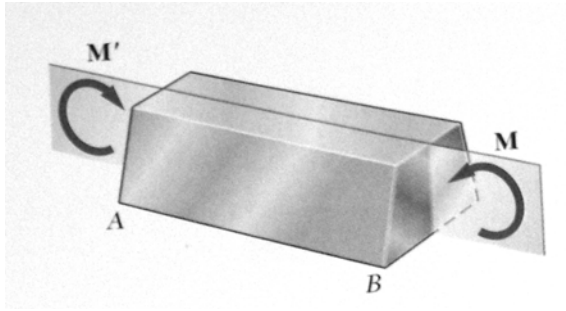
$$x = 73.7 \text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \quad \frac{\delta_E}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(400 \text{ mm}) + (73.7 \text{ mm})}{73.7 \text{ mm}}$$

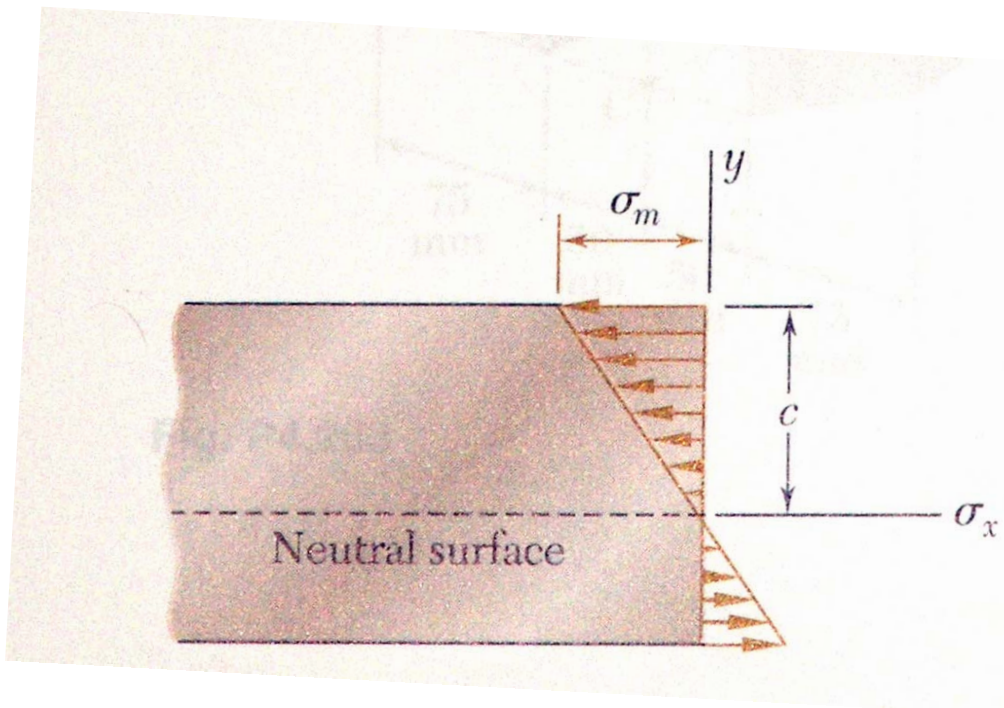
$$\boxed{\delta_E = 1.928 \text{ mm} \downarrow}$$

Eğilme





$$\epsilon_x = \frac{(\rho - y)\theta - \rho\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$



σ_m maksimum gerilme olduğundan

$$\sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_m$$

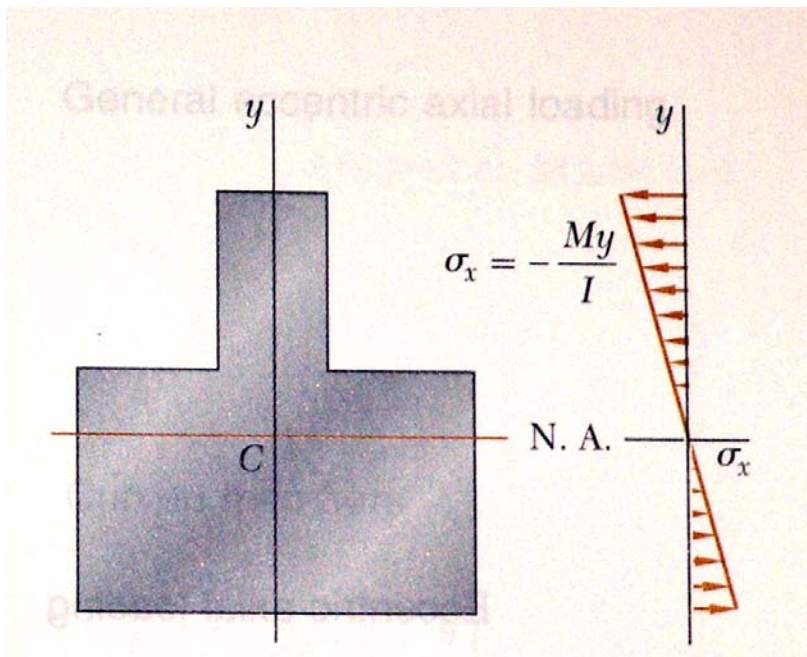
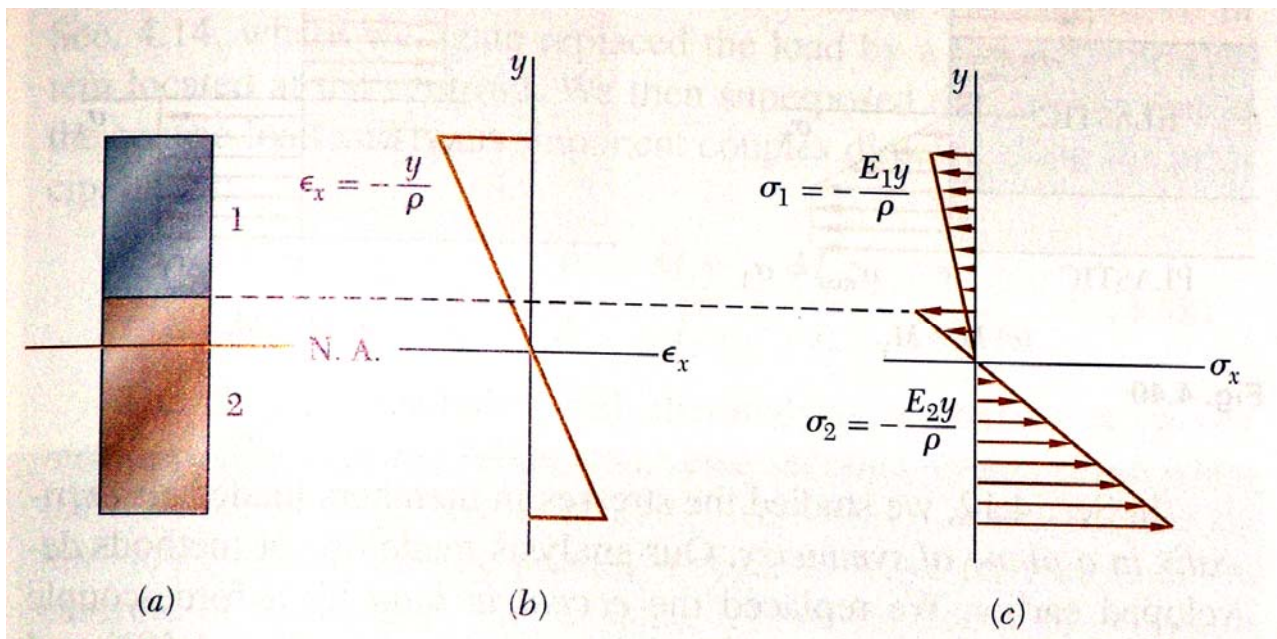
$$\sigma_m = \frac{Mc}{I}$$

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

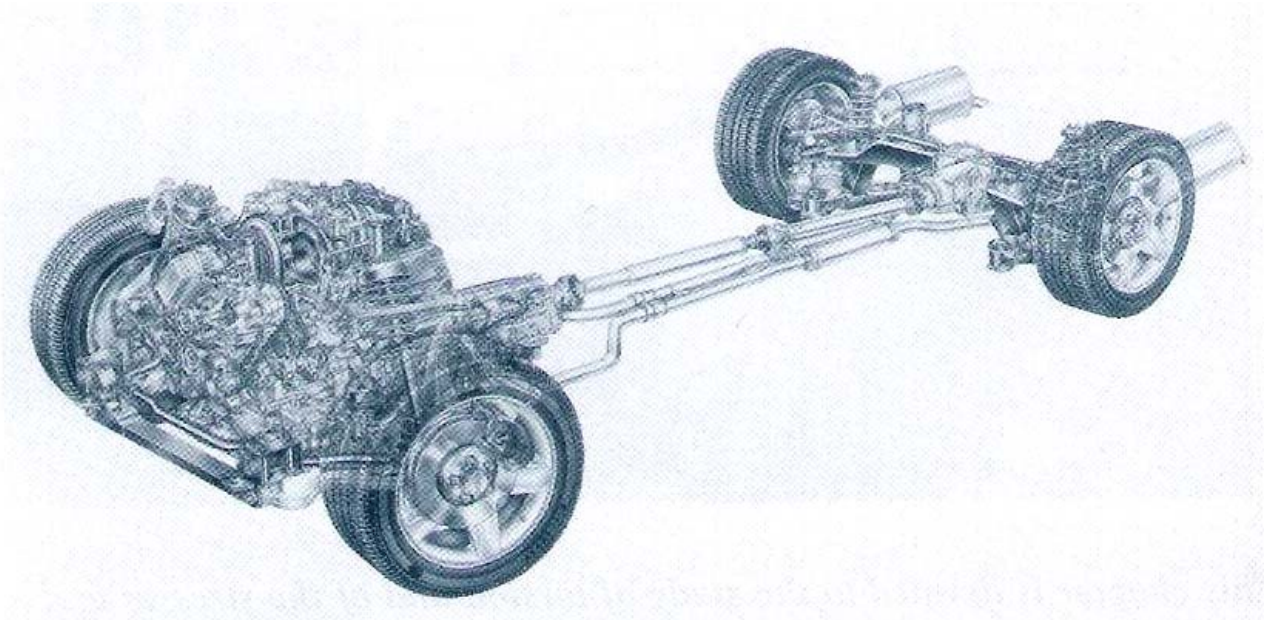
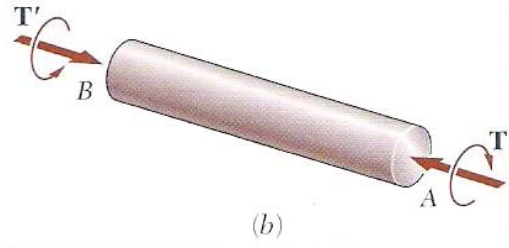
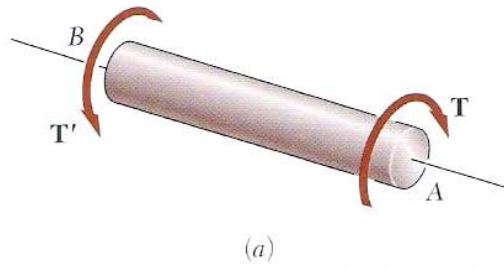
$S = \frac{I}{c}$ kesit mukavemet modülü

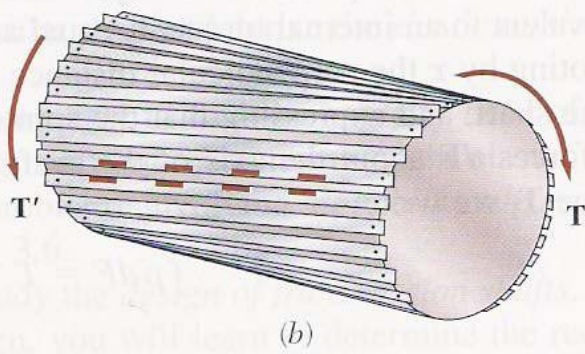
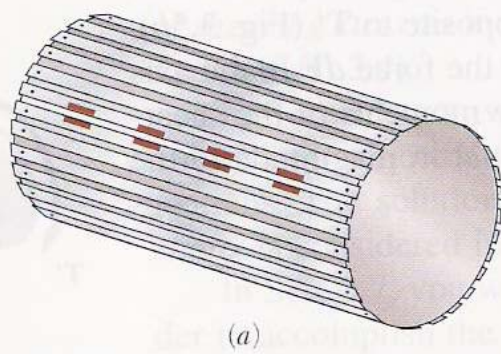
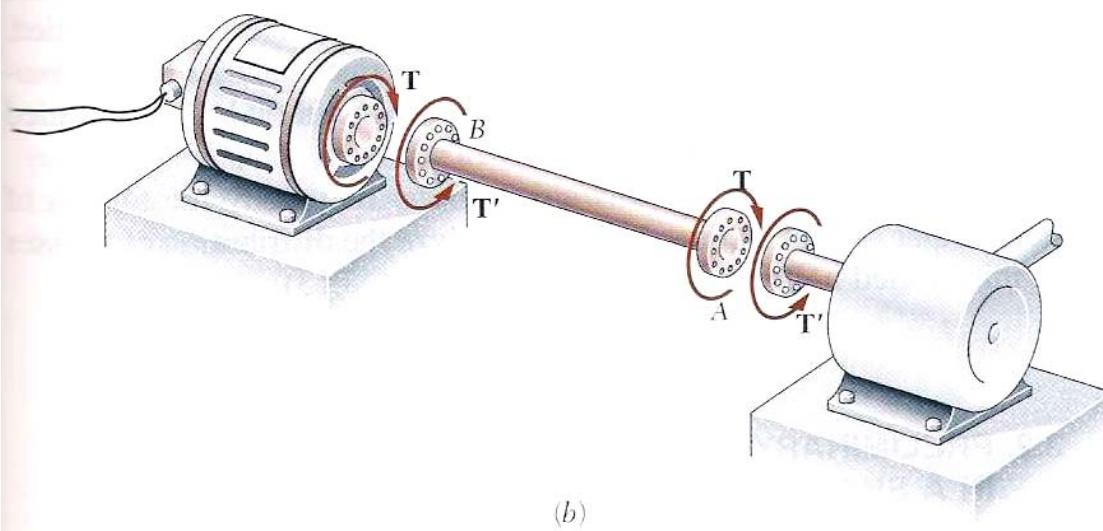
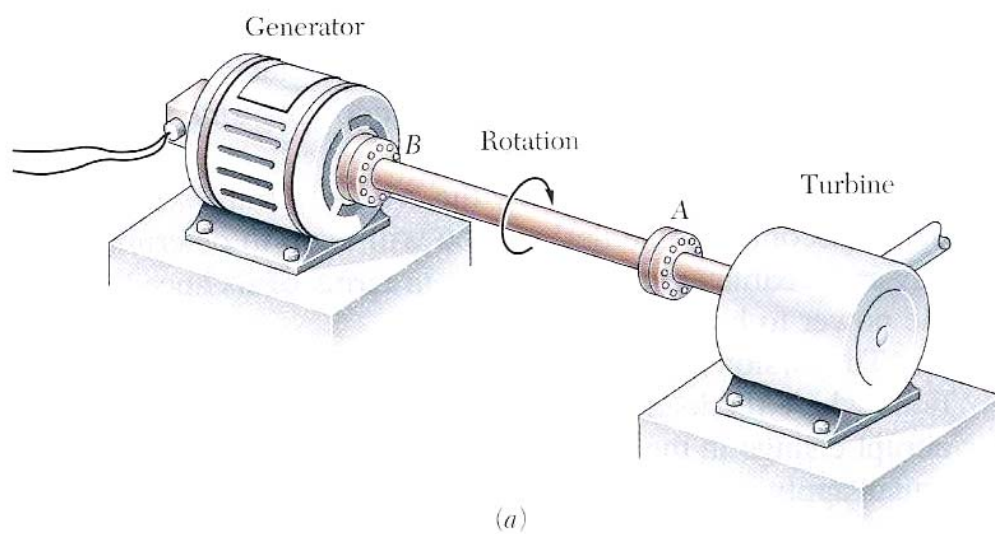
$$\sigma_m = \frac{M}{S}$$

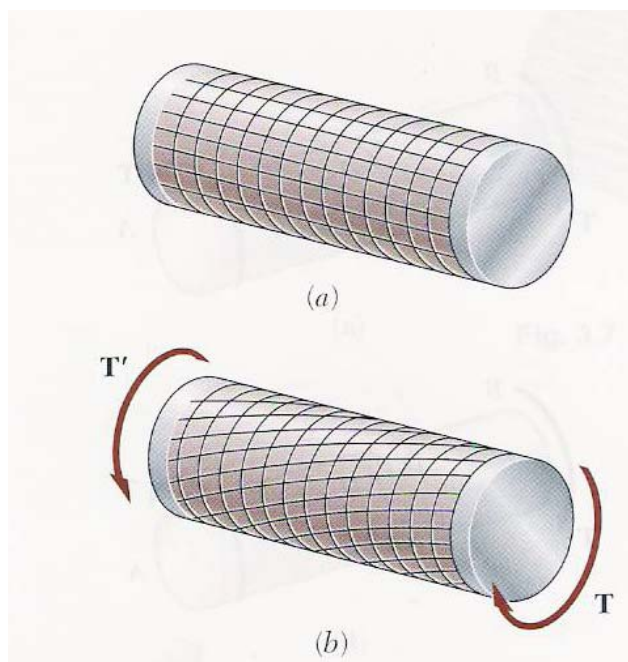
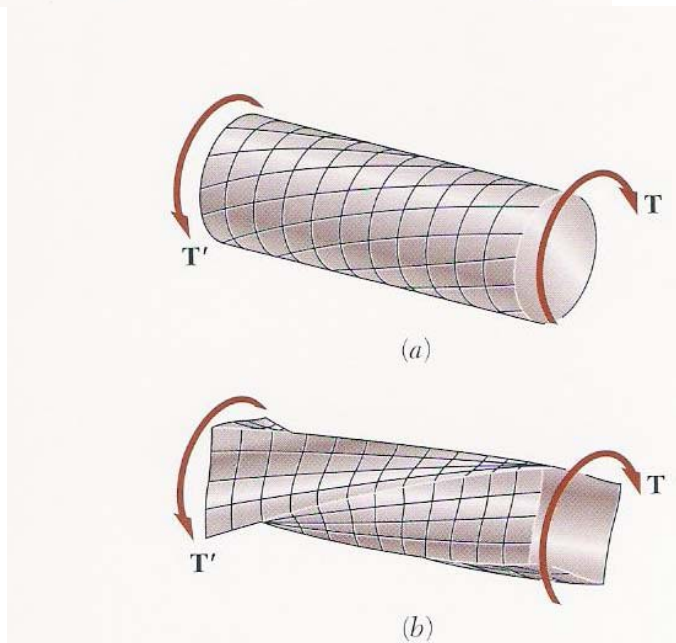
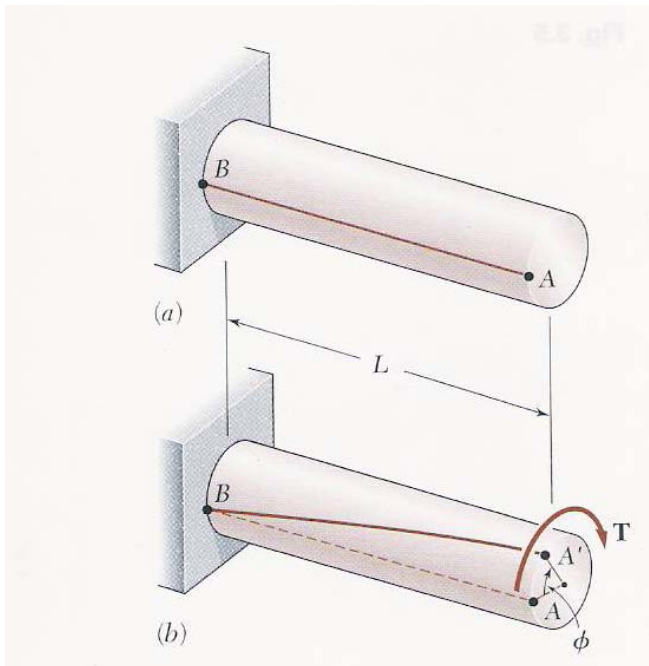
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

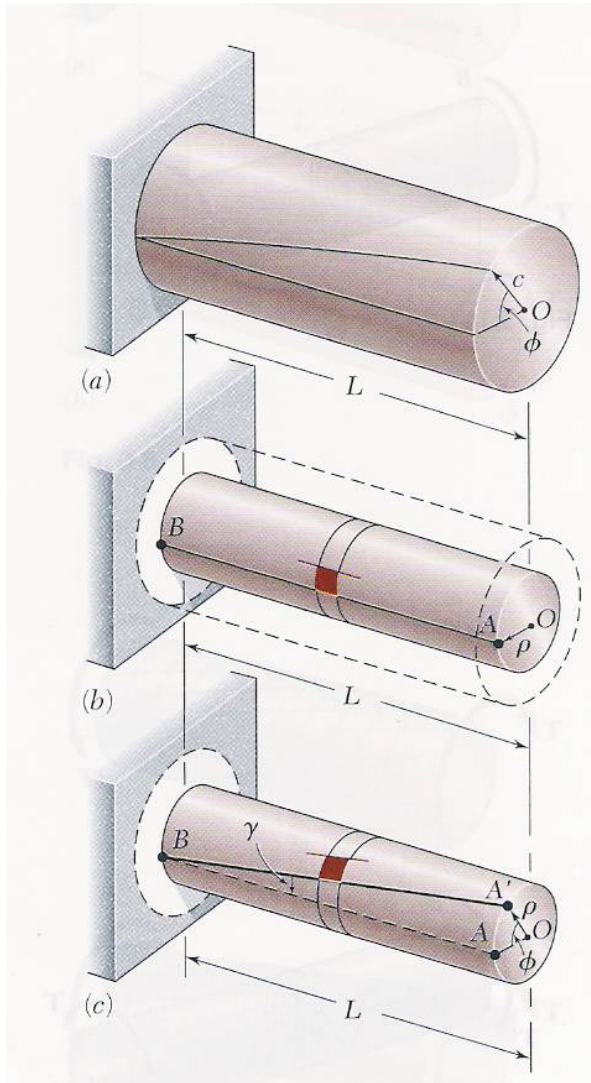


Burulma









$$\tau = G\gamma$$

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \Rightarrow \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\max}$$

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{\max}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}, \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

İçi dolu dairesel kesitli miller için

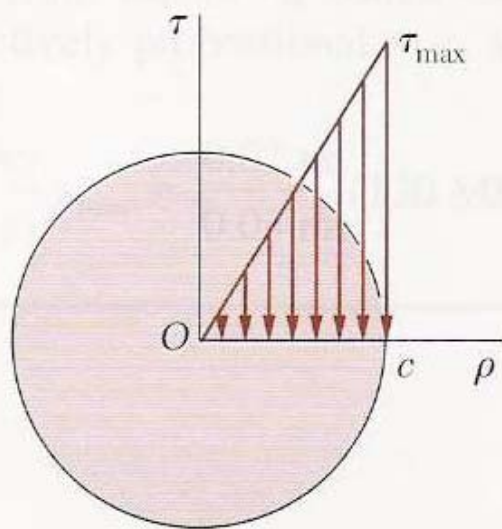
$$J = \frac{1}{2}\pi c^4$$

Aynı merkezli ve içinde dairesel delik bulunan kesitler için

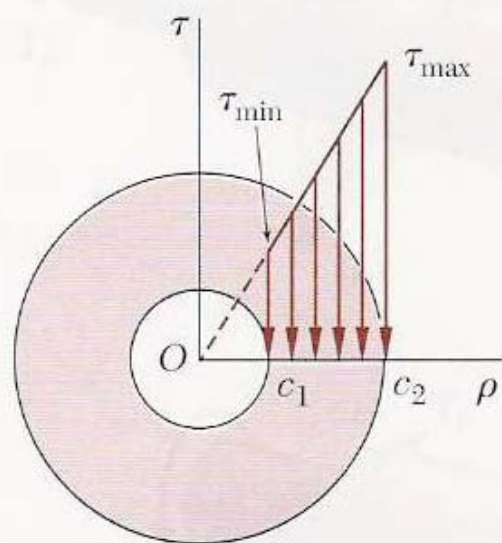
$$J = \frac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4)$$

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

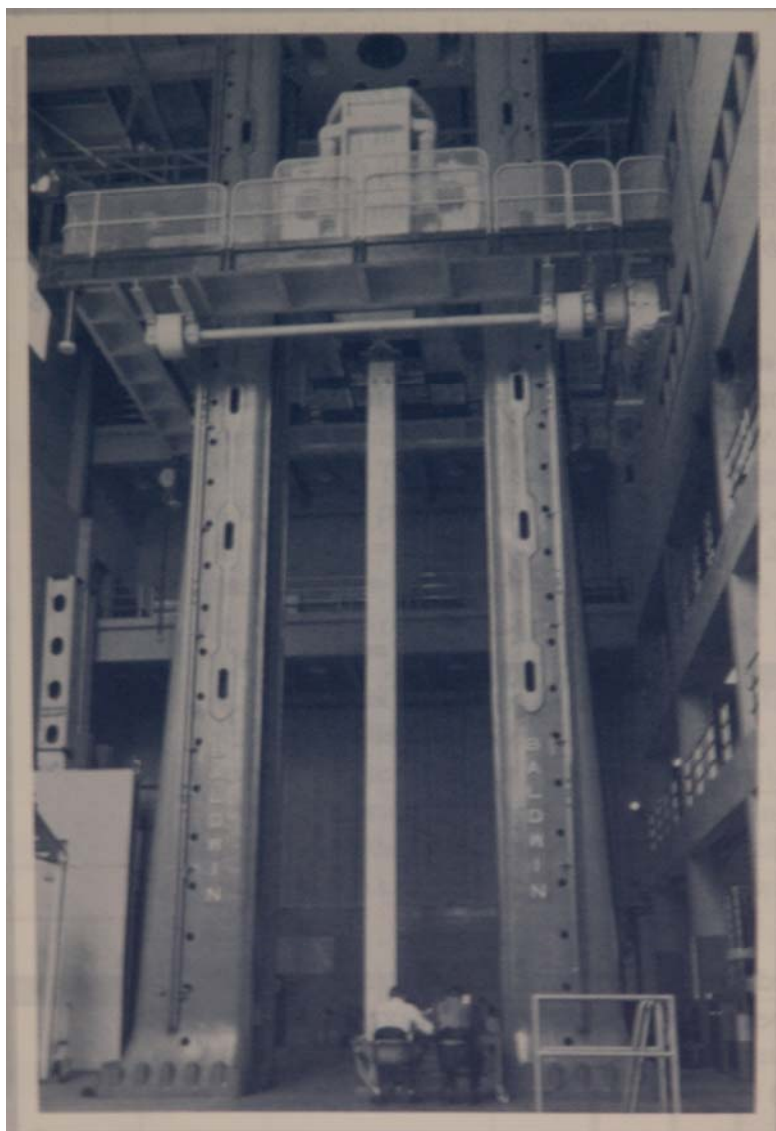


(a)

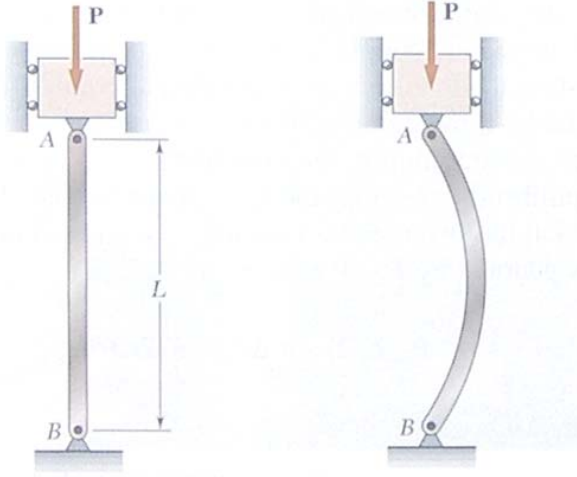


(b)

BURKULMA







Q noktasındaki eğilme momenti $M = -Py$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{Py}{EI}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0 \text{ ve } p^2 = \frac{P}{EI} \text{ kabulü ile}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = 0 \text{ şekline dönüşen dif. Denkl.}$$

Çözümü

$$y = A \sin px + B \cos px$$

$x = 0$ da $y = 0$ olduğundan $B = 0$ olur

$x = L$ de $y = 0$ konursa

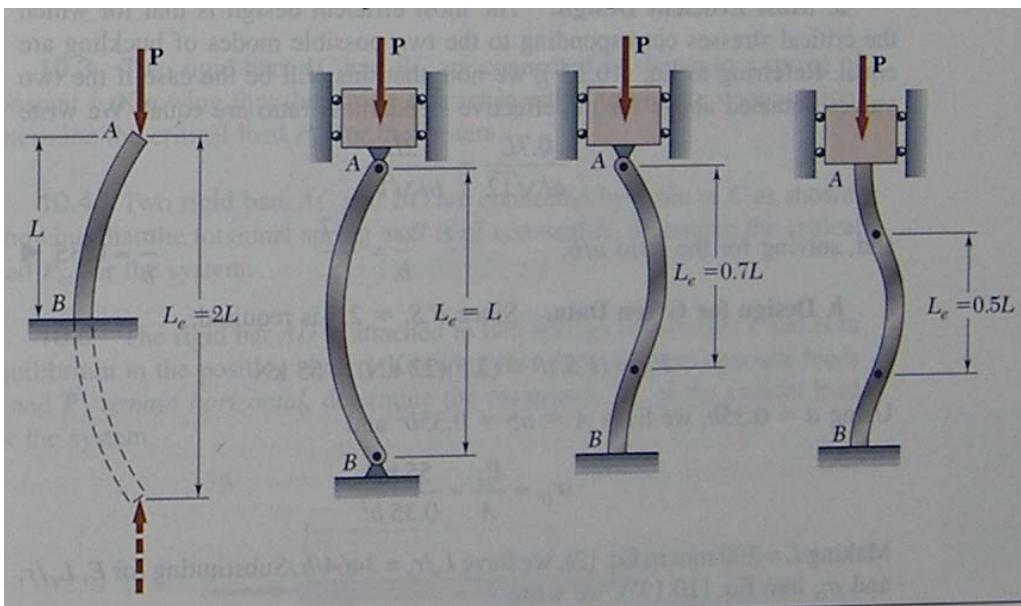
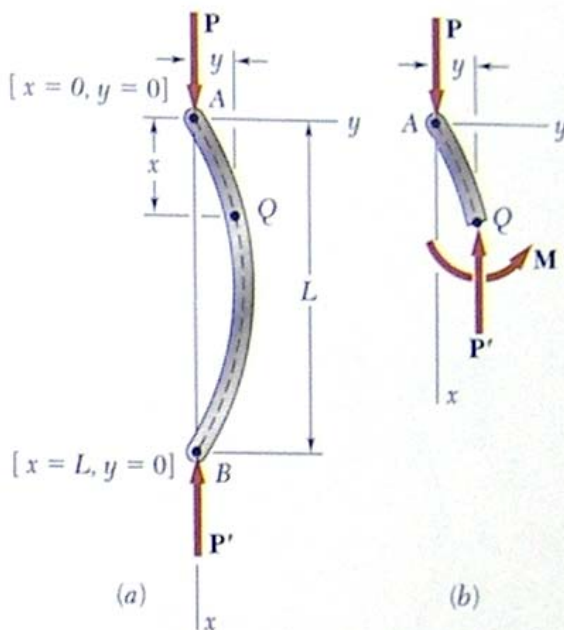
$A \sin pL = 0$ bulunur. Buradan

$$\sin pL = 0 \Rightarrow pL = n\pi \text{ veya}$$

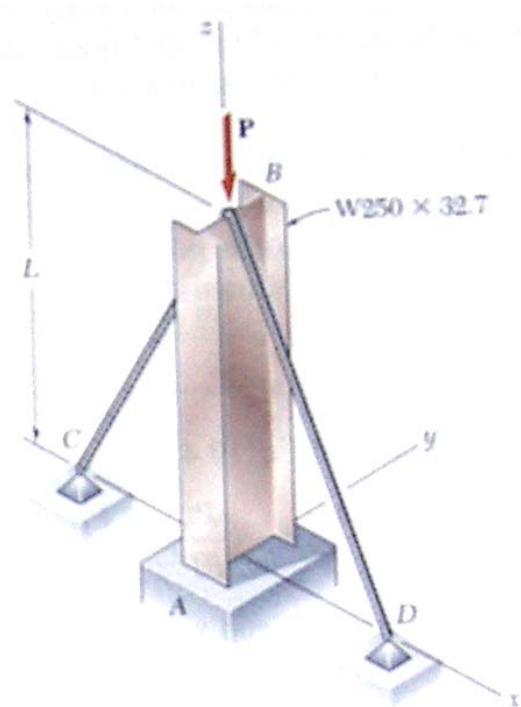
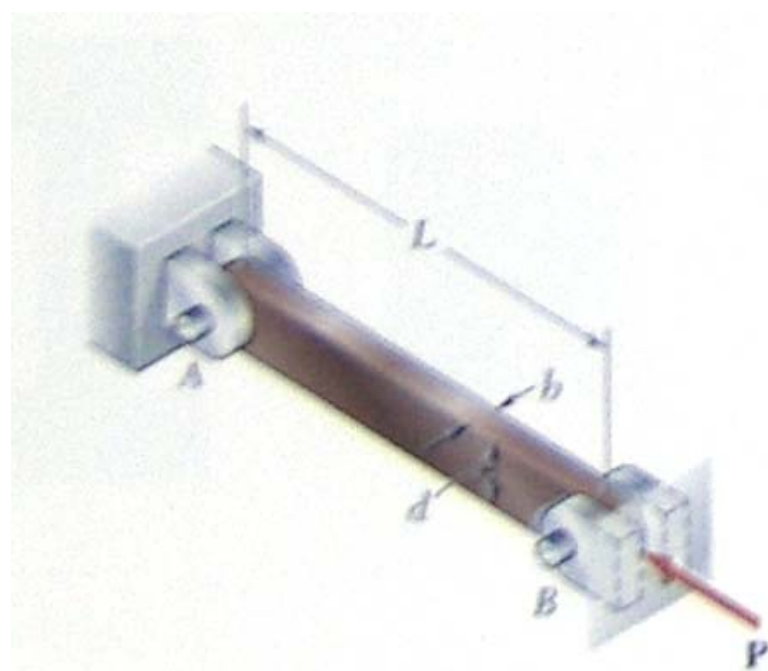
$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \text{ bulunur. Buradan } n = 1 \text{ için}$$

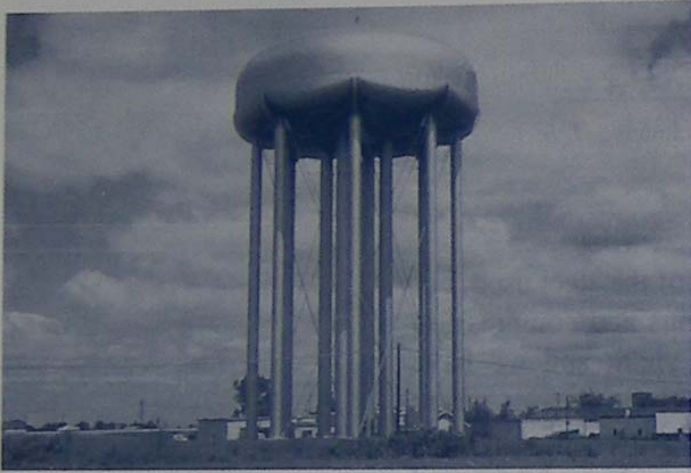
En küçük P elde edilir.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

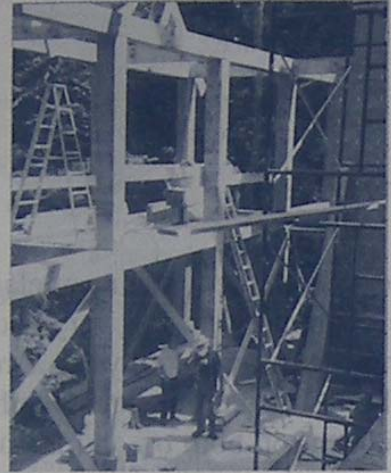


Çeşitli sınır koşullarında kolonun etkili uzunluğu





(a)



(b)

Fig. 10.27 The water tank in (a) is supported by steel columns and the building in construction in (b) is framed with wood columns.

DİNAMİK

MADDESEL NOKTANIN KİNEMATİĞİ

4.1 Kinematiğin temel kavramları

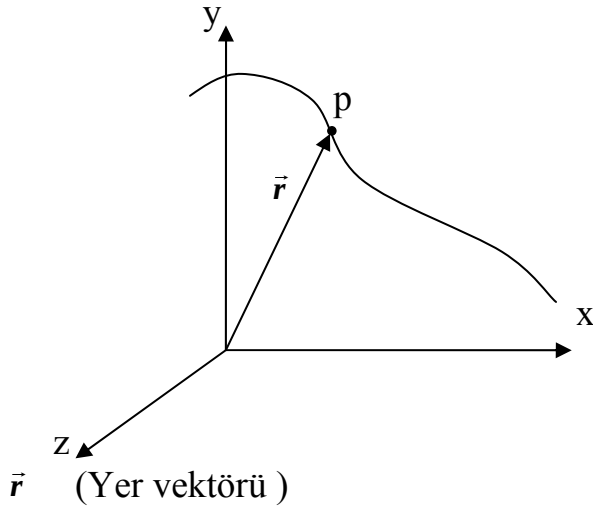
Yer vektörü : Bir maddesel noktanın bir mukayese cismine (koordinat sistemine) göre bulunduğu yere orijinden uzanan vektör.

Hız vektörü : Yer vektörünün zamana göre türevi

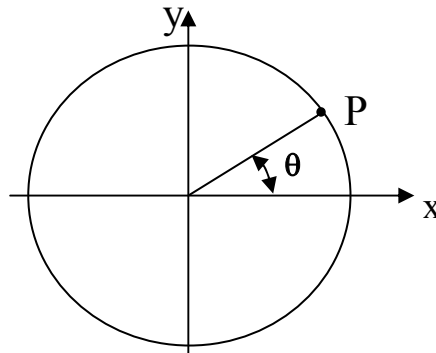
İvme vektörü: Hız vektörünün zamana göre türevi veya yer vektörünün zamana göre ikinci türevi

Aşılal hız: Aynı düzlemde hareket eden noktayı sabit bir noktaya bağlayan doğrunun aynı düzlemdeki sabit bir doğru ile yaptığı açının zamana göre türevi

Aşılal ivme: Aşılal hızın zamana göre türevi



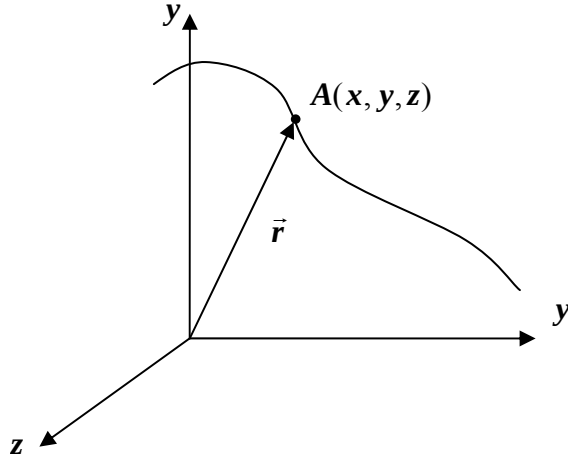
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{Hız Vektörü}) , \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (\text{İvme vektörü})$$



$$\theta = \theta(t) \quad (\text{Zamanı fonksiyonu olan aynı düzlemdeki açı})$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{Açısal hız}) , \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (\text{Açısal ivme})$$

4.2 Maddesel noktanın hareketinin kartezyen koordinat sisteminde incelenmesi



Bir maddesel noktanın hareketinde koordinatları

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

şeklinde ise yer, hız ve ivme vektörleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\vec{r} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$$

$$\vec{V} = \dot{x}(t) \vec{i} + \dot{y}(t) \vec{j} + \dot{z}(t) \vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}(t) \vec{i} + \ddot{y}(t) \vec{j} + \ddot{z}(t) \vec{k}$$

Burada değişkenlerin üzerindeki noktalar zamana göre türevi göstermektedir.

Problem 4.2.1

Bir maddesel nokta bir eğri üzerinde

$$x = 10\cos t, \quad y = 8\sin t, \quad z = 3t$$

bağıntılarına göre hareket etmektedir. $t = \frac{\pi}{6}$ için maddesel noktanın yer, hız ve ivme vektörlerini bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{r} = 10\cos t \vec{i} + 8\sin t \vec{j} + 3t \vec{k}, \quad \vec{V} = -10\sin t \vec{i} + 8\cos t \vec{j} + 3 \vec{k}$$

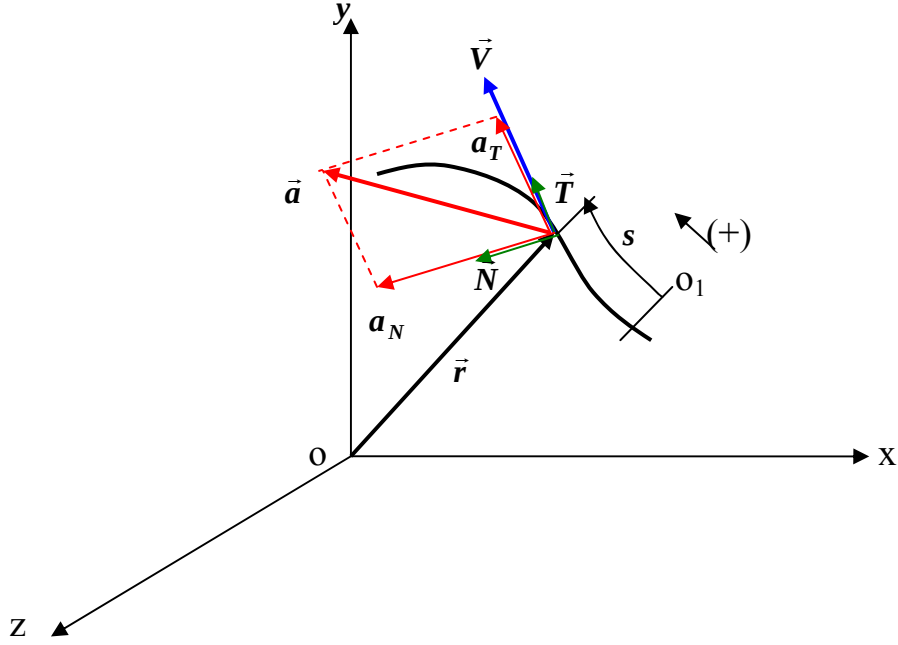
$$\vec{a} = -10\cos t \vec{i} - 8\sin t \vec{j}$$

$$t = \frac{\pi}{6} \text{ için } \vec{r} = 10\cos \frac{\pi}{6} \vec{i} + 8\sin \frac{\pi}{6} \vec{j} + 3 \frac{\pi}{6} \vec{k}, \quad \boxed{\vec{r} = 5\sqrt{3} \vec{i} + 4 \vec{j} + \frac{\pi}{2} \vec{k}}$$

$$\vec{V} = -10\sin \frac{\pi}{6} \vec{i} + 8\cos \frac{\pi}{6} \vec{j} + 3 \vec{k}, \quad \boxed{\vec{V} = -5 \vec{i} + 4\sqrt{3} \vec{j} + 3 \vec{k}}$$

$$\vec{a} = -10\cos\frac{\pi}{6}\vec{i} - 8\sin\frac{\pi}{6}\vec{j} , \quad \boxed{\vec{a} = -5\sqrt{3}\vec{i} - 4\vec{j}}$$

4.3 Maddesel noktanın hareketinin Doğal koordinat sisteminde incelenmesi



Daha önce formülleri çıkarılan doğal koordinat sistemindeki $\vec{P}$ vektörü yerine $\vec{r}$ yer vektörü u yerine t zaman değişkeni alınırsa aşağıdaki hız ve ivme ifadeleri elde edilir.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{T}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R}\vec{N}$$

Problem 4.3.1

Bir maddesel nokta bir eğri üzerinde $s = 2t^3 + 5t^2 - 4$ (Burada s metre , t saniye cinsindendir.) bağıntısına uygun olarak hareket etmektedir. $t = 1$ de maddesel noktanın bulunduğu yerin eğrilik yarıçapı $R = 5m$. olduğuna göre bu andaki hız ve ivme vektörlerini doğal koordinat sisteminde hesaplayınız.

Çözüm:

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{T} , \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R}\vec{N}$$

$$\frac{ds}{dt} = 6t^2 + 10t , \quad \frac{d^2s}{dt^2} = 12t + 10$$

$$t = 1 \text{ de } \frac{ds}{dt} = 16 \quad \frac{d^2s}{dt^2} = 22$$

$$\boxed{\vec{V} = 16\vec{T}} \quad , \quad \vec{a} = 22\vec{T} + \frac{(16)^2}{5}\vec{N} \quad , \quad \boxed{\vec{a} = 22\vec{T} + 51,2\vec{N}}$$

Problem 4.3.2

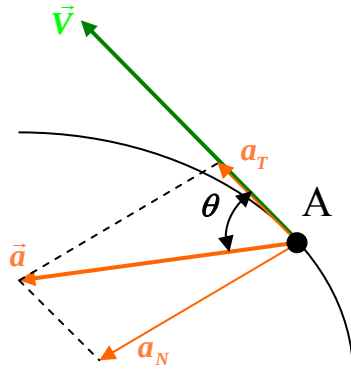
Bir maddesel nokta bir eğri üzerinde hareket ederken bir t anında hız ve ivme vektörlerinin kartezyen koordinatlardaki bileşenleri

$$\vec{V} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \quad , \quad \vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

olduğuna göre bu an için hız ve ivme vektörlerinin doğal koordinat sistemindeki ifadelerini ve eğri üzerinde bulunduğu noktanın eğrilik yarıçapını bulunuz.

(Uzunluklar metre zaman saniye cinsindendir)

Çözüm:



$$|\vec{V}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} \quad , \quad |\vec{V}| = 7 \text{ m/s} \quad , \quad \boxed{\vec{V} = 7\vec{T}}$$

$$\vec{V} \bullet \vec{a} = |\vec{V}| |\vec{a}| \cos \theta \quad , \quad |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} \quad , \quad |\vec{a}| = 5 \text{ m/s}^2$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{V} \bullet \vec{a}}{|\vec{V}| |\vec{a}|} \quad , \quad \cos \theta = \frac{6 \cdot 3 - 2 \cdot 4}{7 \cdot 5} \quad , \quad \cos \theta = \frac{10}{35} \Rightarrow \theta = 73,4^\circ$$

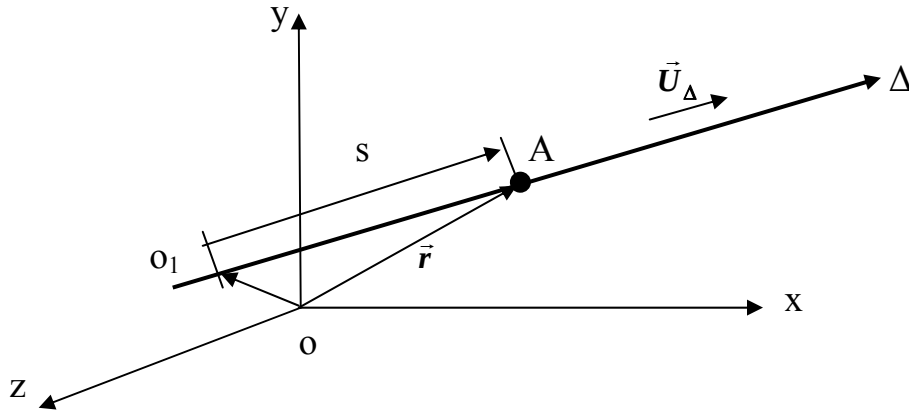
$$a_T = |\vec{a}| \cos \theta = 1,43 \text{ m/s}^2 \quad , \quad a_N = |\vec{a}| \sin \theta = 4,79 \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{\vec{a} = 1,43\vec{T} + 4,79\vec{N}}$$

$$a_N = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_N} \quad , \quad R = \frac{49}{4,79} \quad , \quad \boxed{R = 10,23 \text{ m}}$$

4.4 Maddesel noktanın doğrusal hareketi

Maddesel noktanın yörüngesi bir koordinat sistemine göre doğru şeklinde ise maddesel noktanın bu koordinat sistemine göre yaptığı harekete doğrusal hareket denir.



Maddesel noktanın yörüngesi olan bu doğru üzerinde keyfî bir başlangıç noktası ve yön seçilebilir. Buradaki s A da bulunan maddesel noktayı doğru üzerindeki başlangıç noktasına göre alınan ölçüdür.

Burada maddesel noktanın konumunu gösteren $\vec{r}$ yer vektörü

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A} \quad \text{şeklinde yazılabilir. } \overrightarrow{O_1A} = s \vec{U}_\Delta \quad \text{olduğundan}$$
$$\vec{r} = \overrightarrow{OO_1} + s \vec{U}_\Delta \quad \text{olur.}$$

Hız vektörü $\vec{V} = \frac{ds}{dt} \vec{U}_\Delta$

İvme vektörü $\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{U}_\Delta$

Bu elde edilen hız ve ivme vektörleri aynı doğrultuda olduğundan önce şiddetleri hesaplanıp sonra vektör formuna kolayca getirilir.

Doğrusal hareketi için aşağıdaki skaler denklemler kullanılır.

$$V = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dV}{dt}, \quad a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

ve ayrıca $V = \frac{ds}{dt}$ den çekilen $dt = \frac{ds}{V}$ eşitliği $a = \frac{dV}{dt}$ denklemine

yerleştirilirse

$$a = \frac{VdV}{ds}$$

denklemleri elde edilir. Bu elde edilen 4 adet denklemden doğrusal harekete ait problemler çözülmeye çalışılır.

4.5.1 Sabit hızlı doğrusal hareket

Bir doğrusal hareketteki hız V sabit ise aşağıdaki işlemler yapılabilir.

$$a = \frac{dV}{dt} \text{ den}$$

$a = 0$ bulunur. Ve

$V = \frac{ds}{dt}$ den $ds = V dt$ yazılıp V sabit olduğu için kolayca integre ederek

$$\int_{s_0}^s ds = V \int_0^t dt \Rightarrow s = s_0 + V t$$

sabit hızlı doğrusal harekete ait konum zaman bağıntısı bulunur.

Problem 4.5.1.1

Bir maddesel nokta bir doğru üzerinde $V = 6 \text{ m/s}$ sabit hızı ile hareket ettiğine göre $t = 0$ da $s = 8 \text{ m}$ olduğuna göre 5 inci saniyedeki konumunu bulunuz.

Çözüm:

$s = s_0 + V t$ konum zaman denkleminde

$t = 5$ deki konum t yerine 5 yazarak bulunur.

$$s = 8 + 6 * 5, \quad \boxed{s = 38 \text{ m}}.$$

4.5.2 Sabit ivmeli doğrusal hareket

Bir doğrusal hareketteki ivme a sabit ise aşağıdaki işlemler yapılabilir.

$$a = \frac{dV}{dt} \text{ den } dV = a dt \text{ yazıp integre ederek}$$

$$\int_{V_0}^V dV = a \int_0^t dt \Rightarrow V = V_0 + a t$$

hız zaman bağıntısı elde edilir.

$V = \frac{ds}{dt}$ den $ds = (V_0 + a t) dt$ yazıp integre ederek

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (V_0 + a t) dt \Rightarrow s = s_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

konum-zaman bağıntısı elde edilir.

Ayrıca $a = \frac{VdV}{ds}$ bağıntısından yazılan $ds = \frac{1}{a} V dV$ bağıntısı integre edilirse

$$\int_{s_0}^s ds = \frac{1}{a} \int_{V_0}^V V dV \Rightarrow s = s_0 + \frac{1}{2a} (V^2 - V_0^2)$$

konum-hız bağıntısı elde edilir.

Problem 4.5.2.1 Bir maddesel nokta bir doğru üzerinde $a = 3 \text{ m/s}^2$ sabit ivmesi ile hareket ettiğine göre $t = 0$ da konumu $s = 8 \text{ m}$ ve hızı $V = 4 \text{ m/s}$ olduğuna göre 5 inci saniyedeki konumunu bulunuz.

Çözüm:

$$s = s_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{konum zaman denkleminde}$$

$t = 7 \text{ s.}$ deki konum t yerine 7 yazarak bulunur.

$$s = 8 + 4 * 7 + \frac{1}{2} 3 * 7^2, \quad \boxed{s = 109,5 \text{ m}}.$$

4.5.3 $a = f(t)$ İvme zamanın fonksiyonu şeklinde verilmiş ise

$a = \frac{dV}{dt}$ den elde edilen $dV = a dt$ denklemde a yerine $f(t)$ yazıp integre edilirse

$$dV = f(t) dt \Rightarrow \int_{V_0}^V dV = \int_0^t f(t) dt$$

$$V = V_0 + \int_0^t f(t) dt$$

hız –zaman bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıdaki V hızı yerine $\frac{ds}{dt}$ yazıp düzenlendikten sonra integre edilirse

$$\frac{ds}{dt} = V_0 + \int_0^t f(t) dt \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_0^t [V_0 + \int_0^t f(t) dt] dt$$

$$s = s_0 + \int_0^t [V_0 + \int_0^t f(t) dt] dt$$

konum-zaman bağıntısı elde edilir. Burada s_0 ve V_0 Başlangıç değerleridir.

Problem 4.5.3.1 Bir maddesel nokta bir doğru $a = 2t + 3$ ivme zaman bağıntısı ile hareket ediyor. $t = 0$ da konum $s = 4 \text{ m.}$ ve hız $V = -10 \text{ m/s.}$ olduğuna göre $t = 6$ daki konumu ve hızı hesaplayınız.

Çözüm:

$a = \frac{dV}{dt}$ den $dV = a dt$ yazılabilir. Burada a yerine $2t + 3$ yazıp integre edilirse

$$\int_{V_0}^V dV = \int_0^t (2t + 3) dt \Rightarrow V = V_0 + t^2 + 3t$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde V_0 yerine -10 konursa

$V = t^2 + 3t - 10$ Hız-zaman denklemi elde edilir. Burada t yerine 6 yazılırsa

$$\boxed{V = 29 \text{ m/s}}$$
 bulunur.

$V = \frac{ds}{dt}$ den $ds = V dt$ yazılabilir. Burada V yerine $t^2 + 3t - 10$ yazıp integre

edilirse

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (t^2 + 3t - 10) dt$$

$$s = s_0 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 10t$$

denklemi elde edilir. Burada s_0 yerine 4 yazılırsa

$$s = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 10t + 4$$

konum-zaman denklemi elde edilir. Burada t yerine 6 yazılırsa

$$\boxed{s = 70 \text{ m}}$$

bulunur.

4.5.4 $a = f(s)$ İvme konumun fonksiyonu şeklinde verilmiş ise

a yerine $\frac{VdV}{ds}$ veya $\frac{d^2s}{dt^2}$ yazıp denklem düzenlendikten sonra integre ederek hız-konum veya konum-zaman denklemleri bulunur.

Problem 4.5.4.1

Bir maddesel nokta bir doğru üzerinde $a = 12s^{1/2}$ ivme -konum bağıntısı ile hareket

ediyor. $t = 0$ da konum $s = 0$ ve hız $V = 0$ olduğuna göre

$t = 2$ deki konumu hızı ve ivmeyi hesaplayınız.

Çözüm:

a yerine $\frac{VdV}{ds}$ yazıp elde edilen

$$\frac{VdV}{ds} = 12s^{1/2} \text{ denklemi}$$

$V dV = 12s^{1/2} ds$ şeklinde düzenlenip integre edilirse

$$\int_0^V V dV = \int_0^s 12s^{1/2} ds \Rightarrow \frac{1}{2}V^2 = 12 \frac{1}{3/2} s^{3/2} \Rightarrow V = 4s^{3/4} \text{ denklemi elde edilir.}$$

Bu denklemde V yerine $\frac{ds}{dt}$ yazıp elde edilen $\frac{ds}{dt} = 4s^{3/4}$

denklemi $\frac{ds}{4s^{3/4}} = dt$ şeklinde yazılıp integre edilirse

$$\int_0^s \frac{1}{4} s^{-3/4} ds = \int_0^t dt \Rightarrow s^{1/4} = t \Rightarrow s = t^4, V = 4t^3, a = 12t^2$$

$$t = 2 \text{ de } s = 16m, V = 32m/s, a = 48m/s^2$$

4.5.5 $a = f(V)$ İvme hızın fonksiyonu şeklinde verilmiş ise

a yerine $\frac{dV}{dt}$ veya $\frac{VdV}{ds}$ yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{dV}{dt} = f(V) \Rightarrow dt = \frac{dV}{f(V)}$$

$$\frac{VdV}{ds} = f(V) \Rightarrow ds = \frac{VdV}{f(V)}$$

Bu son eşitlikler integre edilirse hız-zaman ve konum-hız denklemleri bulunur.

Problem 4.5.5.1 Bir maddesel nokta bir doğru üzerinde $a = -0,2V^2$ ivme –hız bağıntısı ile hareket ediyor. $t = 0$ da konum $s = 0$ ve hız $V = 20m/s$ olduğuna göre $t = 2$ deki konumu, hızı ve ivmeyi hesaplayınız.

Çözüm:

a yerine $\frac{dV}{dt}$ yazarak elde edilen

$$\frac{dV}{dt} = -0,2V^2 \text{ denklemi } dt = -5 \frac{dV}{V^2} \text{ şeklinde düzenlenip integre edilirse}$$

$$\int_0^t dt = -5 \int_{20}^V \frac{dV}{V^2} \Rightarrow t = \frac{5}{V} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{V} = t + \frac{1}{4} \Rightarrow V = \frac{5}{t + \frac{1}{4}}$$

$V = \frac{20}{1 + 4t}$ denklemi elde edilir. Bu denklemde V yerine $\frac{ds}{dt}$ yazarak

$\frac{ds}{dt} = \frac{20}{1+4t}$ elde edilen denklem $ds = \frac{20}{1+4t} dt$ şeklinde düzenlenip integre edilirse $\int_0^s ds = \int_0^t \frac{20}{1+4t} dt \Rightarrow s = 5 \ln(1+4t)$ konum-zaman bağıntısı elde edilir.

$t = 2$ de $s = 11 \text{ m}$, $V = 2,22 \text{ m/s}$, $a = -0.2 V^2$, $a = -0.2(2,22)^2$

$$a = -0,988 \text{ m/s}^2$$

4.5.6 $a = -kV$ Bağıntısına uygun doğrusal hareket (geri tepmeyi azaltma)

Burada k pozitif reel sayı

$a = \frac{VdV}{ds}$ de a yerine $-kV$ yazılıp $-kV = \frac{VdV}{ds}$ elde edilen denklem

$dV = -kds$ şeklinde düzenlendikten sonra integre edilirse

$$\int_{V_0}^V dV = -k \int_{s_0}^s ds \Rightarrow V = V_0 - k(s - s_0)$$

hız-konum bağıntısı elde edilir. Elde edilen bağıntıda V yerine $\frac{ds}{dt}$ yazılırsa

$\frac{ds}{dt} = V_0 - ks + ks_0$ bağıntısı elde edilir. Eğer hız-konum bağıntısında $s_0 = 0$

alınabilirse $\frac{ds}{dt} = V_0 - ks$ şekline gelen denklem $\frac{ds}{V_0 - ks} = dt$ şeklinde

düzenlenip integre edilirse

$$\int_0^s \frac{ds}{V_0 - ks} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{k} \ln \frac{V_0 - ks}{V_0} = t \Rightarrow V_0 - ks = V_0 e^{-kt}$$

$s = \frac{V_0}{k}(1 - e^{-kt})$ konum-zaman bağıntısı elde edilir.

4.5.7 $a = -ks$ Bağıntısına uygun doğrusal hareket (serbest titreşim hareketi)

Burada k pozitif reel sayı

$a = -ks$ denkleminde a yerine $\frac{d^2s}{dt^2}$ yazılırsa

$\frac{d^2s}{dt^2} + ks = 0$ ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemi

elde edilir. Bu denklemin çözüm fonksiyonu olarak

$$s = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

önerilirse diferansiyel denklemi sağladığı görülür. Burada $\omega = \sqrt{k}$ dır. A ve B sabitleri ise başlangıç koşulları aşağıdaki denklemlerde yerine konarak bulunur.

$$s = A \cos \omega t + B \sin \omega t , \quad V = -A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t$$

Eğer $t = 0$ daki s ve V biliniyorsa aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$s_0 = A \cos \omega t, \quad V_0 = B \omega \cos \omega t \quad \text{bunlardan} \quad A = s_0 \quad \text{ve} \quad B = \frac{V_0}{\omega}$$

Böylece $s = s_0 \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t$ Denklemi elde edilir.

$s = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ denklemi

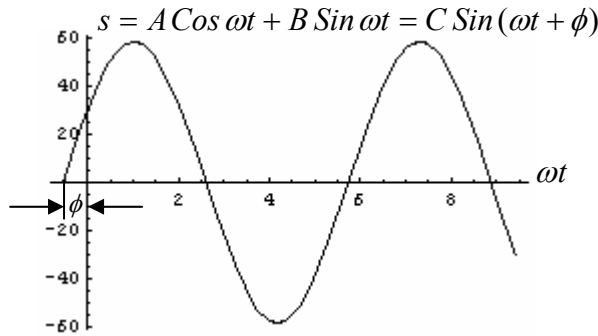
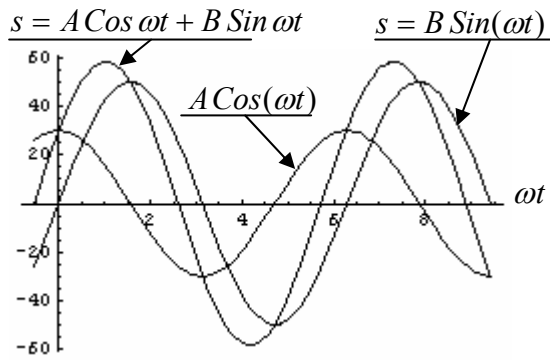
$A = C \sin \phi$, $B = C \cos \phi$ eşitlikleri kullanılarak

$$s = C \sin \phi \cos \omega t + C \cos \phi \sin \omega t$$

$s = C \sin (\omega t + \phi)$ şeklinde yazılabilir.

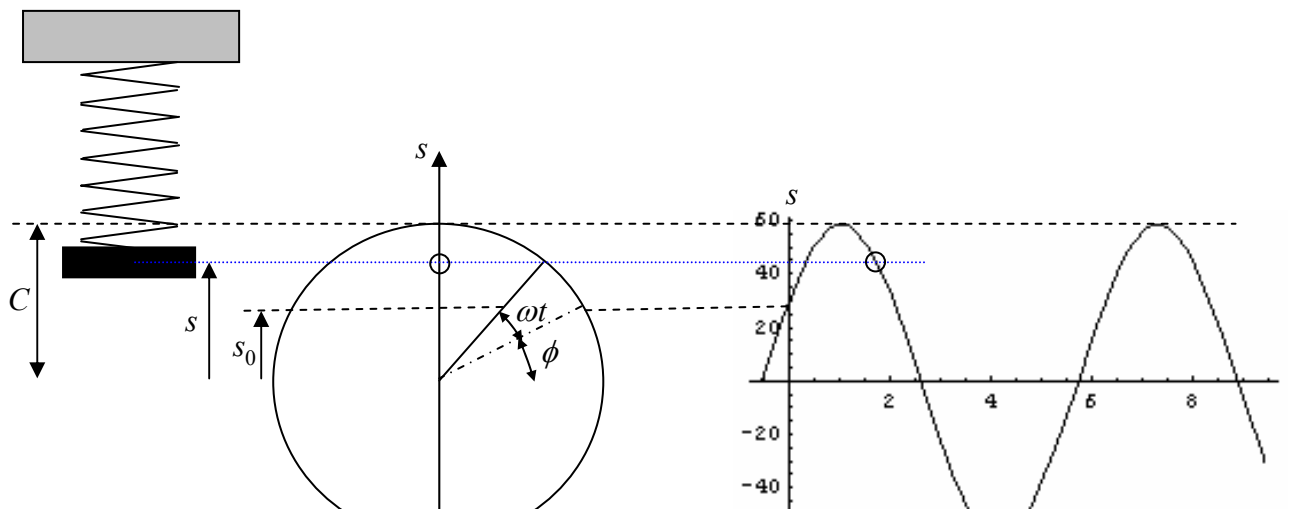
Burada $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\phi = \text{Arc tan } \frac{A}{B}$ dır. Eğer fonksiyonun $s - \omega t$ grafiği

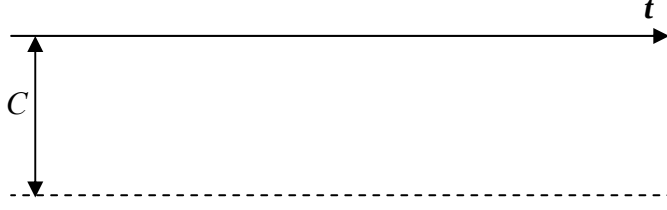
çizilirse buradaki eğri $\sin \omega t$ eğrisinden ϕ faz farkı kadar geriden başlar .



Yukarıdaki grafikler $A = 30\text{mm}$, $B = 50\text{mm}$, $C = \sqrt{30^2 + 50^2} = 58,3\text{mm}$

$\phi = \text{Arc tan } \frac{30}{50} = 0,54 \text{ Rad.}$, için çizilmiştir.





Problem 4.5.7.1 Bir maddesel nokta bir doğru üzerinde $a = -\frac{\pi^2}{36}s$ ivme –konum bağıntısı ile hareket ediyor. $t = 0$ da konum $s = 10$ ve hız $V = 4 \text{ m/s}$ olduğuna göre $t = 2$ deki konumu, hızı ve ivmeyi hesaplayınız.

Çözüm:

$a = -\frac{\pi^2}{36}s$ denkleminde a yerine $\frac{d^2s}{dt^2}$ yazılırsa

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\pi^2}{36}s = 0$$

ikinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$s = A \cos \frac{\pi}{6}t + B \sin \frac{\pi}{6}t$ şeklindedir. Buradan

$V = -\frac{\pi}{6}A \sin \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}B \cos \frac{\pi}{6}t$ Hız-zaman bağıntısı elde edilir.

$t = 0$ daki konum $s = 10$ ve hız $V = 4 \text{ m/s}$ denklemlerde yerine konursa

$A = 10$ ve $B = \frac{24}{\pi}$ elde edilir. Bu bulunan değerler konum-zaman ve hız-

zaman denklemlerinde yerine konursa

$$s = 10 \cos \frac{\pi}{6}t + \frac{24}{\pi} \sin \frac{\pi}{6}t$$

$$V = -10 \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6}t + \frac{24}{\pi} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}t, \quad V = -5 \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}t + 4 \cos \frac{\pi}{6}t$$

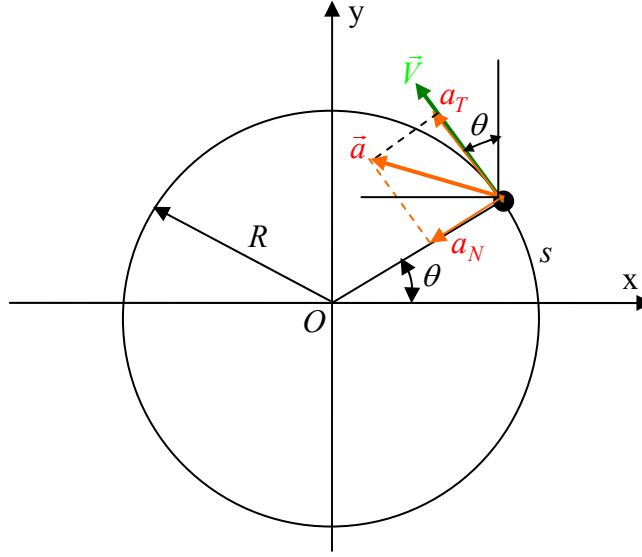
denklemleri elde edilir. Burada t yerine 2 yazılırsa $t = 2$ deki konum ve hız değerleri elde edilir.

$$s = 10 \cos \frac{\pi}{3} + \frac{24}{\pi} \sin \frac{\pi}{3}, \quad s = 5 + \frac{12}{\pi} \sqrt{3}, \quad \boxed{s = 11,62 \text{ m}}.$$

$$V = -5 \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} + 4 \cos \frac{\pi}{3}, \quad V = -5 \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + 2, \quad \boxed{V = 6,53 \text{ m/s}}, \quad \boxed{a = -3,19 \text{ m/s}^2}.$$

4.6 Maddesel noktanın çembersel hareketi

Maddesel noktanın bir koordinat sistemine göre yörüngesi çember veya çember parçası şeklinde ise bu tür harekete çembersel hareket denir.



Hız ve ivme vektörlerinin doğal koordinat sistemindeki ifadeleri çembersel harekette açısal hız ve açısal ivme cinsinden yazılabilir.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad , \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

s çember yayı uzunluğunu gösterdiğinden

$$s = R\theta$$

yazılabilir. Bu bağıntının her iki tarafının t ye göre 1. ve 2. türevleri alınır

$$\frac{ds}{dt} = R\omega \quad , \quad \frac{d^2s}{dt^2} = R\alpha$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler doğal koordinat sistemine ait

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt} \vec{T} \quad , \quad \vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R} \vec{N}$$

denklemlerinde yerine konursa

$$\vec{V} = R\omega \vec{T} \quad , \quad \vec{a} = R\alpha \vec{T} + R\omega^2 \vec{N}$$

Çembersel harekete ait hız ve ivme vektörlerinin doğal koordinat sistemindeki ifadeleri elde edilir. Buradaki açısal hız ω ve açısal ivme α nın değerleri

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad , \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad , \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad , \quad \alpha = \frac{\omega d\omega}{d\theta}$$

denklemlerinden elde edilir. Bu denklemler doğrusal harekete ait diferansiyel denklemlerle aynı formdadır. Bundan dolayı çözüm yöntemleri de aynıdır.

Problem 4.6.1

Bir maddesel nokta $R = 12 \text{ cm}$. yarıçaplı çember üzerinde saat akrebinin tersi yönünde hareket ederken bir t anında açısal hızı $\omega = 6 \text{ Rad/s}$. ve açısal ivmesi $\alpha = 2 \text{ Rad/s}^2$ olduğuna göre bu an için hız ve ivme vektörlerini doğal koordinat sisteminde bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{V} = R \omega \vec{T}$$

Şeklindeki çembersel hareketteki hız vektörünün doğal koordinat sistemindeki formülünde verilenler yerine konursa

$$\vec{V} = 12 * 6 \vec{T} \quad , \quad \boxed{\vec{V} = 72 \vec{T}}$$

hız vektörünün doğal koordinat sistemindeki ifadesi elde edilir.

Aynı şekilde ivme vektörünün doğal koordinat sistemindeki formülü olan

$$\vec{a} = R \alpha \vec{T} + R \omega^2 \vec{N}$$

denkleminde verilenler yerine konursa

$$\vec{a} = 12 * 2 \vec{T} + 12 * 6^2 \vec{N} \quad , \quad \boxed{\vec{a} = 24 \vec{T} + 432 \vec{N}}$$

ivme vektörünün doğal koordinat sistemindeki ifadesi bulunur.

Problem 4.6.2

Basit bir sarkacın hareketi

$$\alpha = -k\theta$$

şeklinde veriliyor. $t = 0$ da $\theta = \theta_0$ ve $\omega = \omega_0$ olduğuna göre açı θ , açısal hız ω ve açısal ivme α nın zamana bağlı ifadelerini bulunuz.

Çözüm:

$$\alpha \text{ yerine } \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ yazılırsa} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = 0$$

ikinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$$\theta = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$$

şeklindedir. Burada $k = \Omega^2$ dir. A ve B sabitleri ise başlangıç şartlarından bulunur.

$$\theta = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$$

denkleminde θ yerine θ_0 , t yerine sıfır yazılırsa

$$\theta_0 = A \text{ bulunur.}$$

$$\omega = -A\Omega \sin \Omega t + B\Omega \cos \Omega t$$

denkleminde ω yerine ω_0 , t yerine sıfır yazılırsa

$\omega = B\Omega$ elde edilir. Buradan

$B = \frac{\omega}{\Omega}$ bulunur. Bu bulunan A ve B değerleri açı-zaman bağıntısında yerine yazılırsa

$$\theta = \theta_0 \cos \Omega t + \frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega t$$

açı-zaman denklemi bulunur. Bu denklemin zaman göre birinci türevi

$$\dot{\omega} = -\Omega \theta_0 \sin \Omega t + \omega \cos \Omega t$$

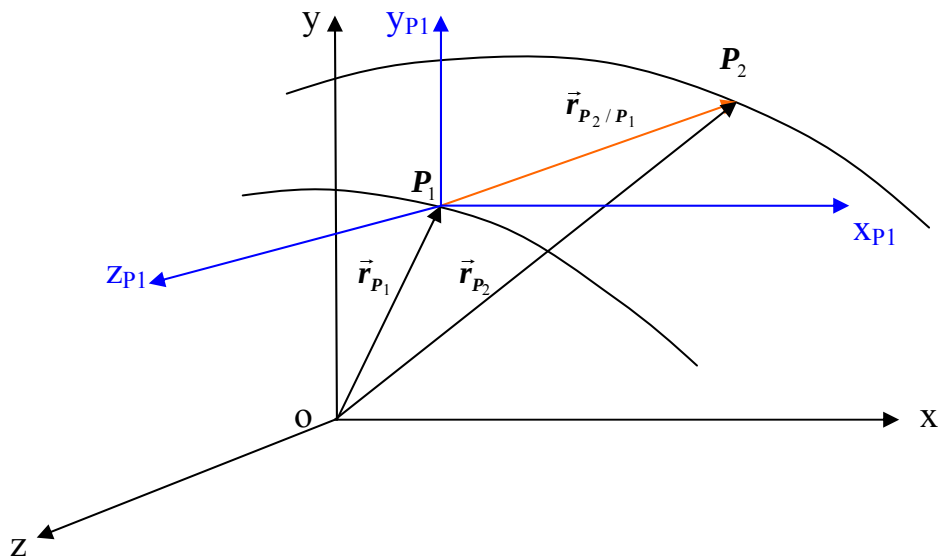
açısal hız-zaman denklemini verir. Bu denklemin tekrar zaman göre türevi

$$\alpha = -\Omega^2 \theta_0 \cos \Omega t - \Omega \omega \sin \Omega t$$

açısal ivme-zaman denklemini verir.

4.7 Maddesel noktanın bağıl hareketi (öteleme hareketi yapan eksen sistemine göre)

İki maddesel noktanın birbirine göre bağıl yer hız ve ivme vektörleri aşağıdaki şekilden elde edilebilir. Bu maddesel noktalardan birisi öteleme hareketi yapan eksen sisteminin orijini alınır aşağıdaki şekil çizilebilir.



Yukarıdaki şekilden yer vektörleri arasında

$$\vec{r}_{P_1} + \vec{r}_{P_2/P_1} = \vec{r}_{P_2}$$

bağıntısı yazılabilir. Buradan P_2 noktasının P_1 noktasına veya öteleme hareketi yapan eksen sistemine göre $\vec{r}_{P_2/P_1}$ bağıl yer vektörü çekilip zamana göre birinci ve ikinci türevi alınır bağıl hız ve bağıl ivme vektörleri elde edilir.

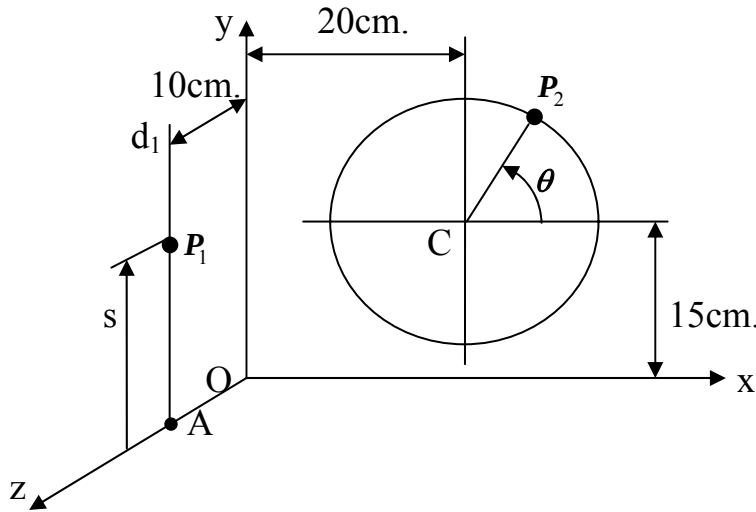
$$\vec{r}_{P_2/P_1} = \vec{r}_{P_2} - \vec{r}_{P_1}$$

$$\vec{V}_{P_2/P_1} = \vec{V}_{P_2} - \vec{V}_{P_1}$$

$$\vec{a}_{P_2/P_1} = \vec{a}_{P_2} - \vec{a}_{P_1}$$

Problem 4.7.1

Şekilde gösterildiği gibi P_1 maddesel noktası d_1 doğrusu üzerinde $s = 10 + 8 \sin \frac{\pi}{12} t$ konum-zaman bağıntısına göre P_2 maddesel noktası ise xy düzleminde bulunan $R = 12 \text{ cm}$ yarıçaplı bir çember üzerinde $\theta = \frac{\pi}{24} t^3$ açı-zaman bağıntısına göre hareket etmektedir. $t = 2$ için P_2 maddesel noktasının P_1 maddesel noktasına göre bağıl yer, hız, ivme vektörlerini ve aralarındaki uzaklığı bulunuz.



Çözüm:

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = \vec{r}_{P_2} - \vec{r}_{P_1}$$

$$\vec{r}_{P_2} = \vec{OP}_2 = \vec{OC} + \vec{CP}_2, \quad \vec{OC} = 20\vec{i} + 15\vec{j}$$

$$\vec{r}_{P_2} = (20 + 12 \cos \theta)\vec{i} + (15 + 12 \sin \theta)\vec{j}$$

$$\vec{r}_{P_1} = \vec{OA} + \vec{AP}_1, \quad \vec{r}_{P_1} = s\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = (20 + 12 \cos \theta)\vec{i} + (15 + 12 \sin \theta - s)\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$t = 2 \text{ de } \theta = \frac{\pi}{24} 2^3 = \frac{\pi}{3} \text{ Rad.}, \quad s = 10 + 8 \sin \frac{\pi}{12} 2 = 14 \text{ cm.}$$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = (20 + 12 \cos \frac{\pi}{3})\vec{i} + (15 + 12 \sin \frac{\pi}{3} - 14)\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = (20 + 6)\vec{i} + (15 + 6\sqrt{3} - 14)\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = 26\vec{i} + (1 + 6\sqrt{3})\vec{j} - 10\vec{k}, \quad \boxed{\vec{r}_{P_2/P_1} = 26\vec{i} + 11,39\vec{j} - 10\vec{k}}, \quad |\vec{r}_{P_2/P_1}| = 30,1 \text{ cm.}$$

$$\vec{V}_{P_2/P_1} = -12\omega \sin\theta \vec{i} + (12\omega \cos\theta - V) \vec{j}$$

$$\omega = \frac{\pi}{8} t^2, \quad V = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{12} t$$

$$t = 2 \text{ de } \omega = \frac{\pi}{2} \text{ Rad/s}, \quad V = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \text{ cm/s}.$$

$$\vec{V}_{P_2/P_1} = -12 \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} \vec{i} + (12 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \pi) \vec{j}$$

$$\vec{V}_{P_2/P_1} = -12 \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + (12 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \pi) \vec{j}, \quad \vec{V}_{P_2/P_1} = -3\sqrt{3}\pi \vec{i} + (3 - \frac{\sqrt{3}}{3})\pi \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_{P_2/P_1} = -16,32\vec{i} + 7,61\vec{j}}$$

$$\vec{a}_{P_2/P_1} = -(12\alpha \sin\theta + 12\omega^2 \cos\theta) \vec{i} + (12\alpha \cos\theta - 12\omega^2 \sin\theta - a) \vec{j}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} t, \quad a = -\frac{\pi^2}{18} \sin \frac{\pi}{12} t$$

$$t = 2 \text{ de } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ Rad/s}^2, \quad a = -\frac{\pi^2}{36} \text{ cm/s}^2$$

$$\vec{a}_{P_2/P_1} = -(12 \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} + 12 \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{3}) \vec{i} + (12 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} - 12 \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{36}) \vec{j}$$

$$\vec{a}_{P_2/P_1} = -(12 \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + 12 \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{2}) \vec{i} + (12 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} - 12 \frac{\pi^2}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{36}) \vec{j}$$

$$\vec{a}_{P_2/P_1} = -(3\sqrt{3}\pi + \frac{3}{2}\pi^2) \vec{i} + (3\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\pi^2 + \frac{\pi^2}{36}) \vec{j}$$

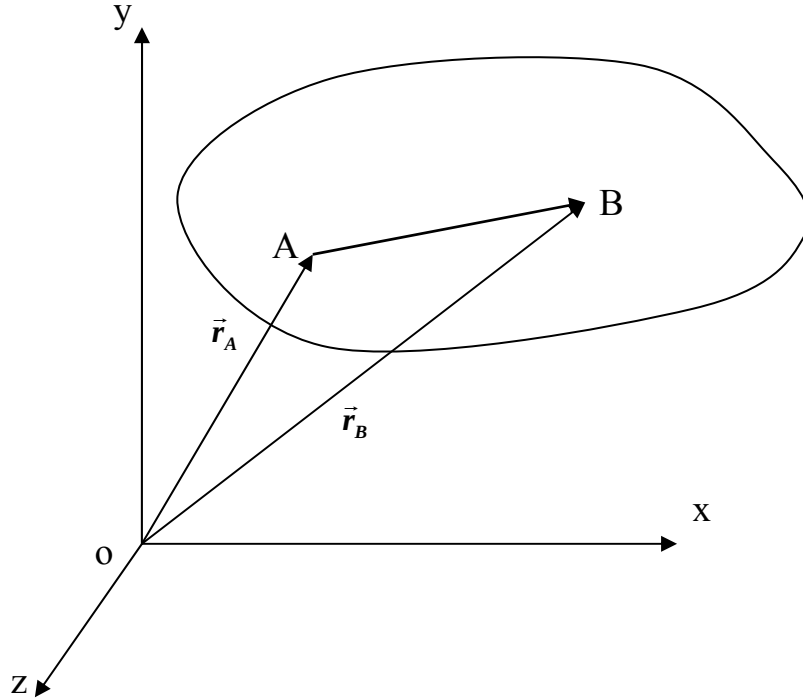
$$\vec{a}_{P_2/P_1} = -(3\sqrt{3} + \frac{3}{2}\pi)\pi \vec{i} + (3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\pi + \frac{\pi}{36})\pi \vec{j}, \quad \boxed{\vec{a}_{P_2/P_1} = -31,13\vec{i} + -14,57\vec{j}}$$

RİJİD CİSMİN KİNEMATİĞİ

5.2 Rijid cismin ötelenme hareketi

Rijid cismin hareketinde üzerindeki hiçbir doğru doğrultu değiştirmiyorsa bu tür harekete öteleme hareketi denir. Bu durumda rijid cisme bağlı vektörler düzlemler eksen sistemleri doğrultu değiştirmezler.

Rijid cisme bağlı her vektör sabit vektördür. Şekilde bu sabit vektörlerden herhangi biri $\vec{AB}$ vektörü olsun.



Şekildeki A ve B nin yer vektörleri arasında aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\vec{r}_A + \vec{AB} = \vec{r}_B$$

$\vec{AB} = \text{sabit}$ olduğu göz önünde bulundurularak eşitliğin her iki tarafının zamana göre türevi alınır

$\vec{V}_A = \vec{V}_B$ hız vektörleri arasındaki bağıntı bulunur. Tekrar türev alındığında ise

$\vec{a}_A = \vec{a}_B$ ivmeler arasındaki bağıntı bulunur.

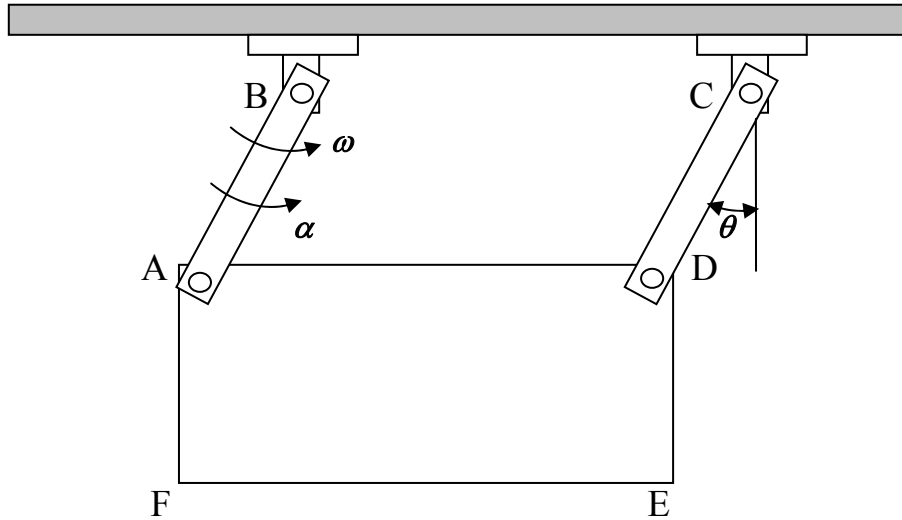
Bu bağıntılardan öteleme hareketinde rijid cismin bütün noktalarının hız vektörlerinin birbirine eşit, ivme vektörlerinin birbirine eşit olduğu görülür. Ötelenme hareketinde bütün noktaların hızları birbirine eşit olduğu için

yörüngeleri de birbirinin aynı veya ötelenmiş eğriler olur. Eğer bu yörüngeler doğru şeklinde ise bu harekete doğrusal ötelenme, eğri şeklinde ise eğrisel ötelenme hareketi denir.

Problem 5.2.1

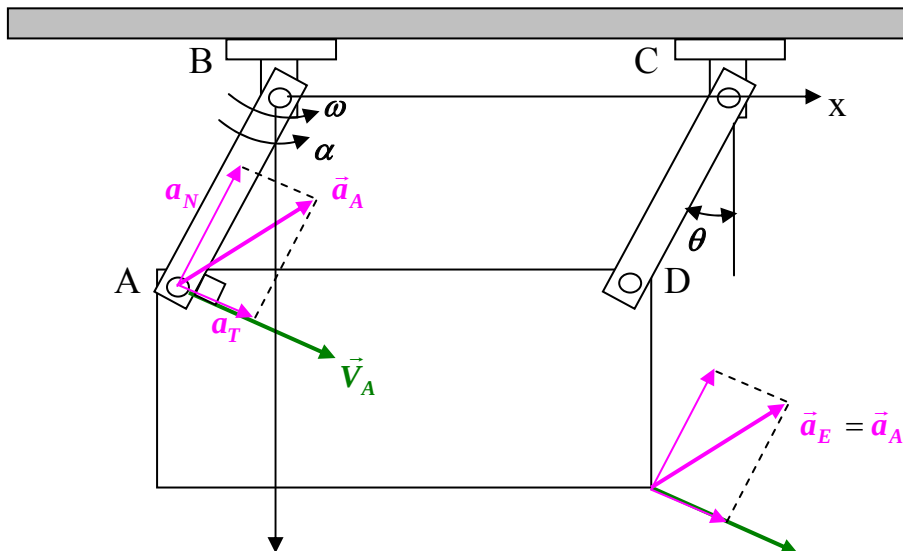
ADEF Dikdörtgen levhası şekil düzleminde kalmak şartı ile A noktasından B etrafında dönebilen AB çubuğu ile D noktasından C etrafında dönebilen CD çubuğu ile mafsallı olarak hareket ediyor. AB çubuğunun şekilde verilen konumdan geçerken açısal hızı $\omega = 5 \text{ Rad/s}$ açısal ivmesi $\alpha = 2 \text{ Rad/s}^2$ olduğuna göre bu an için ADEF dikdörtgen levhasının E noktasının hız ve ivme vektörlerini

- doğal koordinat sisteminde
- kartezyen koordinat sisteminde bulunuz.



$$\overline{AB} = \overline{CD} = 20\text{cm.}, \quad \overline{BC} = \overline{AD} = 32\text{cm.}, \quad \theta = 30^\circ$$

Çözüm:



F

E

y

$$\vec{V}_E = \vec{V}_A$$

AB uzunluğu CD uzunluğuna ve BC uzunluğu AD uzunluğuna eşit olduğu için ABCD daima paralel kenar olur. Bundan dolayı dikdörtgen plaka öteleme hareketi yapar.

Öteleme hareketi yapan cisimlerin bütün noktalarının hızları ve ivmeleri birbirinin aynı olduğundan E noktasının hızı ve ivmesi A noktasının hızı ve ivmesine eşit olur.

a) Doğal koordinat sisteminde hız ve ivme vektörleri

$$\vec{V}_A = \vec{AB} \cdot \omega \vec{T} \quad , \quad \vec{V}_A = 20 * 5 \vec{T} \quad , \quad \vec{V}_A = 100 \vec{T}$$

$$\vec{a}_A = \vec{AB} \cdot \alpha \vec{T} + \vec{AB} \cdot \omega^2 \vec{N} \quad , \quad \vec{a}_A = 20 * 2 \vec{T} + 20 * 5^2 \vec{N} \quad , \quad \vec{a}_A = 40 \vec{T} + 500 \vec{N}$$

$$\boxed{\vec{V}_E = \vec{V}_A = 100 \vec{T}}$$

$$\boxed{\vec{a}_E = \vec{a}_A = 40 \vec{T} + 500 \vec{N}}$$

b) Kartezyen koordinat sisteminde hız ve ivme vektörleri

$$\vec{V}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{BA}$$

$$\vec{\omega} = -5 \vec{k}$$

$$\vec{BA} = -\vec{AB} * \sin \theta \vec{i} + \vec{AB} * \cos \theta \vec{j} \quad , \quad \vec{BA} = -20 * \sin 30^\circ \vec{i} + 20 * \cos 30^\circ \vec{j}$$

$$\vec{BA} = -10 \vec{i} + 10\sqrt{3} \vec{j}$$

$$\vec{V}_A = -5 \vec{k} \wedge (-10 \vec{i} + 10\sqrt{3} \vec{j}) \quad , \quad \vec{V}_A = 50\sqrt{3} \vec{i} - 50 \vec{j}$$

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha} \wedge \vec{BA} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_A \quad , \quad \vec{a}_A = -2 \vec{k} \wedge (-10 \vec{i} + 10\sqrt{3} \vec{j}) - 5 \vec{k} \wedge (50\sqrt{3} \vec{i} - 50 \vec{j})$$

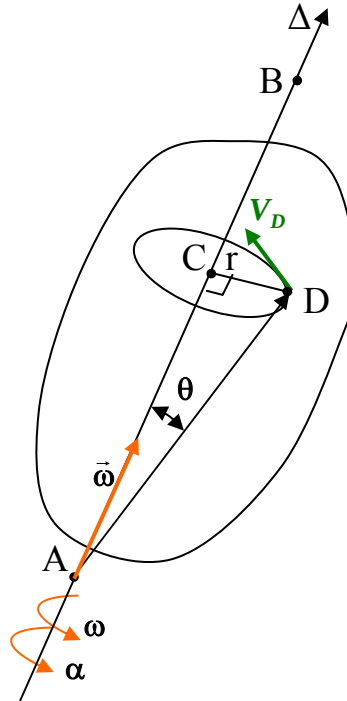
$$\vec{a}_A = (20\sqrt{3} + 250) \vec{i} + (20 - 250\sqrt{3}) \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_E = \vec{V}_A = 50\sqrt{3} \vec{i} - 50 \vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{a}_E = \vec{a}_A = (20\sqrt{3} + 250) \vec{i} + (20 - 250\sqrt{3}) \vec{j}}$$

5.3 Rijid cismin sabit bir eksen etrafında dönme hareketi

Rijid cismin üzerindeki noktaların sabit bir eksene ve bu eksen üzerindeki bir noktaya uzaklıkları hareket boyunca değişmiyorsa rijid cismin bu hareketine sabit bir eksen etrafında dönme hareketi denir.



Yukarıdaki şekilde bir rijid cisim A ve B noktalarından geçen Δ eksen etrafında ω açısal hızı ve α açısal ivmesi ile dönüyor. Cismin üzerindeki bütün noktaların yörüngeleri Δ eksenine dik düzlemlerdeki çemberlerdir. Burada D noktası C merkezli r yarıçaplı Δ eksenine dik düzlemde bir çember çizer.

Çembersel harekette bir noktanın hız vektörünün doğrultusu çembere teğet yönü hareket yönünde, şiddeti ise açısal hız ile yarıçapın çarpımına eşittir.

$$\vec{V} = r\omega\vec{T}$$

İvme vektörü ise

$$\vec{a} = r\alpha\vec{T} + r\omega^2\vec{N}$$

şeklindedir.

Sabit bir eksen etrafında dönme hareketinde $\vec{V}$ hız vektörünün

$$\vec{V}_D = \vec{\omega} \wedge \vec{AD}$$

şeklinde yazılabileceği aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Burada $\vec{\omega}$ açısal hız vektörüdür. Açısal hız vektörü açısal hız şiddetinde dönme eksenini doğrultusunda ve sağ el kuralı ile cismin dönme yönünü belirten yönde bir vektördür.

$$|\vec{V}_D| = |\vec{\omega} \wedge \vec{AD}| = |\vec{\omega}| |\vec{AD}| \sin \theta$$

Burad $|\vec{AD}| \sin \theta = r$ olduğundan $|\vec{V}| = r|\omega|$ hızın şiddetini veren denklemi sağlanmış olur.

Vektörel çarpımın doğrultusu çarpımdaki her iki vektöre de dik olacağından $\vec{\omega}$ açısal hız vektörü ile $\vec{AD}$ vektörüne dik doğrultu teğet doğrultusunda olur. Yönü ise sağ el kuralı ile bulunur. Bu elde edilen doğrultu ve yön hız vektörünün doğrultu ve yönü ile aynı olur. Böylece sabit bir eksen etrafında dönme hareketindeki hız vektörünün hesabında

$$\vec{V}_D = \vec{\omega} \wedge \vec{AD}$$

ifadesi kullanılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının zamana göre türevi alınırsa ivme vektörü formülü elde edilir.

$$\vec{a}_D = \vec{\alpha} \wedge \vec{AD} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_D$$

Burada $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ dır.

Eğer dönme eksenini üzerinde bulunan A noktası çemberin merkezi ise

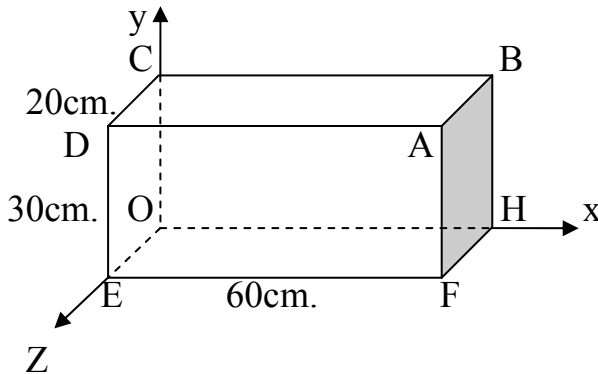
$$\vec{a}_D = \vec{\alpha} \wedge \vec{AD} - \omega^2 \vec{AD}$$

Yazılabilir.

Problem 5.3.1

Dikdörtgenler prizması şeklindeki cisim bir t anında açısal hızı pozitif yönde $\omega = 7 \text{ Rad/s}$ ve açısal ivmesi $\alpha = 2 \text{ Rad/s}^2$ dir. Ayrıca aynı anda kenarları koordinat eksenlerine çakışacak konumdan geçmektedir. B noktasının hız ve ivme vektörlerini cisim

- x eksenini etrafında dönerken
- y eksenini etrafında dönerken
- z eksenini etrafında dönerken
- OA eksenini etrafında dönerken hesaplayınız.



Çözüm: a) cisim x eksenini etrafında pozitif yönde (y den z ye doğru) dönüyor.

$$\vec{V}_B = \vec{HB} * \omega \vec{T} , \quad \vec{V}_B = 30 * 7 \vec{T} , \quad \vec{V}_B = 210 \vec{T}$$

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \wedge \vec{HB} , \quad \vec{\omega} = 7 \vec{i} , \quad \vec{HB} = 30 \vec{j} , \quad \vec{V}_B = 7 \vec{i} \wedge 30 \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_B = 210 \vec{k}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{HB} * \alpha \vec{T} + \vec{HB} * \omega^2 \vec{N} , \quad \vec{a}_B = 30 * 2 \vec{T} + 30 * 7^2 \vec{N}$$

$$\vec{a}_B = 60 \vec{T} + 1470 \vec{N}$$

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \wedge \vec{HB} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_B , \quad \vec{a}_B = 2 \vec{i} \wedge 30 \vec{j} + 7 \vec{i} \wedge 210 \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = -1470 \vec{j} + 60 \vec{k}}$$

b) cisim y eksenini etrafında pozitif yönde (z den x e doğru) dönüyor.

$$\vec{V}_B = \vec{CB} * \omega \vec{T} , \quad \vec{V}_B = 60 * 7 \vec{T} , \quad \vec{V}_B = 420 \vec{T}$$

$$\vec{a}_B = 60 * 2 \vec{T} + 60 * 7^2 \vec{N} , \quad \vec{a}_B = 120 \vec{T} + 2940 \vec{N}$$

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \wedge \vec{CB} , \quad \vec{\omega} = 7 \vec{j} , \quad \vec{V}_B = 7 \vec{j} \wedge 60 \vec{i}$$

$$\boxed{\vec{V}_B = -420 \vec{k}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \wedge \vec{CB} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_B , \quad \vec{a}_B = 2 \vec{j} \wedge 60 \vec{i} + 7 \vec{j} \wedge -420 \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = -2940 \vec{i} - 120 \vec{k}}$$

c) Cisim z eksenini etrafında pozitif yönde (x den y ye doğru) dönüyor.

$$\vec{V}_B = \vec{OB} * \omega \vec{T} , \quad \vec{OB} = \sqrt{30^2 + 60^2} , \quad \vec{OB} = \sqrt{30^2 + 60^2} , \quad \vec{OB} = 10\sqrt{45}$$

$$\vec{V}_B = 70\sqrt{45} \vec{T} , \quad \vec{V}_B = 469,57 \vec{T}$$

$$\vec{a}_B = 10\sqrt{45} * 2 \vec{T} + 10\sqrt{45} * 7^2 \vec{N} , \quad \vec{a}_B = 20\sqrt{45} \vec{T} + 490\sqrt{45} \vec{N}$$

$$\vec{a}_B = 134,16 \vec{T} + 3287,02 \vec{N} , \quad |\vec{a}_B| = 3289,8 \text{ cm} / \text{s}^2$$

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \wedge \vec{OB} , \quad \vec{\omega} = 7 \vec{k} , \quad \vec{OB} = 60 \vec{i} + 30 \vec{j}$$

$$\vec{V}_B = 7 \vec{k} \wedge (60 \vec{i} + 30 \vec{j})$$

$$\boxed{\vec{V}_B = -210 \vec{i} + 420 \vec{j}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OB} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_B, \quad \vec{a}_B = 2\vec{k} \wedge (60\vec{i} + 30\vec{j}) + 7\vec{k} \wedge (-210\vec{i} + 420\vec{j})$$

$$\vec{a}_B = 120\vec{j} - 60\vec{i} - 1470\vec{j} - 2940\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = -3000\vec{i} - 1350\vec{j}}$$

d) Cisim OA eksenini etrafında pozitif yönde (O dan bakıldığında saat ibrelerinin tersi yönünde) dönüyor.

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{U}_{OA}, \quad \vec{U}_{OA} = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{60\vec{i} + 30\vec{j} + 20\vec{k}}{\sqrt{(60)^2 + (30)^2 + (20)^2}}$$

$$\vec{U}_{OA} = \frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}, \quad \vec{\omega} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \overrightarrow{AB} = -20\vec{k}$$

$$\vec{V}_B = (6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}) \wedge -20\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{V}_B = -60\vec{i} + 120\vec{j}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_B, \quad \vec{\alpha} = \alpha \vec{U}_{OA}, \quad \vec{\alpha} = \frac{12}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{4}{7}\vec{k}$$

$$\vec{a}_B = \left(\frac{12}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{4}{7}\vec{k}\right) \wedge -20\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & 2 \\ -60 & 120 & 0 \end{vmatrix}$$

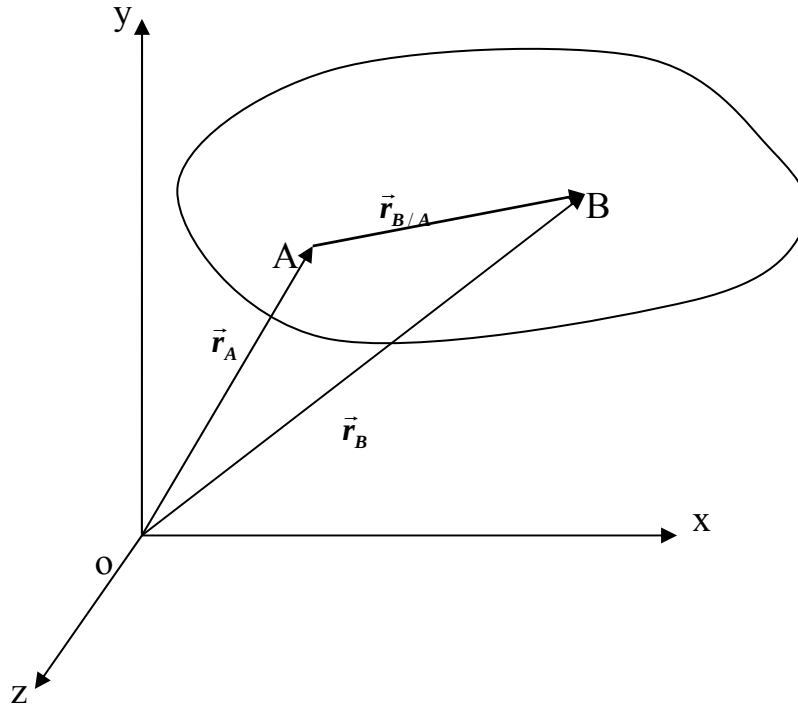
$$\vec{a}_B = \left(-\frac{120}{7} - 240\right)\vec{i} + \left(\frac{240}{7} - 120\right)\vec{j} + 900\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = -257,14\vec{i} - 85,71\vec{j} + 900\vec{k}}$$

5.4 Rijid cismin genel düzlemsel hareketi

Rijid cisim üzerindeki bütün noktaların yörüngeleri düzlemsel eğriler ise rijid cismin bu tür hareketine genel düzlemsel hareket denir. Düzlemsel eğriler çizen bu noktalar aynı düzlemde veya birbirine paralel düzlemlerde bulunur. Genel düzlemsel hareket için yapılan bu tanımdan sabit bir eksen etrafındaki hareketin de bir düzlemsel hareket olduğu anlaşılır. Bu paralel düzlemlerden birinde elde edilen hız ve ivmeler bu düzleme çıkılan dik doğru üzerindeki her noktada aynıdır. yörüngeler ise aynı yörüngeyi bu noktaya ötelenmiş halidir.

Bundan dolayı genel düzlemsel hareket yapan bir rijid cisim üzerindeki yörüngelere paralel düzlemlerden birini ana levha olarak adlandırıp bunun üzerinde inceleme yapmak yeterli olur.



Şekildeki oAB vektör üçgeninden A ve B nin yer vektörleri arasında aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

Bu yer vektörleri arasındaki bağıntının zaman göre türevinden hız vektörleri arasındaki bağıntı elde edilir.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

Bu eşitliğin zamana göre türevi alınırsa ivmeler arasındaki bağıntı elde edilir.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

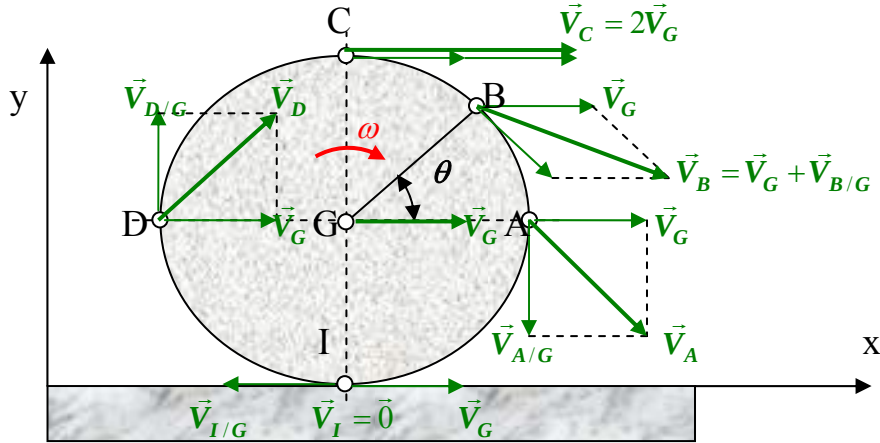
Buradaki denklemlerin sol tarafındaki ikinci terimler B'nin A'daki ötelenme hareketi yapan eksen sistemine göre hareketini göstermektedir. Burada B ile A arasındaki uzaklık değişmediğinden ve B düzlemsel bir yörüngeye sahip olduğundan B'nin A'daki eksen sistemine göre yörüngesi çember olur. Çembersel harekette sabit eksen etrafında dönme hareketine ait aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{\omega} \wedge \overline{AB}$$

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{\alpha} \wedge \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB}$$

Problem 5.4.2

Aşağıdaki şekilde kaymadan yuvarlanma hareketi yapan bir disk gösterilmektedir. Diskin çevresindeki A, B, C, D ve I noktalarının hız ve ivme vektörlerini bulunuz.



Çözüm:

Yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi bütün noktaların hız vektörünü kütle merkezinin hız vektörü ile bu noktaların kütle merkezine göre hız vektörlerinin toplamından elde edilir. İvme vektörleri de aynı şekilde kütle merkezinin ivmesi ile bu noktaların kütle merkezine göre ivmelerinin toplamından elde edilir.

A noktasının hız ve ivme vektörü:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_G + \vec{V}_{A/G}$$

$$\vec{V}_G = R\omega \vec{i}, \quad \vec{V}_{A/G} = -R\omega \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_A = R\omega \vec{i} - R\omega \vec{j}}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_G + \vec{a}_{A/G}, \quad \vec{a}_G = R\alpha \vec{i}$$

$$\vec{a}_{A/G} = R\alpha \vec{T} + R\omega^2 \vec{N}, \quad \vec{a}_{A/G} = -R\omega^2 \vec{i} - R\alpha \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_A = R(\alpha - \omega^2) \vec{i} - R\alpha \vec{j}}$$

B noktasının hız ve ivme vektörü:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_G + \vec{V}_{B/G}$$

$$\vec{V}_G = R\omega \vec{i} \quad , \quad \vec{V}_{B/G} = -\omega \vec{k} \wedge (R\cos\theta \vec{i} + R\sin\theta \vec{j})$$

$$\vec{V}_{B/G} = R\omega \sin\theta \vec{i} - R\omega \cos\theta \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_B = R\omega(1 + \sin\theta) \vec{i} - R\omega \cos\theta \vec{j}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_G + \vec{a}_{B/G}$$

$$\vec{a}_{B/G} = -\alpha \vec{k} \wedge (R\cos\theta \vec{i} + R\sin\theta \vec{j}) - \omega \vec{k} \wedge (R\omega \sin\theta \vec{i} - R\omega \cos\theta \vec{j})$$

$$\vec{a}_{B/G} = (R\alpha \sin\theta - R\omega^2 \cos\theta) \vec{i} - (R\alpha \cos\theta + R\omega^2 \sin\theta) \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = (R\alpha + R\alpha \sin\theta - R\omega^2 \cos\theta) \vec{i} - (R\alpha \cos\theta + R\omega^2 \sin\theta) \vec{j}}$$

C noktasının hız ve ivme vektörü:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_G + \vec{V}_{C/G} \quad , \quad \vec{V}_G = R\omega \vec{i} \quad , \quad \vec{V}_{C/G} = R\omega \vec{i}$$

$$\boxed{\vec{V}_C = 2R\omega \vec{i}}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_G + \vec{a}_{C/G}$$

$$\vec{a}_G = R\alpha \vec{i}$$

$$\vec{a}_{C/G} = R\alpha \vec{T} + R\omega^2 \vec{N}$$

$$\vec{a}_{C/G} = R\alpha \vec{i} - R\omega^2 \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_C = 2R\alpha \vec{i} - R\omega^2 \vec{j}}$$

D noktasının hız ve ivme vektörü:

$$\vec{V}_D = \vec{V}_G + \vec{V}_{D/G} \quad , \quad \vec{V}_G = R\omega \vec{i} \quad , \quad \vec{V}_{D/G} = R\omega \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_D = R\omega \vec{i} + R\omega \vec{j}}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_G + \vec{a}_{D/G} \quad , \quad \vec{a}_G = R\alpha \vec{i}$$

$$\vec{a}_{D/G} = R\alpha \vec{T} + R\omega^2 \vec{N} \quad , \quad \vec{a}_{D/G} = R\omega^2 \vec{i} + R\alpha \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_D = R(\alpha + \omega^2) \vec{i} + R\alpha \vec{j}}$$

I noktasının hız ve ivme vektörü:

$$\vec{V}_I = \vec{V}_G + \vec{V}_{I/G}$$

$$\vec{V}_G = R\omega \vec{i} \quad , \quad \vec{V}_{I/G} = -R\omega \vec{i}$$

$$\boxed{\vec{V}_I = \vec{0}}$$

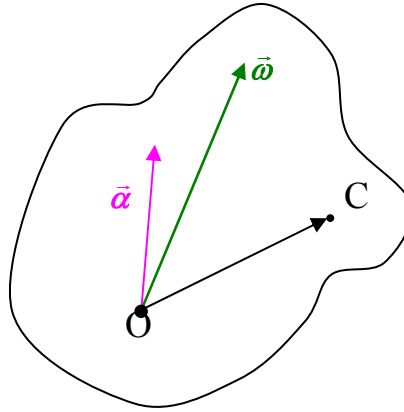
$$\vec{a}_I = \vec{a}_G + \vec{a}_{I/G} \quad , \quad \vec{a}_G = R\alpha \vec{i}$$

$$\vec{a}_{I/G} = R\alpha \vec{T} + R\omega^2 \vec{N} \quad , \quad \vec{a}_{I/G} = -R\alpha \vec{i} + R\omega^2 \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_I = R\omega^2 \vec{j}}$$

5.5 Rijid cismin sabit bir nokta etrafında hareketi

Aşağıdaki şekilde o etrafında $\vec{\omega}$ açısal hız vektörü ve $\vec{\alpha}$ açısal ivme vektörü ile dönen bir rijid cismin C noktasının hız ve ivme vektörleri aşağıdaki gibi yazılabilir.



$$\vec{V}_C = \vec{\omega} \wedge \vec{OC}$$

$$\vec{a}_C = \vec{\alpha} \wedge \vec{OC} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_C$$

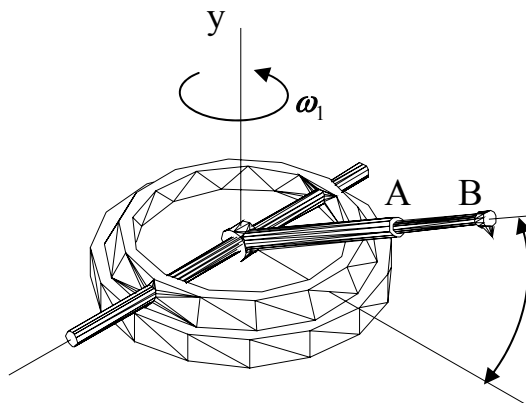
Sabit bir nokta etrafında dönme hareketinde açısal ivme vektörü ile açısal hız vektörü aynı doğrultuda olmak zorunda değildir.

Sabit bir nokta etrafında dönme hareketi her an için sabit bir eksen etrafında dönme hareketine eşdeğer düşünülebilir. Ani dönme eksenini denilen bu eksen üzerindeki noktaların hızı sıfırdır. Fakat ivmeleri sıfır olmayabileceğinden ivme vektörü bu eksen dışında olabilir.

Problem 5.6.1:

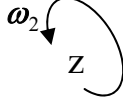
Şekilde gösterildiği anda OAB Robot kolu y eksenini etrafında $\omega_1 = 0,15 \text{ Rad/s}$ sabit açısal hızı ve z eksenini etrafında $\omega_2 = 0,25 \text{ Rad/s}$ sabit açısal hızı ile dönüyor. OB robot kolunun uzunluğu 1m. olduğuna göre

- OAB robot kolunun açısal hızını
- OAB robot kolunun açısal ivmesini
- B noktasının hızını
- B noktasının ivmesini bulunuz.



o

35°



x

Çözüm:

a)

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

$$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{j} \quad , \quad \vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{k} \quad , \quad \vec{\omega} = \omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = 0,15 \vec{j} + 0,25 \vec{k}} \quad , \quad \omega = |\vec{\omega}| = \sqrt{(0,15)^2 + (0,25)^2}$$

$$\boxed{\omega = 0,29 \text{ Rad / s}}.$$

b)

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt}$$

Şiddeti sabit olan $\vec{\omega}_1$ açısal hız vektörünün doğrultusu da değişmediğinden $\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \vec{0}$ dir.

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2 \quad , \quad \vec{\alpha} = 0,15 \vec{j} \wedge 0,25 \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\alpha} = 0,0375 \vec{i}}$$

c)

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \wedge \vec{OB} \quad , \quad \vec{OB} = \cos 35^\circ \vec{i} + \sin 35^\circ \vec{j}$$

$$\vec{OB} = 0,819 \vec{i} + 0,5736 \vec{j} \quad , \quad \vec{V}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,15 & 0,25 \\ 0,819 & 0,5736 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{V}_B = -0,1434 \vec{i} + 0,205 \vec{j} - 0,123 \vec{k}} \quad , \quad |\vec{V}_B| = 0,279 \text{ m / s}$$

d)

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \wedge \vec{OB} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_B$$

$$\vec{a}_B = 0,0375 \vec{i} \wedge (0,819 \vec{i} + 0,5736 \vec{j}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,15 & 0,25 \\ -0,1434 & 0,205 & -0,123 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = -0,0697 \vec{i} - 0,0359 \vec{j} + 0,043 \vec{k}} \quad , \quad |\vec{a}_B| = 0,089 \text{ m / s}^2$$

Çeşitli düz çubuklardan birleştirilerek oluşturulan OABC robot kolu O da küresel mafsallarla bağlanmıştır. OA çubuğu D , OB çubuğu ise E plakasındaki doğrusal kanallarda hareket ediyor. E plakasındaki kanal z eksenine paraleldir. D plakası z eksenine diktir. Şekilde gösterildiği anda B noktasının hızının $\vec{V}_B = (180\text{mm/s})\vec{k}$ ve sabit olduğu bilindiğine göre

-
- The diagram shows a 3D coordinate system with axes x, y, and z. A vertical rod is fixed at point O on the xz-plane. A horizontal rod is attached to the vertical rod at a height of 240 mm. This horizontal rod has a vertical offset of 80 mm from the xz-plane and a horizontal offset of 40 mm from the y-axis. At the end of this horizontal rod, there is a vertical rod that passes through a rectangular plate E at a height of 100 mm from the xz-plane. The plate E has a slot for the rod. Another rectangular plate D is located on the xz-plane, with a rod passing through it at a distance of 2 mm from the z-axis. The distance from the origin O to the point where the horizontal rod is attached to the vertical rod is 200 mm along the x-axis.

a)

$$\vec{V}_A = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA} \quad , \quad \vec{\omega} = 0.75\vec{i} + \omega_y\vec{j} \quad , \quad \overrightarrow{OA} = 200\vec{k}$$

$$\vec{V}_A = (0,75\vec{i} + \omega_y\vec{j}) \wedge 200\vec{k} \quad , \quad \vec{V}_A = 200\omega_y\vec{i} - 150\vec{j}$$

ayrıca A noktasının hızı doğrultusu bilindiğinden

$$\vec{V}_A = \frac{2}{\sqrt{5}}V_A\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}V_A\vec{j} \quad \text{şeklinde yazılabilir. Bu A noktasına ait hız}$$

ifadeleri eşitlenip

$$\vec{V}_A = \frac{2}{\sqrt{5}}V_A\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}V_A\vec{j} = 200\omega_y\vec{i} - 150\vec{j} \quad \text{elde edilen denklemden A}$$

noktasının hızı ve açısal hızın y eksenine doğrultusundaki bileşeni bulunur.

$$V_A = 150\sqrt{5} \quad , \quad \omega_y = \frac{2}{200\sqrt{5}}V_A \quad , \quad \omega_y = \frac{2}{200\sqrt{5}}(150\sqrt{5}) = 1,5 \text{ Rad / s}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = 0,75\vec{i} + 1,5\vec{j}}$$

b)

$$\vec{V}_A = \frac{2}{\sqrt{5}}(150\sqrt{5})\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}(150\sqrt{5})\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_A = 300\vec{i} - 150\vec{j}}$$

c)

$$\vec{V}_C = \vec{\omega} \wedge \vec{OC} \quad , \quad \vec{OC} = 100\vec{i} + 80\vec{j} + 40\vec{k}$$

$$\vec{V}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,75 & 1,5 & 0 \\ 100 & 80 & 40 \end{vmatrix} \quad , \quad \boxed{\vec{V}_C = 60\vec{i} - 30\vec{j} - 90\vec{k}}$$

d)

$$\vec{a}_C = \vec{\alpha} \wedge \vec{OC} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_C$$

B noktasının hızının şiddeti sabit ise ivmenin teğetsel bileşeni sıfır olacağından $\vec{\alpha}$ açısal ivmesi sıfırdır.

$$\boxed{\vec{\alpha} = \vec{0}}$$

$$\vec{a}_C = (0,75\vec{i} + 1,5\vec{j}) \wedge (60\vec{i} - 30\vec{j} - 90\vec{k})$$

$$\vec{a}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,75 & 1,5 & 0 \\ 60 & -30 & -90 \end{vmatrix} \quad , \quad \boxed{\vec{a}_C = -135\vec{i} + 67,5\vec{j} - 112,5\vec{k}}$$

BÖLÜM 6

KINETİK

6.1 Kinetik ve Newtonun ikinci hareket kanunu

Kinetik hareketi oluşturan kuvvet moment gibi nedenleri de göz önüne alarak hareketin incelenmesidir.

Kinetikte temel yasa Newtonun ikinci hareket kanunudur.

Bir parçacığın lineer momentumunun zamanla değişimi üzerine etkiyen kuvvetlerin bileşkesi ile orantılıdır ve bu bileşkenin yönündedir.

Parçacığın lineer momentumu hızı ile orantılı olup hız yönündedir ve bu orantı katsayısı kütle adını alır.

Parçacığın hızı $\vec{V}$ kütlesi m ile gösterilirse Lineer momentumu

$$\vec{P} = m \vec{V}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımla ikinci hareket yasası

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})$$

şeklini alır. Newton mekaniği yani klasik mekanik çerçevesinde m kütesinin yalnız cismin iç özelliklerine bağlı olduğu zaman ve yerle değişmediği varsayılır. Dolayısıyla ikinci yasa

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

şeklinde yazılabilir.

6.2 Maddesel noktanın kinetiği

Newtonun ikinci hareket kanunu olan

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

denkleminin kartezyen koordinatlardaki bileşenleri

$$F_x = m a_x, \quad F_y = m a_y, \quad F_z = m a_z$$

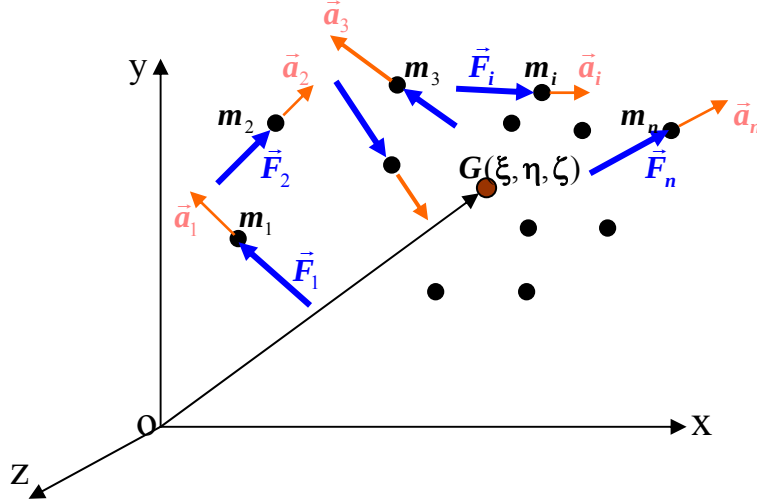
doğal koordinatlardaki bileşenleri

$$F_T = m a_T, \quad F_N = m a_N$$

şeklinde yazılabilir.

6.3 Kütle merkezinin hareketi teoremi

Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi maddesel noktalardan oluştuğu düşünülen sistem veya rijid cismin hareketinde her bir maddesel nokta için yazılan $\vec{F} = m \vec{a}$ denklemleri alt alta yazılıp toplanırsa



$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 &= m_1 \vec{a}_1 \\
 \vec{F}_2 &= m_2 \vec{a}_2 \\
 \vec{F}_3 &= m_3 \vec{a}_3 \\
 &\dots\dots\dots \\
 \vec{F}_i &= m_i \vec{a}_i \\
 + &\dots\dots\dots \\
 \vec{F}_n &= m_n \vec{a}_n \\
 \hline
 \sum_{i=1}^n \vec{F}_i &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i
 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Burada G maddesel noktalar sisteminin kütle merkezidir. Kütle merkezinin yer vektörü

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{OA}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{şeklinde yazılabilir. Bu vektörün zamana göre ikinci türevi}$$

alınırsa kütle merkezinin ivme vektörü bulunur.

$$\vec{a}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Bu ivme vektörü ifadesinden. $m = \sum_{i=1}^n m_i$ olmak üzere

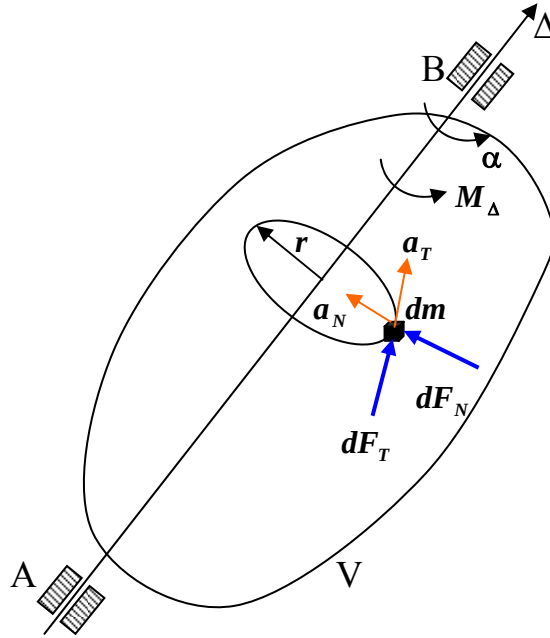
$$m \vec{a}_G = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \text{ yazılabilir.}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \text{ ifadesindeki } \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \text{ yerine } m \vec{a}_G \text{ yazılırsa}$$

$$\boxed{\sum \vec{F} = m \vec{a}_G}$$

şeklindeki kütle merkezinin hareketi teoremi olarak bilinen denklem elde edilir. Bu denkleme göre maddesel noktalar sisteminin veya rijid cismin kütle merkezi bütün kuvvetler ona uygulanmış ve toplam kütle orada yoğunlaşmış bir maddesel nokta gibi hareket eder.

6.4 Rijid cismin sabit bir eksen etrafında dönme hareketi ve atalet momentleri



Şekilde gösterilen V hacim bölgesini kapsayan ve Δ Eksenini etrafında M_{Δ} dış momentleri etkisinde dönen cismin üzerindeki bir dm diferansiyel kütlesi ve bu kütle için kinetik denklemi yazıp cismin tüm V hacmi içinde integre edilirse rijid cismin sabit eksen etrafında dönme hareketine ait kinetik denklemi bulunur.

Maddesel noktanın hareketi verilen

$$\vec{F} = m \vec{a} \text{ denkleminin}$$

doğal koordinatlardaki ifadesi

$$F_T = m a_T, \quad F_N = m a_N$$

Bu denklemler rijid cismin bir diferansiyel kütlesine uygulanırsa

$$dF_T = a_T dm, \quad dF_N = a_N dm$$

Şekilde gösterildiği gibi sabit bir eksen etrafında dönen cismin bütün noktaları çembersel hareket yapar. Bundan dolayı cisim üzerindeki bir diferansiyel kütle için yazılan denklemlerden ikincisinin dönme hareketine bir etkisi olmaz. Birinci denklemden a_T ivmenin teğetsel bileşeni yerine

$$a_T = r\alpha \text{ yazılarak elde edilen}$$

$$dF_T = r\alpha dm$$

denkleminin her iki tarafı diferansiyel kütlenin yörüngesinin yarıçapı olan r ile çarpılıp integre edilirse sabit eksen etrafında dönme hareketine ait kinetik denklemi elde edilir.

$$\int_V r dF_T = \int_V r r \alpha dm$$

Burada $M_\Delta = \int_V r dF_T$ olduğu bilindiğine göre yukarıdaki denklem

$$M_\Delta = \alpha \int_V r^2 dm$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $\int_V r^2 dm$ büyüklüğe cismin Δ eksenine göre

atalet momenti denir

$$I_\Delta = \int_V r^2 dm$$

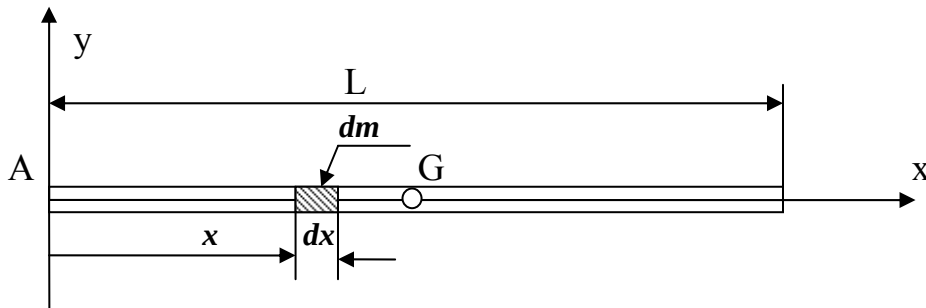
Böylece sabit bir eksen etrafında dönme hareketine ait moment ve açısal ivme arasındaki bağıntıyı veren kinetik denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$M_\Delta = I_\Delta \alpha$$

Problem 6.5.1

Kütlesi m olan L uzunluğundaki homojen, doğrusal ve sabit kesitli çubuğun ucuna ve merkezine göre atalet momentini bulunuz.

Çözüm:



$$I_A = \int_L x^2 dm, \quad dm = \rho dx, \quad m = \rho L$$

$$I_A = \int_0^L x^2 \rho dx \quad , \quad I_A = \rho \frac{L^3}{3}$$

Atalet momentini cismin kütlesi cinsinden bulmak için sonucu $\frac{m}{\rho L} = 1$ ile

çarpmak gerekir. $I_A = \rho \frac{L^3}{3} \frac{m}{\rho L}$

$$I_A = m \frac{L^2}{3}$$

paralel eksenler teoremine göre

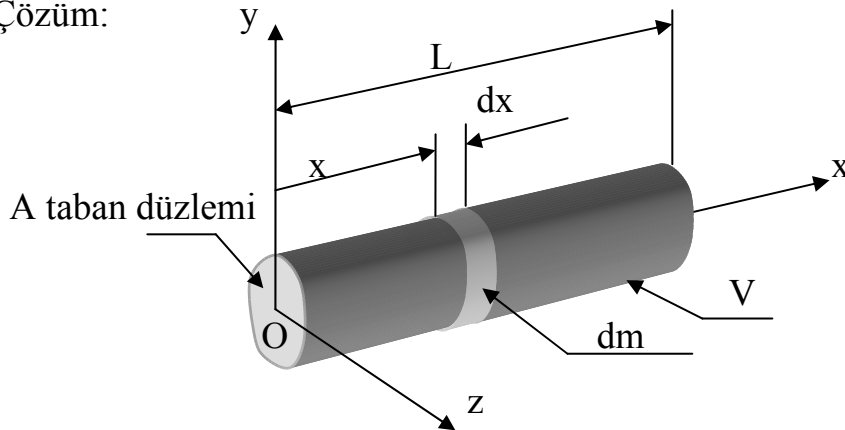
$$I_A = I_G + m \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad , \quad I_G = I_A - m \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad , \quad I_G = m \frac{L^2}{3} - m \frac{L^2}{4}$$

$$I_G = m \frac{L^2}{12}$$

Problem 6.5.2

Kütlesi m olan L uzunluğundaki homojen , doğrusal ve sabit kesitli Prizmatik cismin taban düzlemine göre atalet momentini bulunuz.

Çözüm:



Çözüm:

$$I_A = \int_V x^2 dm \quad , \quad dm = \rho dV$$

eğer A taban düzleminin alanı S ise

$$m = \rho S L \quad , \quad dm = \rho S dL \quad \text{dır.}$$

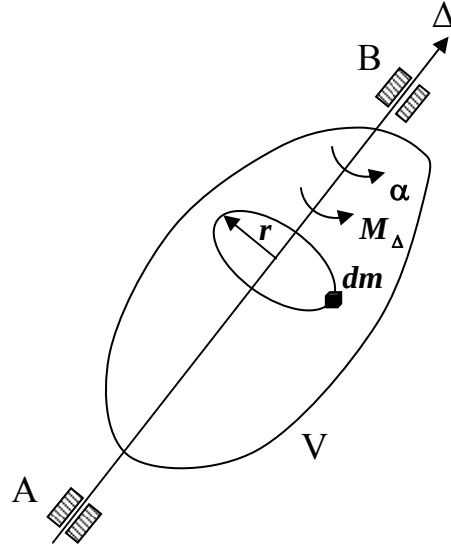
$$I_A = \int_0^L x^2 \rho S dL \quad , \quad I_A = \rho S \frac{L^3}{3}$$

Atalet momentini cismin kütlesi cinsinden bulmak için sonucu $\frac{m}{\rho SL} = 1$

ile çarpmak gerekir. $I_A = \rho S \frac{L^3}{3} \frac{m}{\rho SL}$

$$I_A = m \frac{L^2}{3}$$

6.5 Rijid cismin sabit bir eksen etrafındaki dönme hareketi ile ilgili problemler



$$M_{\Delta} = I_{\Delta} \alpha$$

Burada M_{Δ} , Δ eksenine göre cisme uygulanan toplam dış momenti

$$I_{\Delta} , \text{ cismin } \Delta \text{ eksenine göre atalet momentini } I_{\Delta} = \int_V r^2 dm$$

α ise cismin açısal ivmesini göstermektedir.

Rijid cismin sabit eksen etrafında dönme hareketinde cisme etki eden dış aktif kuvvetler ile mafsalları tepkileri arasındaki bağıntı kütle merkezinin hareketi teoreminden elde edilebilir.

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_G$$

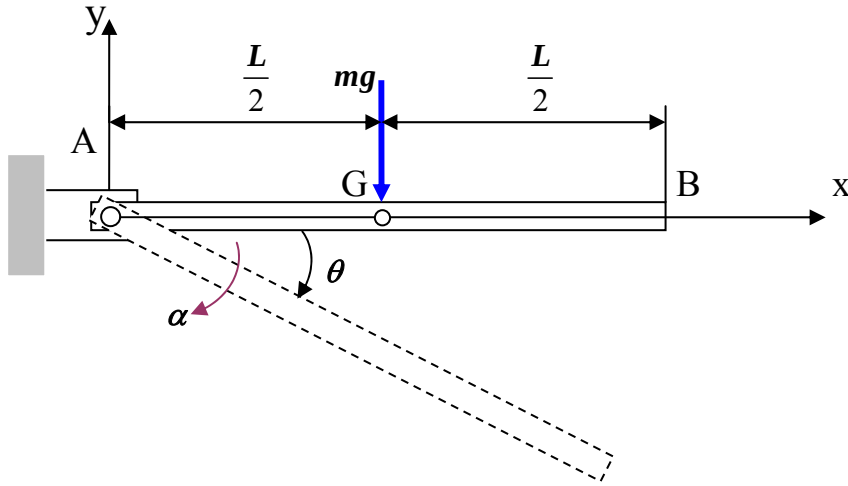
Burada $\vec{a}_G$ cismin kütle merkezinin ivmesidir.

Problem 6.6.1

Homojen L uzunluğunda ve m kütlesindeki sabit kesitli doğrusal çubuk A ucundan kendisine dik silindirik mafsalla bağlıdır. Çubuk yatay konumdan ilk hızsız harekete bırakılıyor. Çubuğun

- yatayla θ açısı yaptığı andaki açısal ivmesini
- yeni harekete bırakıldığı andaki mafsal tepkisini bulunuz.

Çözüm:



a)

$$M_{\Delta} = I_{\Delta} \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{M_{\Delta}}{I_{\Delta}}$$

$$M_{\Delta} = mg \frac{L}{2} \cos \theta, \quad I_{\Delta} = \frac{1}{3} mL^2$$

$$\alpha = \frac{mg \frac{L}{2} \cos \theta}{\frac{1}{3} mL^2}, \quad \boxed{\alpha = \frac{3g}{2L} \cos \theta}$$

b)

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_G$$

Çubuk harekete yeni bırakıldığı anda açısal hızı sıfır olduğundan kütle merkezinin ivmesinin yatay bileşeni sıfırdır.

$$\vec{a}_G = -\frac{L}{2} \alpha \vec{j}$$

$$\theta = 0 \text{ da } \alpha = \frac{3g}{2L}, \quad \vec{a}_G = -\frac{3g}{4} \vec{j}$$

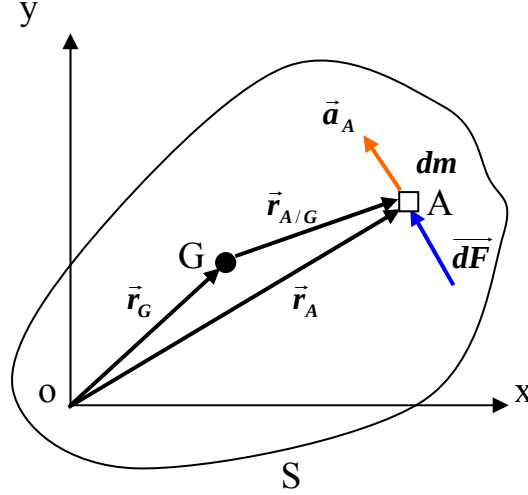
$\sum \vec{F} = m \vec{a}_G$ denkleminde toplam kuvvetle ivme aynı yönde olması gerekir.

Cisme yatay doğrultuda başka aktif kuvvet etkimediğinden mafsal tepkisi de düşey doğrultuda olmalıdır.

$$\vec{R}_A - mg \vec{j} = m \vec{a}_G \quad , \quad \vec{R}_A - mg \vec{j} = m \left(-\frac{3g}{4}\right) \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{R}_A = \frac{1}{4} mg \vec{j}}$$

6.6 Rijid cismin genel düzlemsel hareketinin kinetiği



Maddesel noktanın hareketi için geçerli olan

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

denklemini Rijid cismin bir diferansiyel kütlesine uygulanırsa

$$\vec{dF} = \vec{a}_A dm$$

yazılabilir. Bu denklemin her iki tarafı diferansiyel kütlenin yer vektörü ile soldan vektörel çarpılır ve cismin tüm kütlesi boyunca integre edilirse rijid cisme uygulanan moment ve cismin açısal hareketleri ile ilgili denklemler elde edilir.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_G + \vec{a}_{A/G}$$

$$\vec{r}_{A/G} \wedge \vec{dF} = \vec{r}_{A/G} \wedge \vec{a}_A dm$$

$$\int_S \vec{r}_{A/G} \wedge \vec{dF} = \int_S \vec{r}_{A/G} \wedge (\vec{a}_G + \vec{a}_{A/G}) dm$$

$$\vec{M}_z \vec{k} = \int_S \vec{r}_{A/G} \wedge \vec{dF}$$

$$\vec{M}_z \vec{k} = \left(\int_S \vec{r}_{A/G} dm \right) \wedge \vec{a}_G + \int_S \vec{r}_{A/G} \wedge \vec{a}_{A/G} dm$$

sağ taraftaki birinci integral kütle merkezinin formülünden dolayı sıfır olur. İkinci integral için

$$\vec{a}_{A/G} = \alpha \vec{k} \wedge (x \vec{i} + y \vec{j}) + \omega \vec{k} \wedge [\omega \vec{k} \wedge (x \vec{i} + y \vec{j})]$$

$$\vec{a}_{A/G} = -y \alpha \vec{i} + x \alpha \vec{j} + \omega \vec{k} \wedge (x \omega \vec{j} - y \omega \vec{i})$$

$$\vec{a}_{A/G} = -y \alpha \vec{i} + x \alpha \vec{j} - x \omega^2 \vec{i} - y \omega^2 \vec{j}$$

$$\vec{r}_{A/G} \wedge \vec{a}_{A/G} = (x \vec{i} + y \vec{j}) \wedge (-y \alpha \vec{i} + x \alpha \vec{j} - x \omega^2 \vec{i} - y \omega^2 \vec{j})$$

$$\vec{r}_{A/G} \wedge \vec{a}_{A/G} = x^2 \alpha \vec{k} - xy \omega^2 \vec{k} + y^2 \alpha \vec{k} + xy \omega^2 \vec{k}$$

$$\vec{r}_{A/G} \wedge \vec{a}_{A/G} = (x^2 + y^2) \alpha \vec{k}$$

$$\sum M_G \vec{k} = \int_S (x^2 + y^2) \alpha \vec{k} dm$$

burada $I_G = \int_S (x^2 + y^2) dm$ dır.

Böylece genel düzlemsel harekette moment ve açısal ivme arasındaki

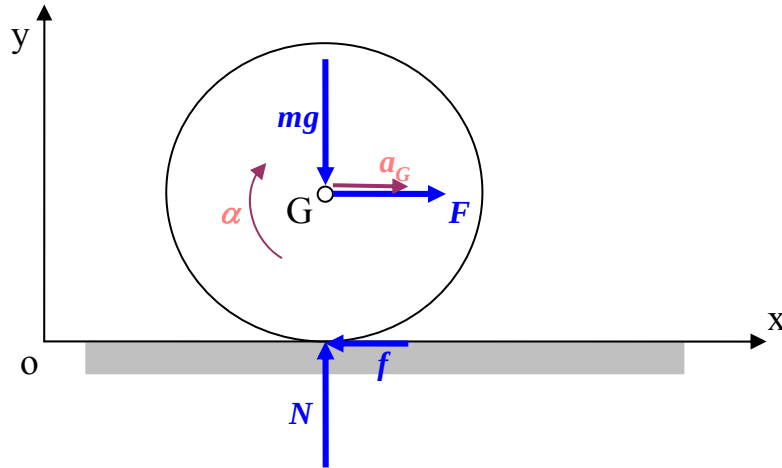
$$\boxed{\sum M_G = I_G \alpha}$$

bağıntısı elde edilir.

Problem 6.7.1

$R = 60 \text{ cm}$. Yarıçaplı $m = 10 \text{ kg}$. kütleli homojen dairesel levha kaymadan yuvarlanma hareketi yapmaktadır. Levhanın merkezinin ivmesinin 5 m/s^2 olması için merkezine uygulanan yatay doğrultudaki F kuvvetini ve gerekli olan en düşük sürtünme katsayısını bulunuz.

Çözüm:



$$\sum M_G = I_G \alpha, \quad \sum \vec{F} = m \vec{a}_G$$

$$a_G = R \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{a_G}{R}$$

$$I_G = \frac{1}{2} m R^2, \quad \sum M_G = f R$$

$$\sum M_G = f R = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a_G}{R} \Rightarrow f = \frac{1}{2} m a_G \Rightarrow f = 25 \text{ Newton}$$

$$F - f = m a_G \Rightarrow F = \frac{3}{2} m a_G \Rightarrow \boxed{F = 75 \text{ Newton}}$$

$$f = \mu N \Rightarrow \mu = \frac{f}{N}$$

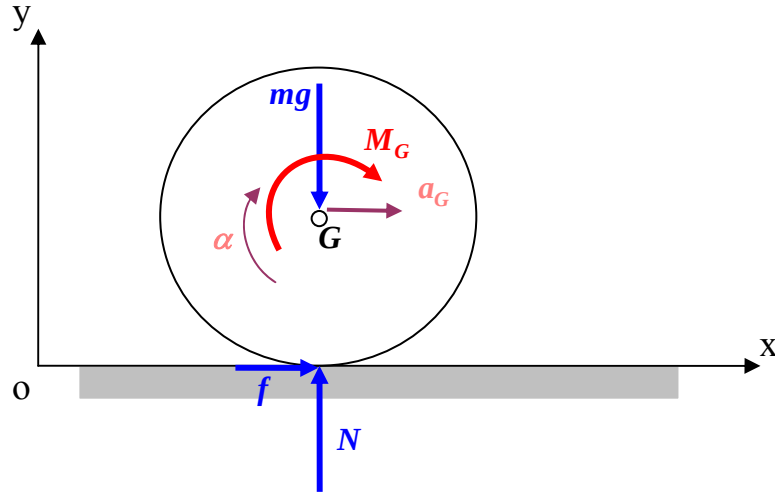
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg = 98,1 \text{ Newton}$$

$$\mu = \frac{25}{98,1}, \quad \boxed{\mu = 0,255}$$

Problem 6.7.2

$R = 60\text{ cm}$. Yarıçaplı $m = 10\text{ kg}$. kütleli homojen dairesel levha kaymadan yuvarlanma hareketi yapmaktadır. Levhanın merkezinin ivmesinin 5 m/s^2 olması için merkezine uygulanan Momentin şiddetini ve gerekli olan en düşük sürtünme katsayısını bulunuz.

Çözüm:



$$\sum M_G = I_G \alpha, \quad \sum \vec{F} = m \vec{a}_G$$

$$a_G = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{a_G}{R}$$

$$I_G = \frac{1}{2}mR^2, \quad \sum M_G = M_G - fR$$

$$\sum M_G = M_G - fR = \frac{1}{2}mR^2 \frac{a_G}{R} \Rightarrow M_G = \frac{1}{2}mRa_G + fR$$

$$f = ma_G \Rightarrow f = 50 \text{ Newton}$$

$$M_G = \frac{1}{2}10 * 0,6 * 5 + 50 * 0,6, \quad M_G = 45 \text{ Nm.}$$

$$f = \mu N \Rightarrow \mu = \frac{f}{N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg = 98,1 \text{ Newton}$$

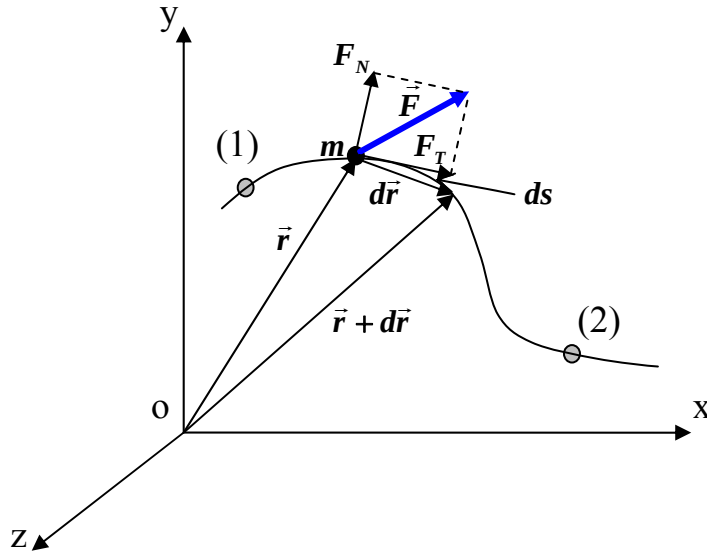
$$\mu = \frac{50}{98,1}, \quad \boxed{\mu = 0,51}$$

BÖLÜM 7

İŞ VE ENERJİ İLKESİ

7.1 Maddesel noktanın hareketinde iş ve enerji ilkesi

Bir maddesel noktaya etki eden kuvvetin maddesel noktanın yer değiştirmesinde yaptığı işi bulabilmek için aşağıdaki şekil çizilebilir.



Burada m kütlesi $d\vec{r}$ kadar yer değiştirme yaptığında etki eden $\vec{F}$ kuvvetinin yaptığı iş $d\tau = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ dır.

M kütlesi (1) konumundan (2) konumuna geldiğinde etki eden $\vec{F}$ kuvvetinin yaptığı iş ise $\tau_{(1) \rightarrow (2)} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

şeklinde integral ile hesaplanır. Burada $\vec{F} = F_T \vec{T} + F_N \vec{N}$ $d\vec{r} = ds \vec{T}$ şeklinde yazılabileceğinden bir $\vec{F}$ kuvvetin işi $\tau_{(1) \rightarrow (2)} = \int_{(1)}^{(2)} F_T \cdot ds$

şeklinde de hesaplanabilir.

Bir maddesel noktanın hareketinin teğet doğrultusundaki denklemi

$$F_T = m a_T$$

Burada a_T yerine $\frac{VdV}{ds}$ yazarak

$$F_T = m \frac{VdV}{ds}, \quad F_T ds = VdV$$

elde edilen denklemin her iki tarafı (1) konumundan (2) konumuna integre

edilirse
$$\int_{(1)}^{(2)} F_T ds = \int_{(1)}^{(2)} m V dV$$

Burada
$$\tau_{(1) \rightarrow (2)} = \int_{(1)}^{(2)} F_T ds$$

Olduğundan
$$\tau_{(1) \rightarrow (2)} = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2$$

denklemini elde edilir. Elde edilen $\frac{1}{2} m V^2$ ifadesine V hızındaki m kütleli maddesel noktanın kinetik enerjisi denir ve T ile gösterilir. $T = \frac{1}{2} m V^2$

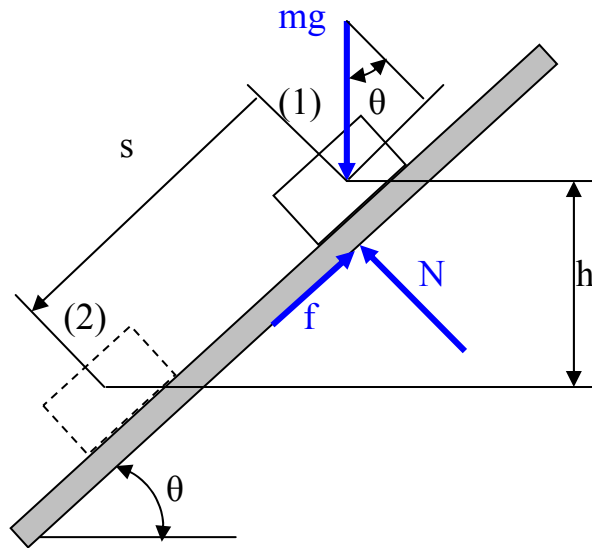
Bu şekilde bulunan
$$\tau_{(1) \rightarrow (2)} = T_2 - T_1$$

denklemini iş ve enerji ilkesi denir. Bir maddesel noktanın (1) konumundan (2) konumuna hareketinde maddesel noktaya etki eden kuvvetlerin yaptığı işler toplamı maddesel noktanın bu konumlar arasındaki kinetik enerji farkına eşittir. Kinetik enerji maddesel noktanın hareket ettiği yola bağlı değildir. Sadece son ve ilk konumdaki hızlara bağlıdır. Etki eden kuvvetlerin yaptığı işler ise mekanik enerjinin korunmadığı durumlarda yola bağlıdır.

Problem 7.1.1

θ eğim açılı eğik düzlem üzerinde bırakılan bloğun s kadar yol aldıktan sonraki hızını bulunuz.

Çözüm :



$$\tau_{(1) \rightarrow (2)} = T_2 - T_1, \quad \tau_{(1) \rightarrow (2)} = (m g \sin \theta) s - f s, \quad T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m V^2, \quad (m g \sin \theta) s - f s = \frac{1}{2} m V^2, \quad V = \sqrt{2(g \sin \theta - \frac{f}{m}) s}$$

7.1.1 Mekanik enerjinin korunumu ve potansiyel enerji:

Bir kuvvet alanı

$$\vec{F} = -\nabla U$$

şeklinde yazılabiliyorsa buradaki kuvvete korunumlu kuvvet U ya ise potansiyel enerji denir.

Kartezyen koordinat sisteminde

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$\text{ile } \tau_{(1) \rightarrow (2)} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{denklemine gidilirse}$$

$$\tau_{(1) \rightarrow (2)} = - \int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right)$$

$$\tau_{(1) \rightarrow (2)} = - \int_{(1)}^{(2)} dU$$

$$\tau_{(1) \rightarrow (2)} = U_1 - U_2$$

korunumlu kuvvetlerde bir kuvvetin işinin Potansiyel enerji farkının negatifi ile yapılabileceği görülür. Bu elde edilen denklem iş ve enerji denkleminde bir kuvvetin işi yerine yazılırsa

$$U_1 - U_2 = T_2 - T_1$$

veya

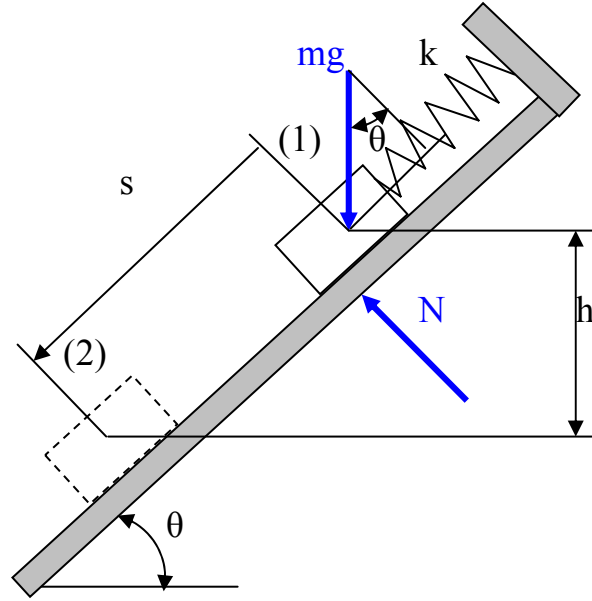
$$U_1 + T_1 = U_2 + T_2$$

mekanik enerjinin korunum denklemi elde edilir.

Problem 7.1.1.1

θ eğim açılı eğik düzlem üzerinde bırakılan bloğun durana kadar aldığı s yolunu bulunuz. Cisim ilk harekete bırakıldığında yay katsayısı k olan yay doğal uzunluğundadır.

Çözüm :

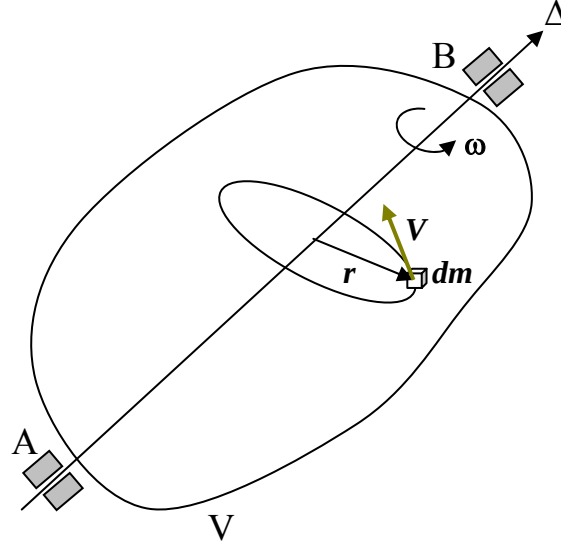


$$U_1 - U_2 = T_2 - T_1, \quad U_1 - U_2 = mgh - \frac{1}{2}ks^2, \quad h = s \sin \theta, \quad T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}mV^2, \quad mgs \sin \theta - \frac{1}{2}ks^2 = \frac{1}{2}mV^2$$

durduğu anda hızı sıfırdır. $mgs \sin \theta - \frac{1}{2}ks^2 = 0 \Rightarrow \boxed{s = \frac{2mg}{k} \sin \theta}$

7.2 Rijid cismin sabit bir eksen etrafında dönmesinde kinetik enerji hesabı



Rijid cisme ait bir diferansiyel kütlenin kinetik enerjisi

$$dT = \frac{1}{2} V^2 dm$$

Sabit bir eksen etrafında dönme hareketinde

$$V = r \omega$$

olduğundan

$$dT = \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm$$

yazılabilir. Bu diferansiyel kinetik enerjinin cismin tüm V hacmi üzerinde integrali alınarak toplam kinetik enerji bulunur.

$$T = \int_V \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm$$

integral içindeki sabitler dışarı alınarak elde edilen

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V r^2 dm$$

denkleminde

$$I_\Delta = \int_V r^2 dm$$

ifadesi Δ eksenine göre cismin atalet momenti olduğundan sabit bir eksen etrafında dönme hareketinde rijid cismin kinetik enerjisi

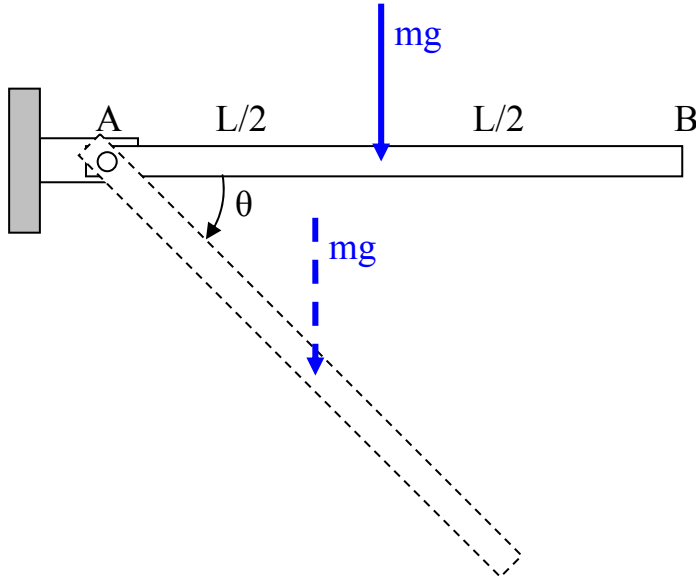
$$T = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

şeklinde hesaplanır.

Problem 7.2.1

Uzunluğu L ve kütlesi m olan AB çubuğu A ucundan silindirik mafsallı olarak düşey düzlemde hareket edebilmektedir. AB çubuğu yatay konumda ilk hızsız harekete bırakılıyor. Yatayla θ açısı yaptığı andaki açısal hızını bulunuz.

Çözüm:



$$U_1 - U_2 = T_2 - T_1$$

$$U_1 - U_2 = m g \frac{L}{2} \sin \theta$$

$$T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

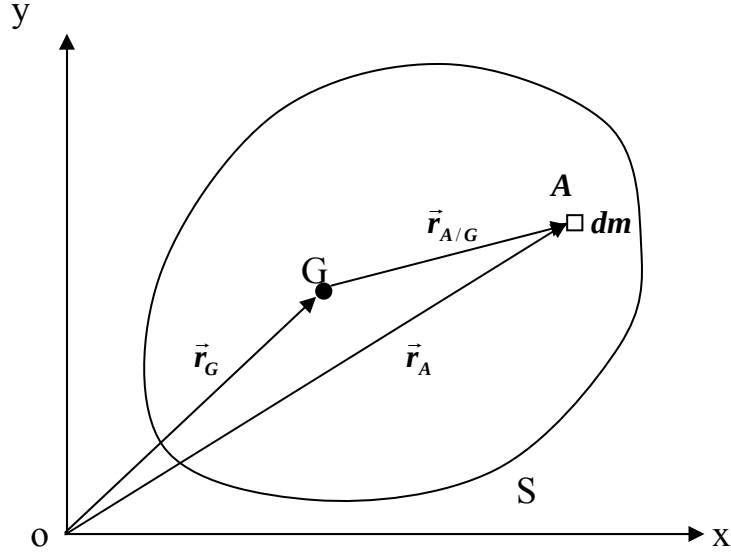
$$m g \frac{L}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

$$I_A = \frac{1}{3} m L^2$$

$$m g \frac{L}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m L^2 \omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L} \sin \theta}$$

7.3 Rijid cismin genel düzlemsel hareketinde kinetik enerji hesabı



$$dT = \frac{1}{2} V_A^2 dm$$

$$V_A^2 = \vec{V}_A \cdot \vec{V}_A$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_G + \vec{V}_{A/G}$$

$$V_A^2 = (\vec{V}_G + \vec{V}_{A/G}) \cdot (\vec{V}_G + \vec{V}_{A/G})$$

$$T = \frac{1}{2} \int_S (V_G^2 + V_{A/G}^2 + 2\vec{V}_G \cdot \vec{V}_{A/G}) dm$$

Burada $\vec{V}_G \cdot \int_S \vec{V}_{A/G} dm = 0$ ve $V_{A/G}^2 = r_{A/G}^2 \omega^2$ olduğundan toplam kinetik enerji

$$T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \int_S r_{A/G}^2 dm$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\int_S r_{A/G}^2 dm = I_G$ cismin kütle merkezinden geçen

ve hareket düzlemine dik eksene göre atalet momentini gösterdiğinden genel düzlemsel harekette kinetik enerji

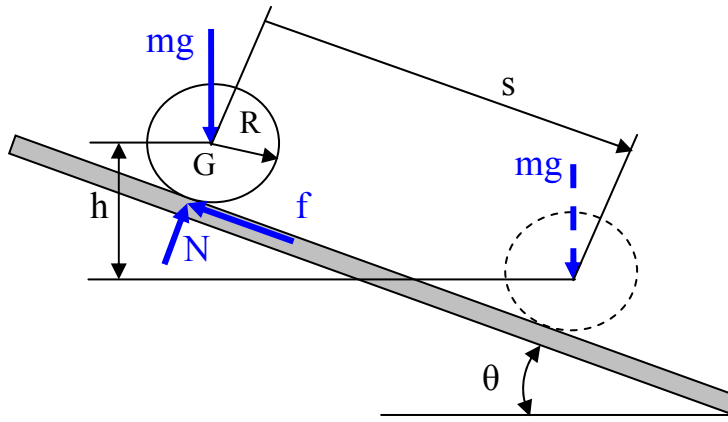
$$T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

formülü ile hesaplanır.

Problem 7.3.1

R yarıçaplı ve m kütleli bir disk θ eğim açılı eğik düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanma hareketi yapmaktadır. Disk eğik düzlem üzerinde ilk hızsız harekete bırakıldığında diskin n sayıda tam devir yaptığı andaki açısal hızı ne olur ?

Çözüm:



$$U_1 - U_2 = T_2 - T_1$$

Kaymadan yuvarlanmada sürtünme kuvveti iş yapmaz . Çünkü kayma olayındaki gibi sürekli aynı bölgede temas yoktur. Normal kuvvet harekete dik olduğu için iş yapmaz.

$$U_1 - U_2 = mgh \quad , \quad h = s \sin \theta \quad , \quad s = n * 2\pi R \quad , \quad s = 2n\pi R$$

$$U_1 - U_2 = 2mgn\pi R \sin \theta \quad , \quad T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

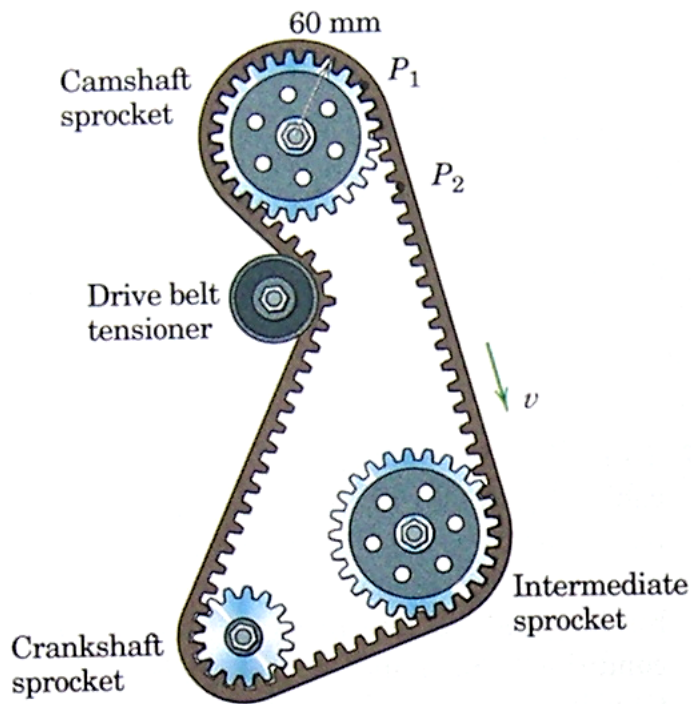
Kaymadan yuvarlanma hareketinde $V_G = R\omega$ dır.

$$I_G = \frac{1}{2} m R^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m (R\omega)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \quad , \quad T_2 = \frac{3}{4} m R^2 \omega^2$$

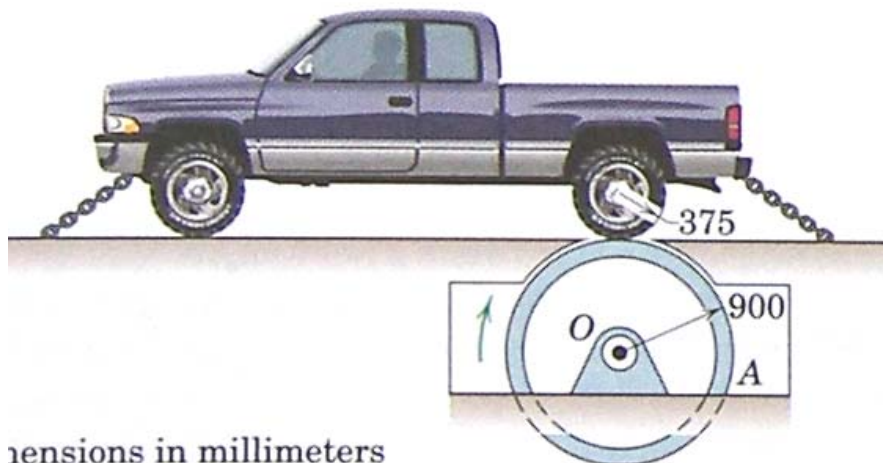
$$2mgn\pi R \sin \theta = \frac{3}{4} m R^2 \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{8gn\pi}{3R} \sin \theta}}$$

Dinamiğin uygulama alanları ile ilgili problemler

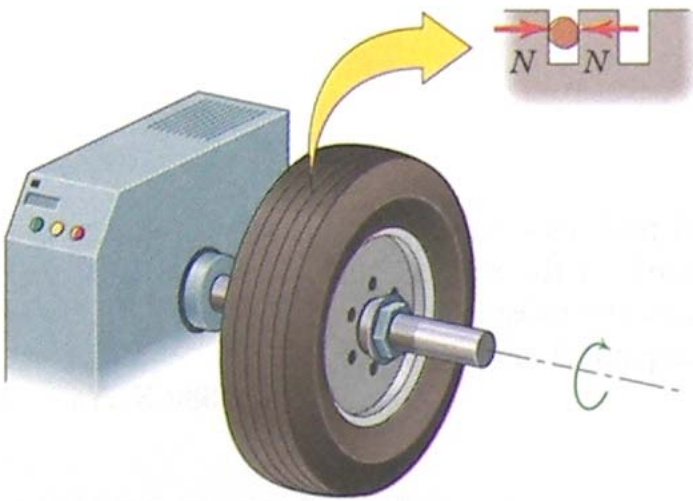


Problem 2/122

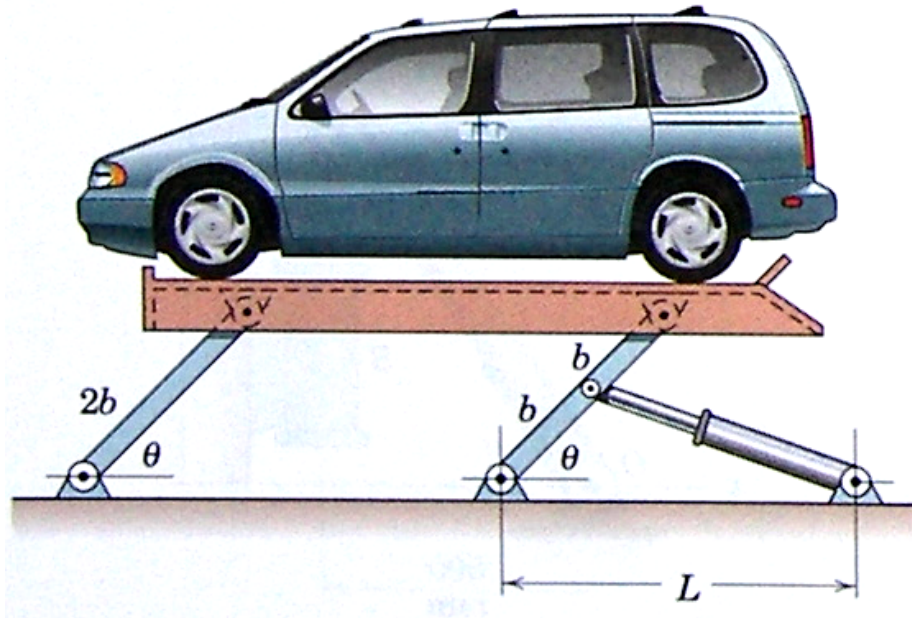
- The automotive dynamometer is able to simulate road conditions for an acceleration of $0.5g$ for the loaded pickup truck with a total mass of 2.8 Mg . Calculate the required moment of inertia of the dynamometer drum about its center O assuming that the drum turns freely during the acceleration phase of the test.



A tire with a diameter of 700 mm is spun up to 4000 rev/min on an off-the-car tire balance machine. A small round pebble is flung from a tread groove at this rotational speed. Estimate the magnitude N of the normal forces which were being exerted on the 10-g pebble by the sides of the groove if the coefficient of static friction between the pebble and the rubber is 0.95. Assume a rigid tread structure and neglect the effect of the weight of the pebble.



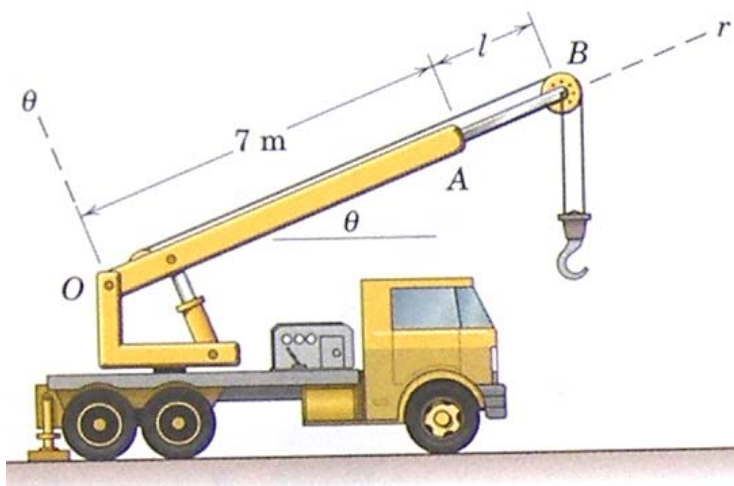
- 14 Derive an expression for the upward velocity v of the car hoist in terms of θ . The piston rod of the hydraulic cylinder is extending at the rate $\dot{s}$.



The boom OAB pivots about point O , while section AB simultaneously extends from within section OA . Determine the velocity and acceleration of the center B of the pulley for the following conditions: $\theta = 20^\circ$, $\dot{\theta} = 5 \text{ deg/s}$, $\ddot{\theta} = 2 \text{ deg/s}^2$, $l = 2 \text{ m}$, $\dot{l} = 0.5 \text{ m/s}$, $\ddot{l} = -1.2 \text{ m/s}^2$. The quantities $\dot{l}$ and $\ddot{l}$ are the first and second time derivatives, respectively, of the length l of section AB .

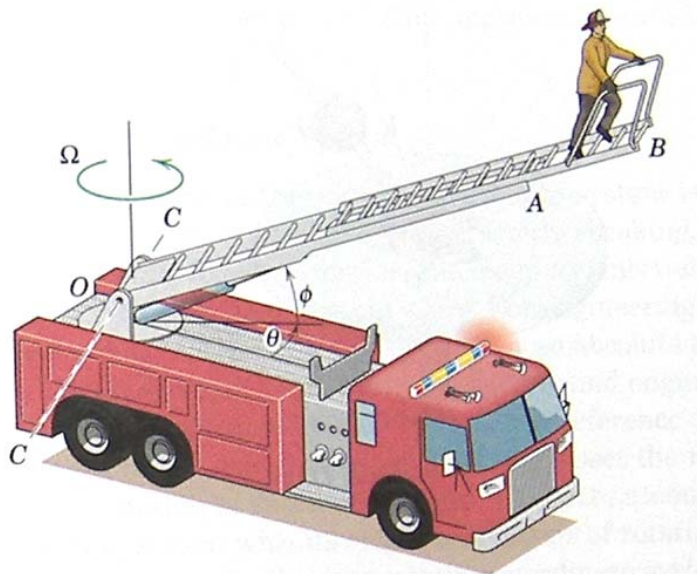
$$\text{Ans. } \mathbf{v} = 0.5\mathbf{e}_r + 0.785\mathbf{e}_\theta \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a} = -1.269\mathbf{e}_r + 0.401\mathbf{e}_\theta \text{ m/s}^2$$



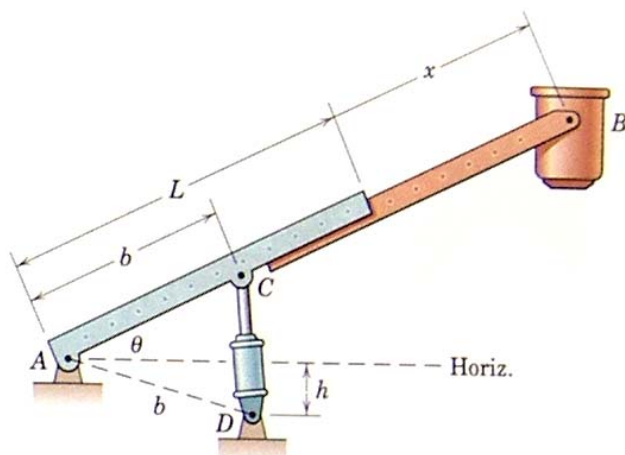
- 183** The base structure of the firetruck ladder rotates about a vertical axis through O with a constant angular velocity $\Omega = 10 \text{ deg/s}$. At the same time, the ladder unit OB elevates at a constant rate $\dot{\phi} = 7 \text{ deg/s}$, and section AB of the ladder extends from within section OA at the constant rate of 0.5 m/s . At the instant under consideration, $\phi = 30^\circ$, $\overline{OA} = 9 \text{ m}$, and $\overline{AB} = 6 \text{ m}$. Determine the magnitudes of the velocity and acceleration of the end B of the ladder.

Ans. $v = 2.96 \text{ m/s}$, $a = 0.672 \text{ m/s}^2$



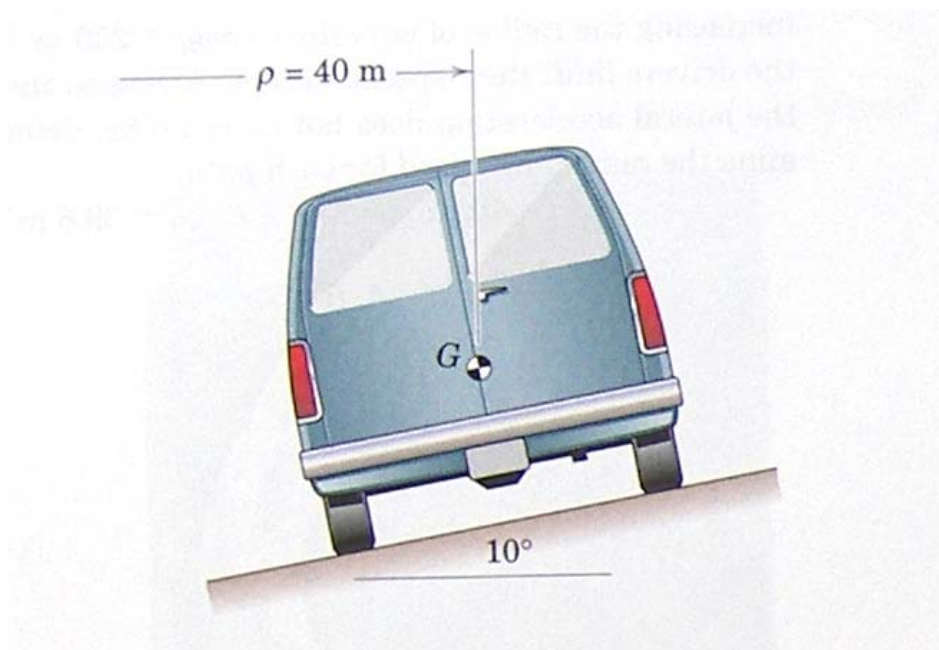
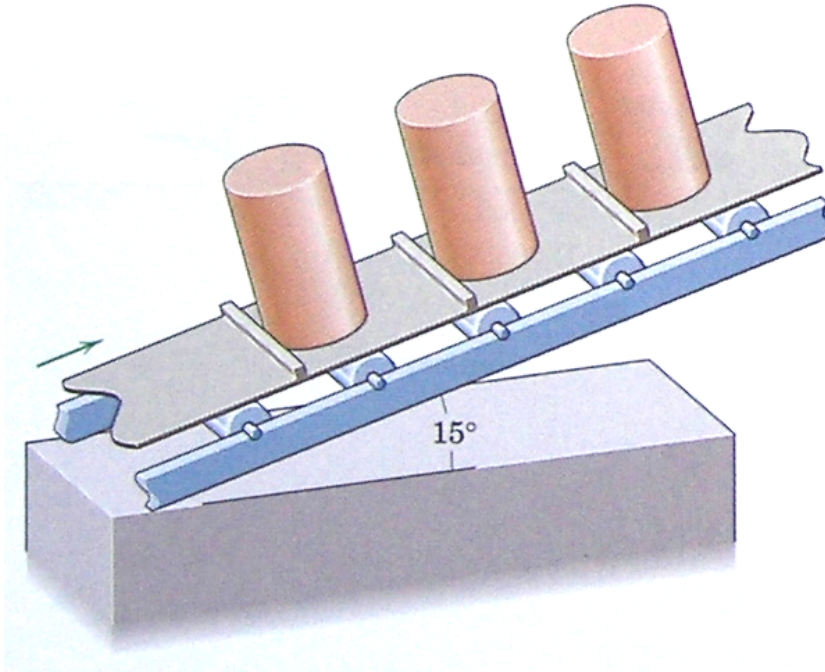
- 5/49** It is desired to design a system for controlling the rate of extension $\dot{x}$ of the fire-truck ladder during elevation of the ladder so that the bucket B will have a vertical motion only. Determine $\dot{x}$ in terms of the elongation rate $\dot{c}$ of the hydraulic cylinder for given values of θ and x .

Ans. $\dot{x} = \frac{L+x}{b} \frac{\tan \theta}{\cos \frac{1}{2}(\theta + \delta)} \dot{c}$, where $\delta = \sin^{-1}(h/b)$



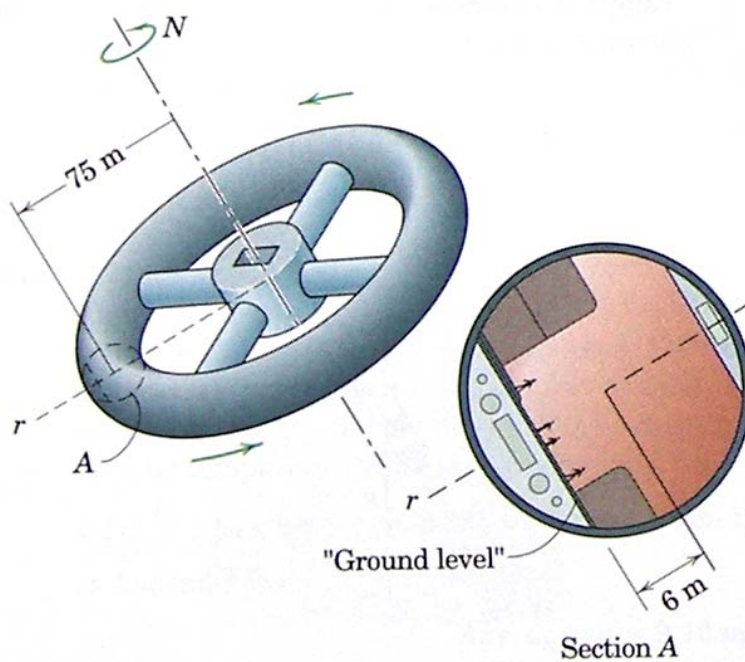
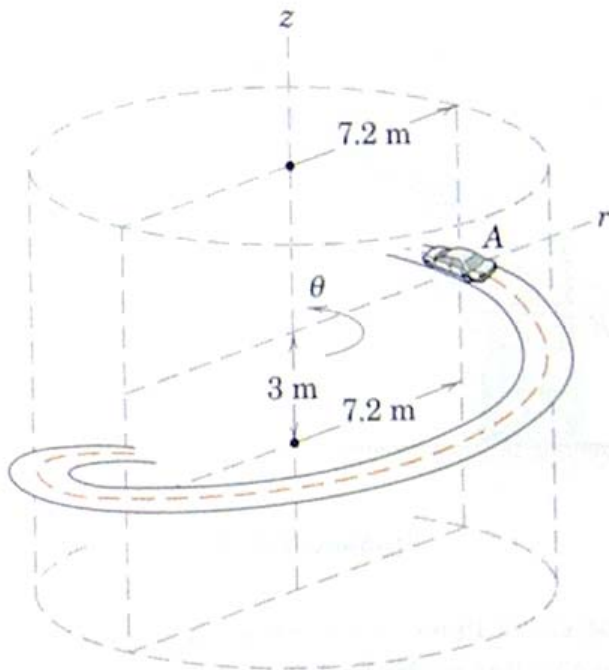
6/17 A cleated conveyor belt transports solid homogeneous cylinders up a 15° incline. The diameter of each cylinder is half its height. Determine the maximum acceleration which the belt may have without tipping the cylinders as it starts.

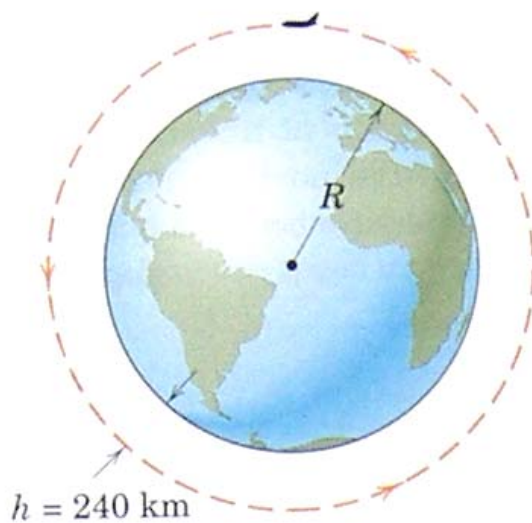
Ans. $a = 0.224g$



- 177** The car A is ascending a parking-garage ramp in the form of a cylindrical helix of 7.2-m radius rising 3 m for each half turn. At the position shown the car has a speed of 25 km/h, which is decreasing at the rate of 3 km/h per second. Determine the r -, θ -, and z -components of the acceleration of the car.

$$\begin{aligned} \text{Ans. } a_r &= -6.58 \text{ m/s}^2 \\ a_\theta &= -0.826 \text{ m/s}^2 \\ a_z &= -0.1096 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



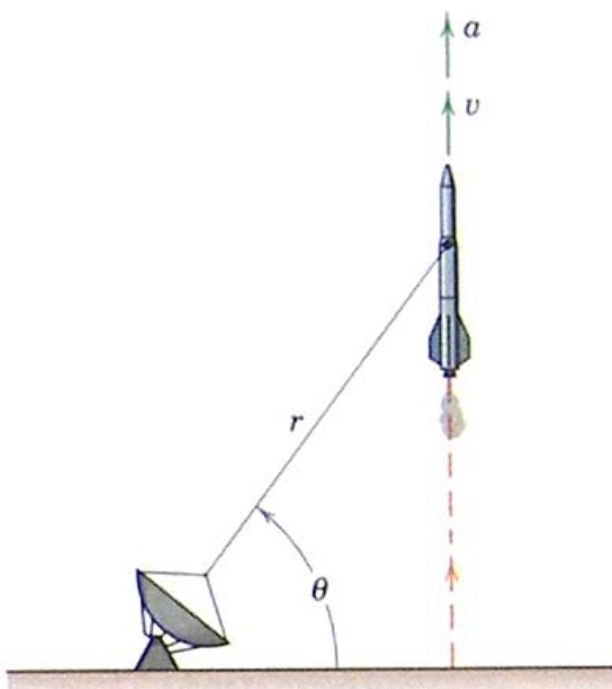


A space shuttle which moves in a circular orbit around the earth at a height $h = 240 \text{ km}$ above its surface must have a speed of $27\,995 \text{ km/h}$. Calculate the gravitational acceleration g for this altitude. The mean radius of the earth is 6371 km . (Check your answer by computing g from the gravitational law $g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2$, where $g_0 = 9.821 \text{ m/s}^2$ from Table D/2 in Appendix D.)

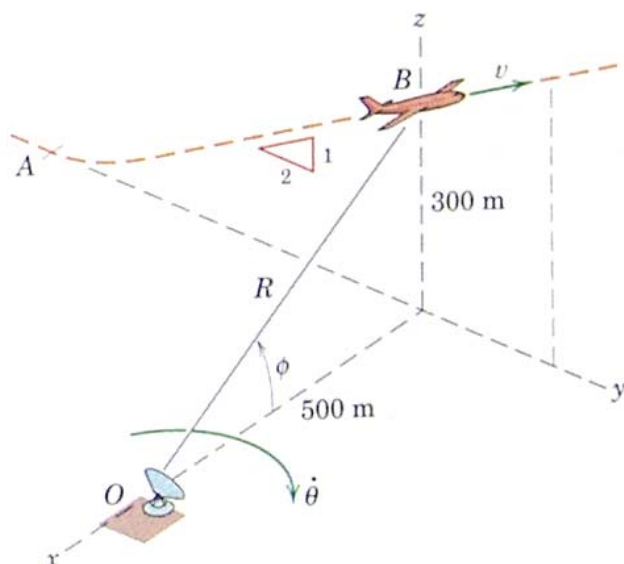
Ans. $a_n = g = 9.12 \text{ m/s}^2$

The rocket is fired vertically and tracked by the radar station shown. When θ reaches 60° , other corresponding measurements give the values $r = 9 \text{ km}$, $\ddot{r} = 21 \text{ m/s}^2$, and $\dot{\theta} = 0.02 \text{ rad/s}$. Calculate the magnitudes of the velocity and acceleration of the rocket at this position.

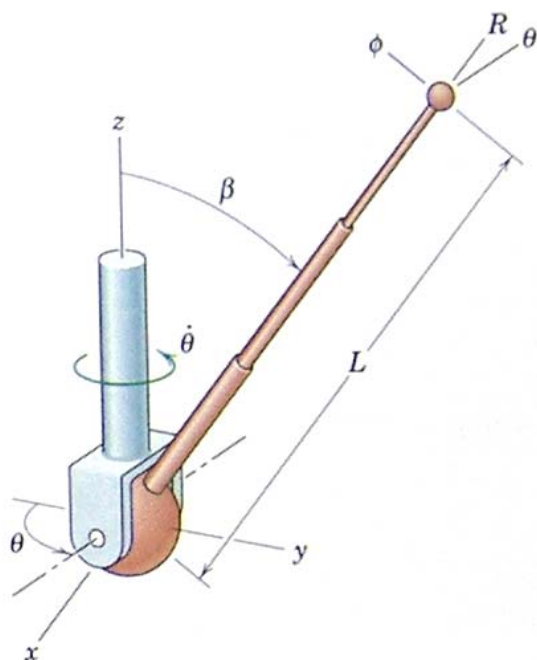
Ans. $v = 360 \text{ m/s}$, $a = 20.1 \text{ m/s}^2$



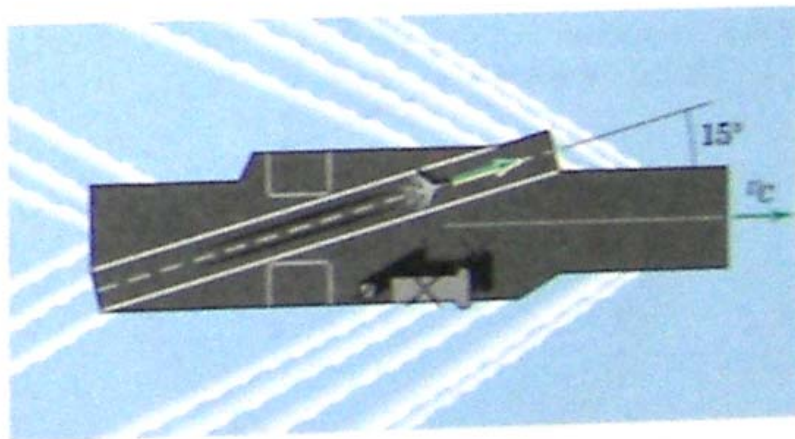
- 8 An aircraft takes off at A and climbs at a steady angle with slope of 1 to 2 in the vertical y - z plane at a constant speed $v = 400$ km/h. The aircraft is tracked by radar at O . For the position B , determine the values of $\dot{R}$, $\dot{\theta}$, and $\dot{\phi}$.



In a design test of the actuating mechanism for a telescoping antenna on a spacecraft, the supporting shaft rotates about the fixed z -axis with an angular rate $\dot{\theta}$. Determine the R -, θ -, and ϕ -components of the acceleration $\mathbf{a}$ of the end of the antenna at the instant when $L = 1.2$ m and $\beta = 45^\circ$ if the rates $\dot{\theta} = 2$ rad/s, $\dot{\beta} = \frac{3}{2}$ rad/s, and $\dot{L} = 0.9$ m/s are constant during the motion.



- 2/242** The launching catapult of the aircraft carrier gives the jet fighter a constant acceleration of 50 m/s^2 from rest relative to the flight deck and launches the aircraft in a distance of 100 m measured along the angled takeoff ramp. If the carrier is moving at a steady 30 knots ($1 \text{ knot} = 1.852 \text{ km/h}$), determine the magnitude v of the actual velocity of the fighter when it is launched.

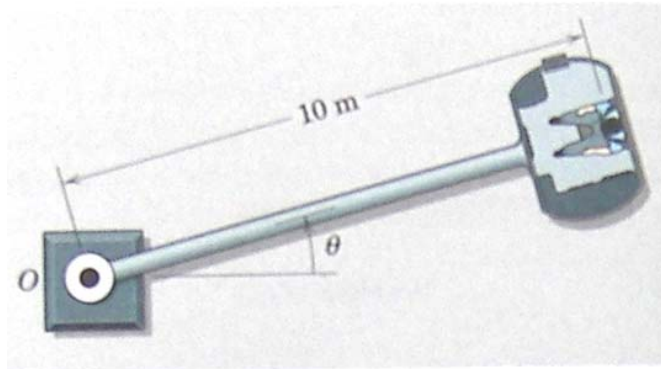


- 3/96** A fire-fighting helicopter hovers over a lake while its water bucket is immersed and filled. It then rises slightly, clears the bucket from the lake, and starts its flight essentially from rest with a horizontal acceleration a_0 . Obtain an expression for the angle θ for which $\dot{\theta}$ is a maximum. Also determine the tension T in the cable as a function of θ .



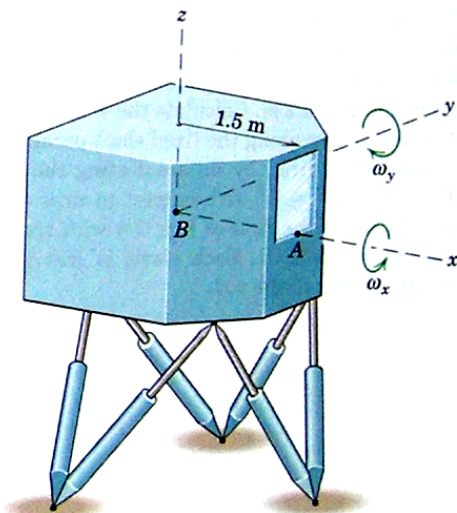
The angular displacement of the centrifuge is given by $\theta = 4[t + 30e^{-0.03t} - 30]$ rad, where t is in seconds and $t = 0$ is the startup time. If the person loses consciousness at an acceleration level of $10g$, determine the time t at which this would occur. Verify that the tangential acceleration is negligible as the normal acceleration approaches $10g$.

Ans. $t = 47.4$ s

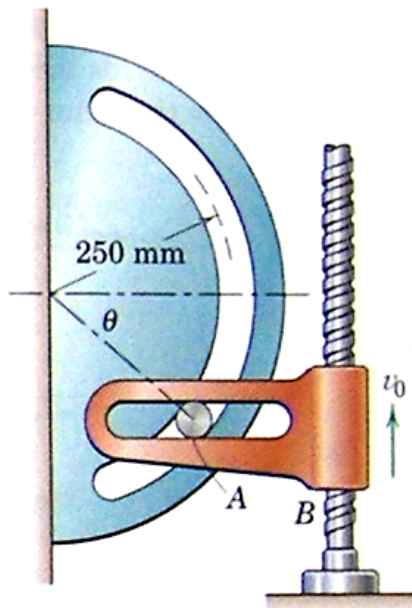


- 7/37** The flight simulator is mounted on six hydraulic actuators connected in pairs to their attachment points on the underside of the simulator. By programming the actions of the actuators, a variety of flight conditions can be simulated with translational and rotational displacements through a limited range of motion. Axes x - y - z are attached to the simulator with origin B at the center of the volume. For the instant represented, B has a velocity and an acceleration in the horizontal y -direction of 0.96 m/s and 1.2 m/s², respectively. Simultaneously, the angular velocities and their time rates of change are $\omega_x = 1.4$ rad/s, $\dot{\omega}_x = 2$ rad/s², $\omega_y = 1.2$ rad/s, $\dot{\omega}_y = 3$ rad/s², $\omega_z = \dot{\omega}_z = 0$. For this instant determine the magnitudes of the velocity and acceleration of point A .

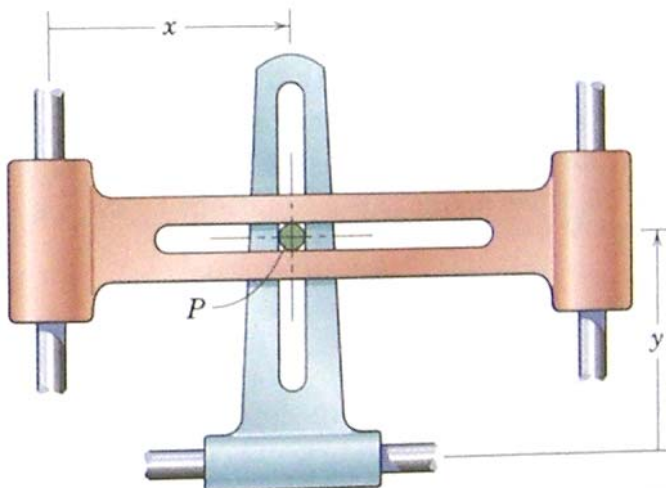
Ans. $v_A = 2.04$ m/s, $a_A = 6.23$ m/s²



- 8 In the design of a timing mechanism, the motion of the pin A in the fixed circular slot is controlled by the guide B , which is being elevated by its lead screw with a constant upward velocity $v_0 = 2 \text{ m/s}$ for an interval of its motion. Calculate both the normal and tangential components of acceleration of pin A as it passes the position for which $\theta = 30^\circ$.

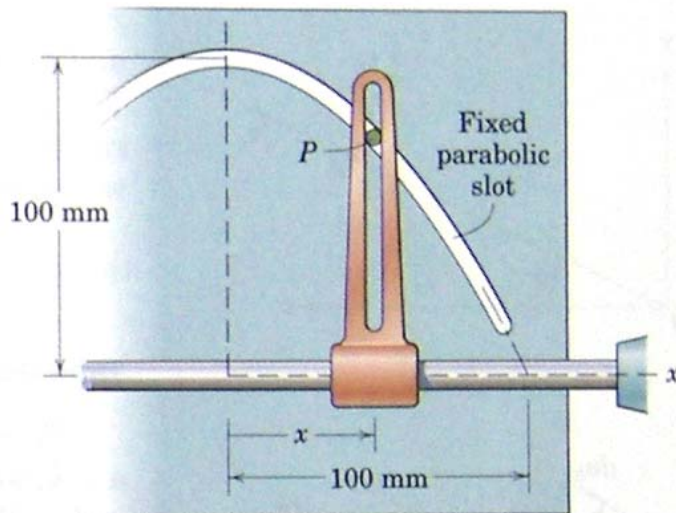


- 2/132 During a short interval the slotted guides are designed to move according to $x = 16 - 12t + 4t^2$ and $y = 2 + 15t - 3t^2$, where x and y are in millimeters and t is in seconds. At the instant when $t = 2 \text{ s}$, determine the radius of curvature ρ of the path of the constrained pin P .



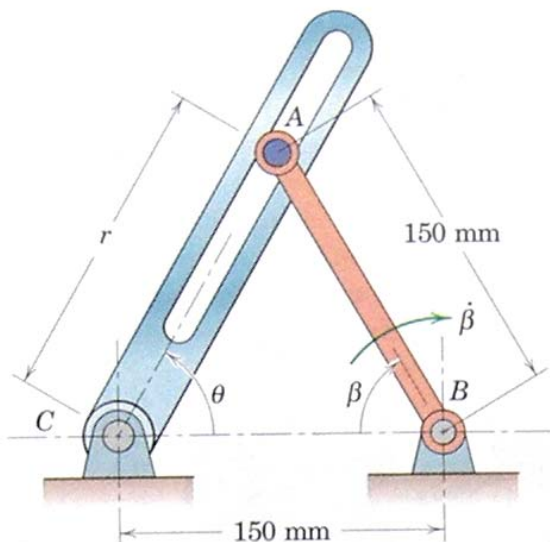
- 13 In the design of a control mechanism, the vertical slotted guide is moving with a constant velocity $\dot{x} = 150 \text{ mm/s}$ during the interval of motion from $x = -80 \text{ mm}$ to $x = +80 \text{ mm}$. For the instant when $x = 60 \text{ mm}$, calculate the n - and t -components of acceleration of the pin P , which is confined to move in the parabolic slot. From these results, determine the radius of curvature ρ of the path at this position. Verify your result by computing ρ from the expression cited in Appendix C/10.

Ans. $\rho = 190.6 \text{ mm}$



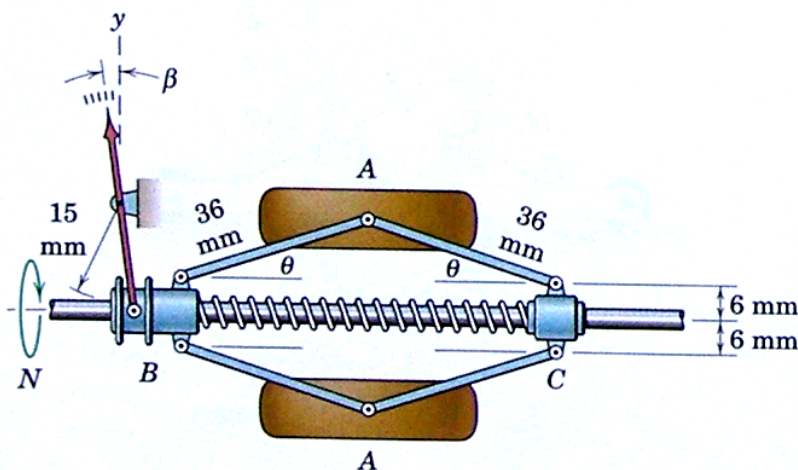
- 2/151 Link AB rotates through a limited range of the angle β , and its end A causes the slotted link AC to rotate also. For the instant represented where $\beta = 60^\circ$ and $\dot{\beta} = 0.6 \text{ rad/s}$ constant, determine the corresponding values of $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, and $\ddot{\theta}$. Make use of Eqs. 2/13 and 2/14.

Ans. $\dot{r} = 77.9 \text{ mm/s}$, $\ddot{r} = -13.5 \text{ mm/s}^2$
 $\dot{\theta} = -0.3 \text{ rad/s}$, $\ddot{\theta} = 0$



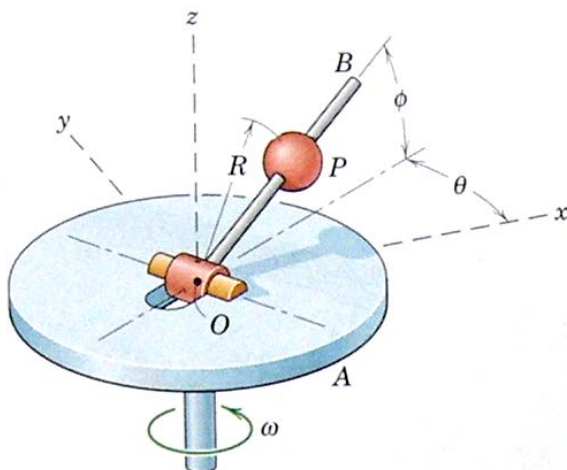
- 6/167** The mechanical tachometer measures the rotational speed N of the shaft by the horizontal motion of the collar B along the rotating shaft. This movement is caused by the centrifugal action of the two 350-g masses A , which rotate with the shaft. Collar C is fixed to the shaft. Determine the rotational speed N of the shaft for a reading $\beta = 15^\circ$. The stiffness of the spring is 900 N/m, and it is uncompressed when $\theta = 0$ and $\beta = 0$. Neglect the weights of the links.

Ans. $N = 132.8 \text{ rev/min}$

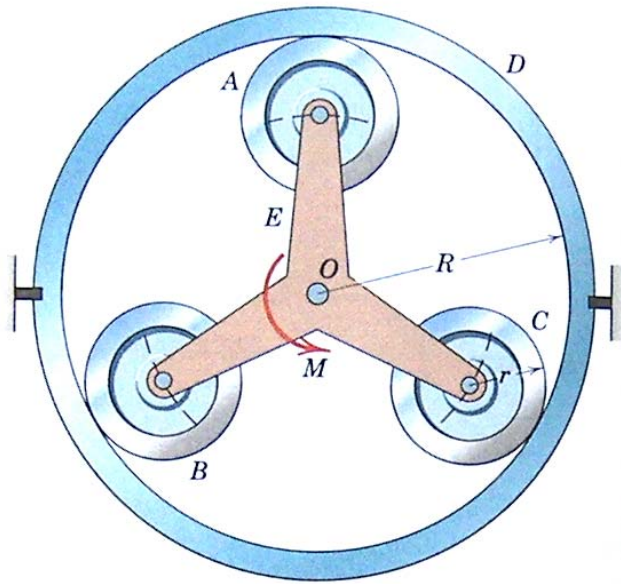


The disk A rotates about the vertical z -axis with a constant speed $\omega = \dot{\theta} = \pi/3 \text{ rad/s}$. Simultaneously, the hinged arm OB is elevated at the constant rate $\dot{\phi} = 2\pi/3 \text{ rad/s}$. At time $t = 0$, both $\theta = 0$ and $\phi = 0$. The angle θ is measured from the fixed reference x -axis. The small sphere P slides out along the rod according to $R = 50 + 200t^2$, where R is in millimeters and t is in seconds. Determine the magnitude of the total acceleration $\mathbf{a}$ of P when $t = \frac{1}{2} \text{ s}$.

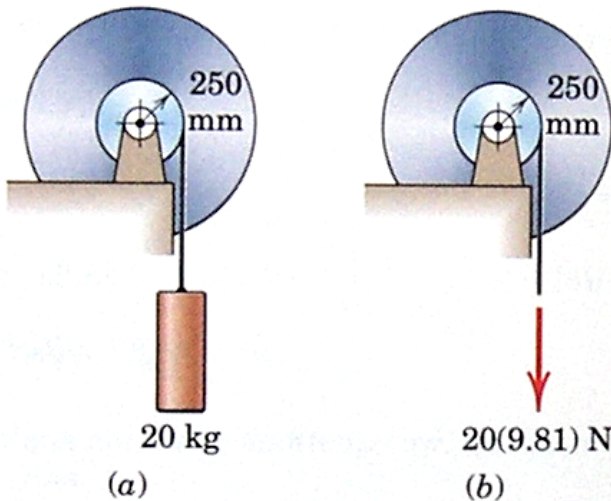
Ans. $a = 0.904 \text{ m/s}^2$



- 6/168** A planetary gear system is shown, where the gear teeth are omitted from the figure. Each of the three identical planet gears A , B , and C has a mass of 0.8 kg, a radius $r = 50$ mm, and a radius of gyration of 30 mm about its center. The spider E has a mass of 1.2 kg and a radius of gyration about O of 60 mm. The ring gear D has a radius $R = 150$ mm and is fixed. If a torque $M = 5$ N·m is applied to the shaft of the spider at O , determine the initial angular acceleration α of the spider.

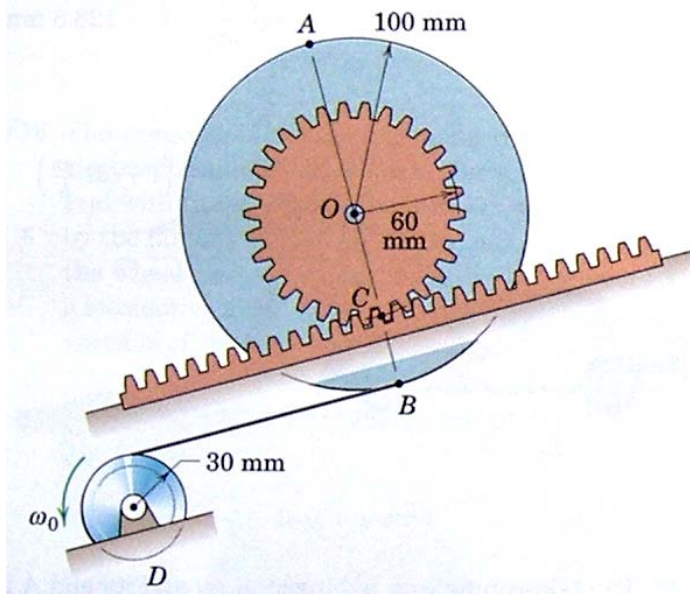


Each of the two drums and connected hubs of 250 -mm radius has a mass of 100 kg and has a radius of gyration about its center of 375 mm. Calculate the angular acceleration of each drum. Friction in each bearing is negligible.

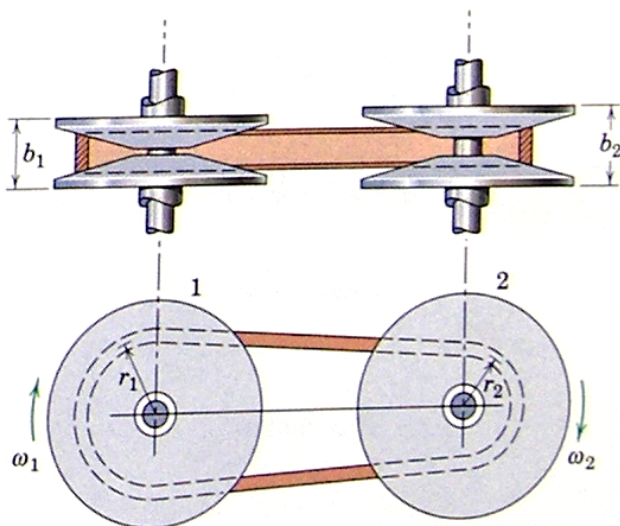


5/43 Motion of the wheel as it rolls up the fixed rack on its geared hub is controlled through the peripheral cable by the driving wheel D , which turns counterclockwise at the constant rate $\omega_0 = 4 \text{ rad/s}$ for a short interval of motion. By examining the geometry of a small (differential) rotation of line $AOCB$ as it pivots momentarily about the contact point C , determine the angular velocity ω of the wheel and the velocities of point A and the center O . Also find the acceleration of point C .

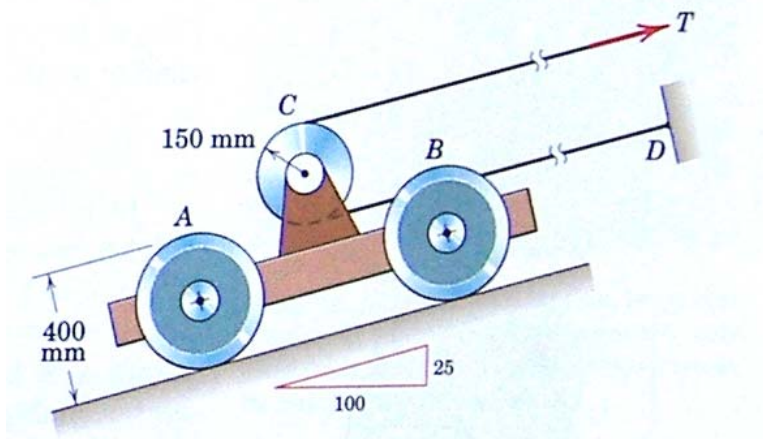
Ans. $\omega = 3 \text{ rad/s CW}$, $v_A = 480 \text{ mm/s}$
 $v_O = 180 \text{ mm/s}$, $a_C = 540 \text{ mm/s}^2$



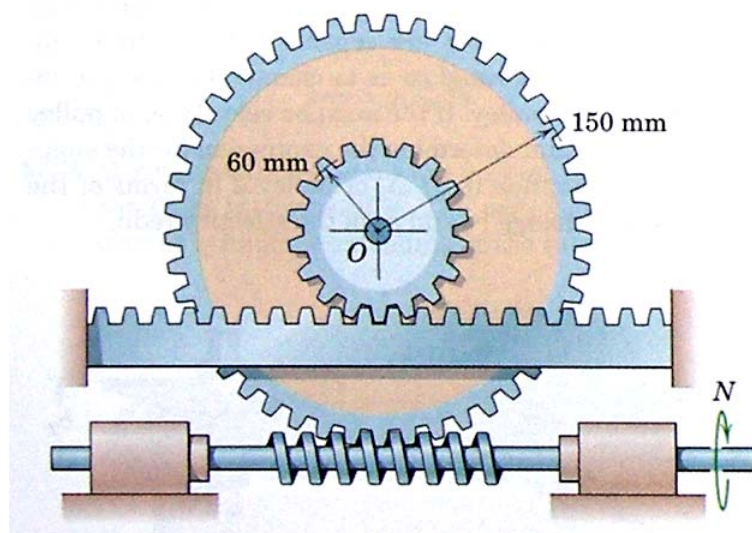
5/50 A variable-speed belt drive consists of the two pulleys each of which is constructed of two cones which turn as a unit but are capable of being drawn together or separated so as to change the effective radius of the pulley. If the angular velocity ω_1 of pulley 1 is constant, determine the expression for the angular acceleration $\alpha_2 = \dot{\omega}_2$ of pulley 2 in terms of the rates of change $\dot{r}_1$ and $\dot{r}_2$ of the effective radii.



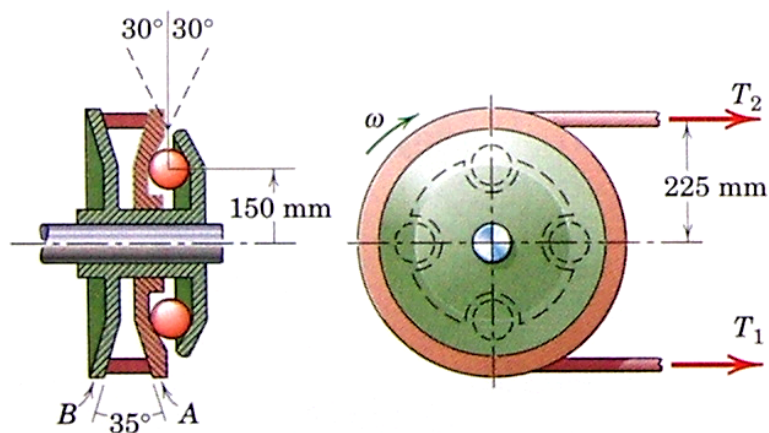
- 6/172** The vehicle is used to transport supplies to and from the bottom of the 25-percent grade. Each pair of wheels, one at A and the other at B , has a mass of 140 kg with a radius of gyration of 150 mm. The drum C has a mass of 40 kg and a radius of gyration of 100 mm. The total mass of the vehicle is 520 kg. The vehicle is released from rest with a restraining force T of 500 N in the control cable which passes around the drum and is secured at D . Determine the initial acceleration a of the vehicle. The wheels roll without slipping.



- 5/52** The two gears form an integral unit and roll on the fixed rack. The large gear has 48 teeth, and the worm turns with a speed of 120 rev/min. Find the velocity v_O of the center O of the gear.

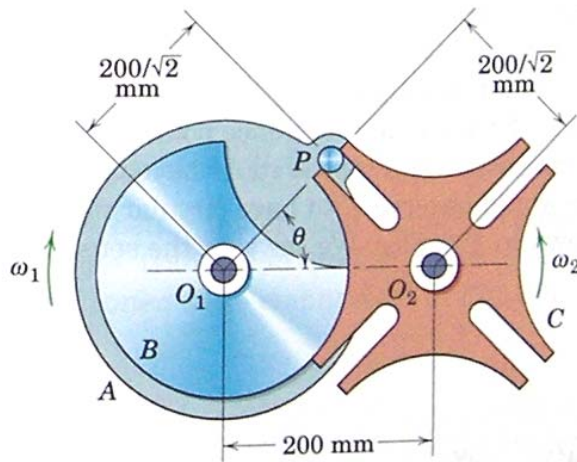


- /94** When a V-belt drives a pulley at high speed, the centrifugal action tends to lessen its contact with the pulley and hence to reduce the capacity to transmit torque. A device to compensate for this effect is shown and consists of a cage and four balls which rotate with the pulley. The balls press against the two 30° conical surfaces and force the inner side A to slide to the left toward the opposite side B , thus tightening the belt. Part A is splined to B along the hub, so it rotates with the remainder of the pulley but is free to slide on B . Compute the axial force F on A caused by the action of the balls for a speed of 600 rev/min, if the mass of each of the four balls is 2.5 kg.



- 6 The Geneva wheel is a mechanism for producing intermittent rotation. Pin P in the integral unit of wheel A and locking plate B engages the radial slots in wheel C , thus turning wheel C one-fourth of a revolution for each revolution of the pin. At the engagement position shown, $\theta = 45^\circ$. For a constant clockwise angular velocity $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ of wheel A , determine the corresponding counterclockwise angular velocity ω_2 of wheel C for $\theta = 20^\circ$. (Note that the motion during engagement is governed by the geometry of triangle O_1O_2P with changing θ .)

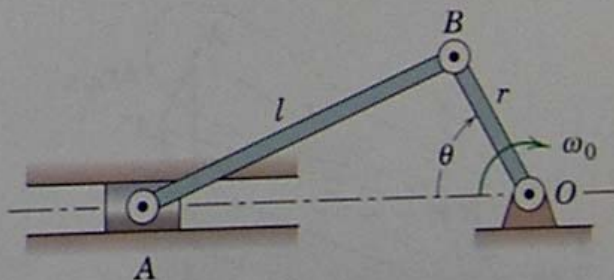
Ans. $\omega_2 = 1.923 \text{ rad/s}$



- 8 One of the most common mechanisms is the slider-crank. Express the angular velocity ω_{AB} and angular acceleration α_{AB} of the connecting rod AB in terms of the crank angle θ for a given constant crank speed ω_0 . Take ω_{AB} and α_{AB} to be positive counterclockwise.

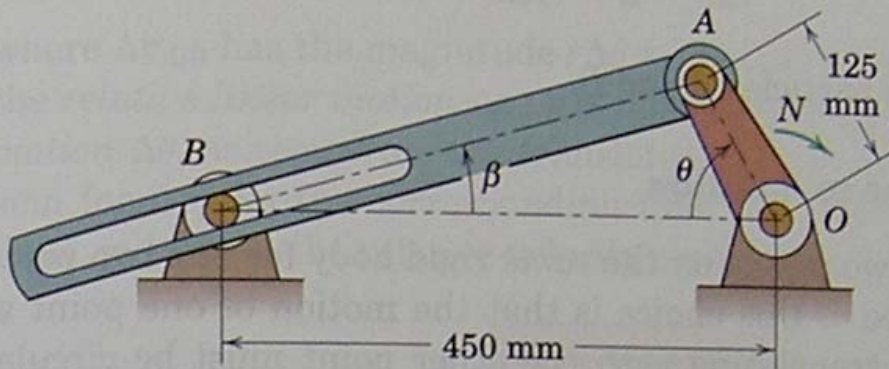
$$\text{Ans. } \omega_{AB} = \frac{r\omega_0}{l} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta}}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{r\omega_0^2}{l} \sin \theta \frac{\frac{r^2}{l^2} - 1}{\left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}$$



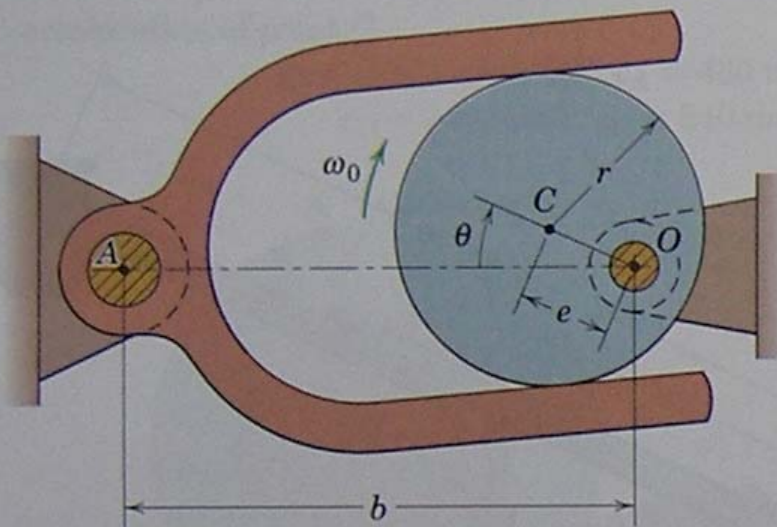
- 5/55** Angular oscillation of the slotted link is achieved by the crank OA , which rotates clockwise at the steady speed $N = 120$ rev/min. Determine an expression for the angular velocity $\dot{\beta}$ of the slotted link in terms of θ .

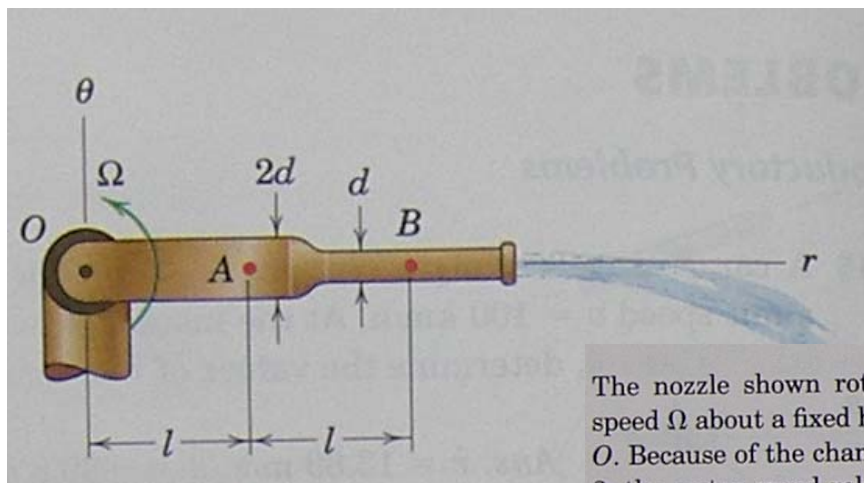
$$\text{Ans. } \dot{\beta} = 6.28 \left(\frac{\cos \theta - 0.278}{1.939 - \cos \theta} \right) \text{ rad/s}$$



- 51** The mechanism is designed to produce small oscillations of the shaft A and attached fork through the rotation of the offset circular cam, which rotates about O with a constant angular velocity ω_0 . Determine an expression for the angular velocity ω of the fork and its shaft A as a function of the cam angle θ .

$$\text{Ans. } \omega = \frac{b \cos \theta - e}{b^2 - 2be \cos \theta + e^2} e \omega_0$$

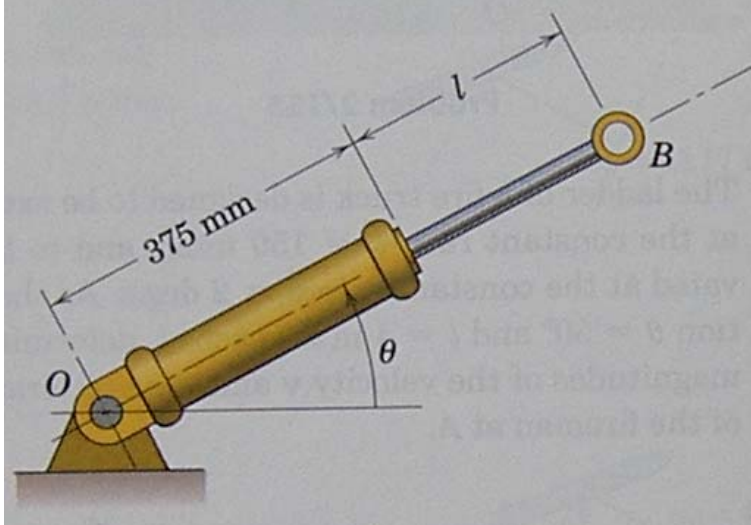




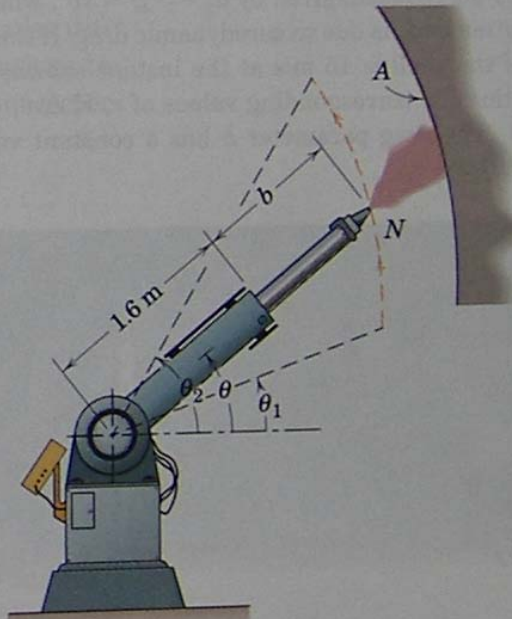
The nozzle shown rotates with constant angular speed Ω about a fixed horizontal axis through point O . Because of the change in diameter by a factor of 2, the water speed relative to the nozzle at A is v , while that at B is $4v$. The water speeds at both A and B are constant. Determine the velocity and acceleration of a water particle as it passes (a) point A and (b) point B .

Ans. (a) $\mathbf{v}_A = v\mathbf{e}_r + l\Omega\mathbf{e}_\theta$
 $\mathbf{a}_A = -l\Omega^2\mathbf{e}_r + 2v\Omega\mathbf{e}_\theta$
 (b) $\mathbf{v}_B = 4v\mathbf{e}_r + 2l\Omega\mathbf{e}_\theta$
 $\mathbf{a}_B = -2l\Omega^2\mathbf{e}_r + 8v\Omega\mathbf{e}_\theta$

As the hydraulic cylinder rotates around O , the exposed length l of the piston rod P is controlled by the action of oil pressure in the cylinder. If the cylinder rotates at the constant rate $\dot{\theta} = 60$ deg/s and l is decreasing at the constant rate of 150 mm/s, calculate the magnitudes of the velocity $\mathbf{v}$ and acceleration $\mathbf{a}$ of end B when $l = 125$ mm.

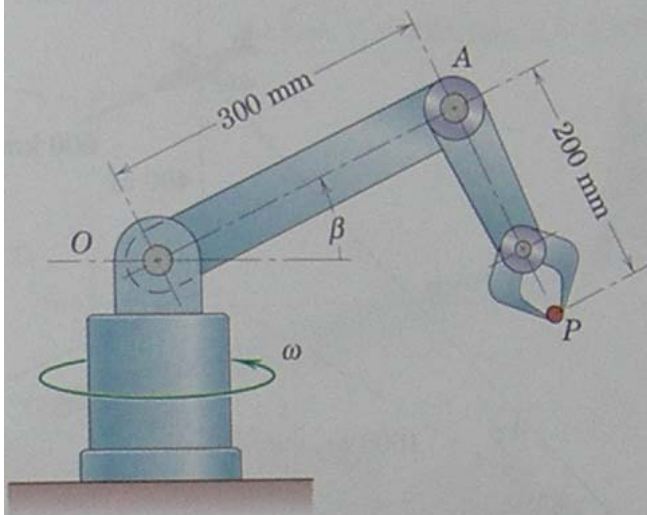


The paint-spraying robot is programmed to paint a production line of curved surfaces A (seen on edge). The length of the telescoping arm is controlled according to $b = 0.3 \sin(\pi t/2)$, where b is in meters and t is in seconds. Simultaneously, the arm is programmed to rotate according to $\theta = \pi/4 + (\pi/8) \sin(\pi t/2)$ radians. Calculate the magnitude v of the velocity of the nozzle N and the magnitude a of the acceleration of N for $t = 1$ s and for $t = 2$ s.



An industrial robot is being used to position a small part P . Calculate the magnitude of the acceleration a of P for the instant when $\beta = 30^\circ$ if $\dot{\beta} = 10$ degrees per second and $\ddot{\beta} = 20$ degrees per second squared at this same instant. The base of the robot is revolving at the constant rate $\omega = 40$ degrees per second. During the motion arms AO and AP remain perpendicular.

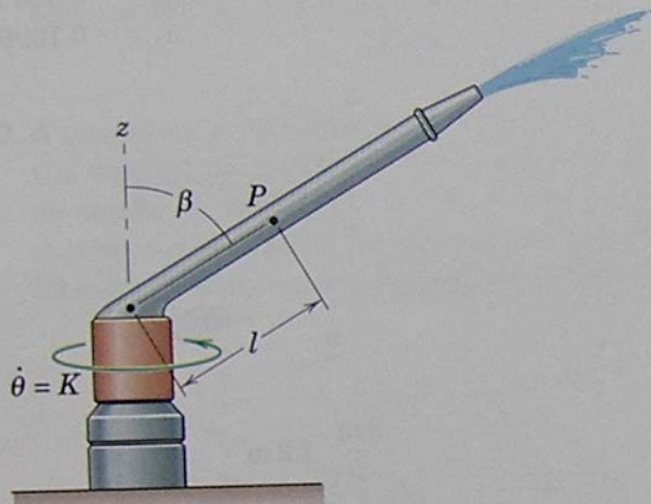
Ans. $a = 219 \text{ mm/s}^2$



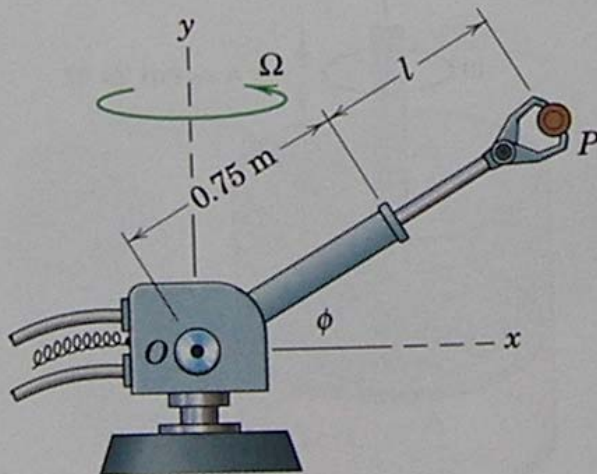
The rotating nozzle sprays a large circular area and turns with the constant angular rate $\dot{\theta} = K$. Particles of water move along the tube at the constant rate $\dot{l} = c$ relative to the tube. Write expressions for the magnitudes of the velocity and acceleration of a water particle P for a given position l in the rotating tube.

$$\text{Ans. } v = \sqrt{c^2 + K^2 l^2 \sin^2 \beta}$$

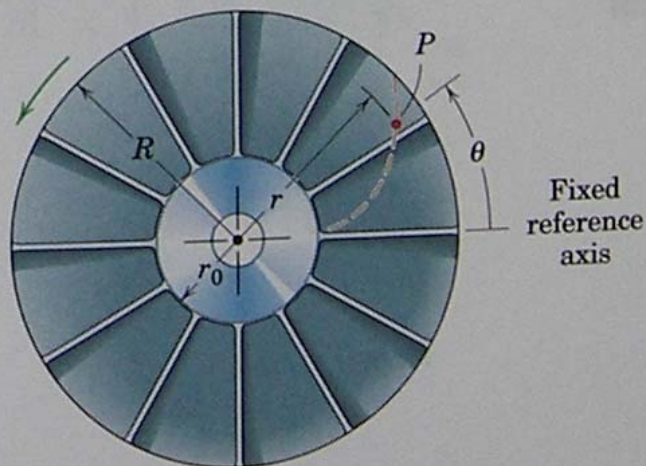
$$a = K \sin \beta \sqrt{K^2 l^2 + 4c^2}$$



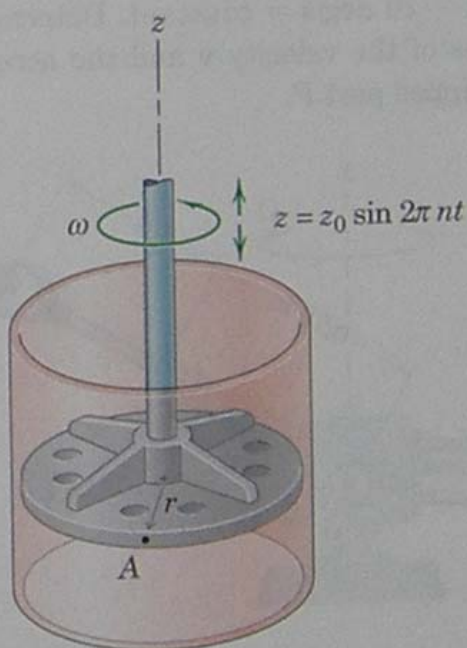
The robotic device of Prob. 2/162 now rotates about a fixed vertical axis while its arm extends and elevates. At a given instant, $\phi = 30^\circ$, $\dot{\phi} = 10 \text{ deg/s} = \text{constant}$, $l = 0.5 \text{ m}$, $\dot{l} = 0.2 \text{ m/s}$, $\ddot{l} = -0.3 \text{ m/s}^2$, and $\Omega = 20 \text{ deg/s} = \text{constant}$. Determine the magnitudes of the velocity $\mathbf{v}$ and the acceleration $\mathbf{a}$ of the gripped part P .

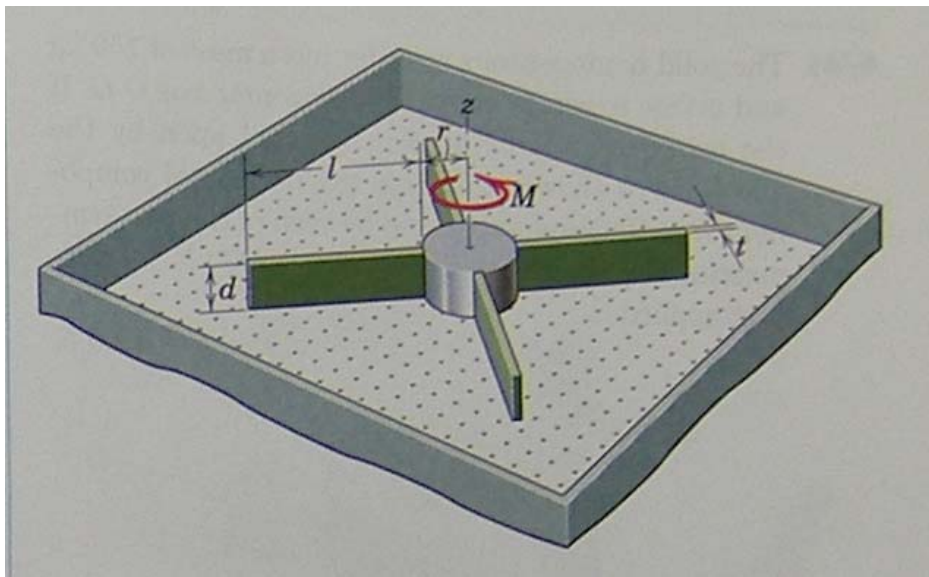


- 6 The radial position of a fluid particle P in a certain centrifugal pump with radial vanes is approximated by $r = r_0 \cosh Kt$, where t is time and $K = \dot{\theta}$ is the constant angular rate at which the impeller turns. Determine the expression for the magnitude of the total acceleration of the particle just prior to leaving the vane in terms of r_0 , R , and K .

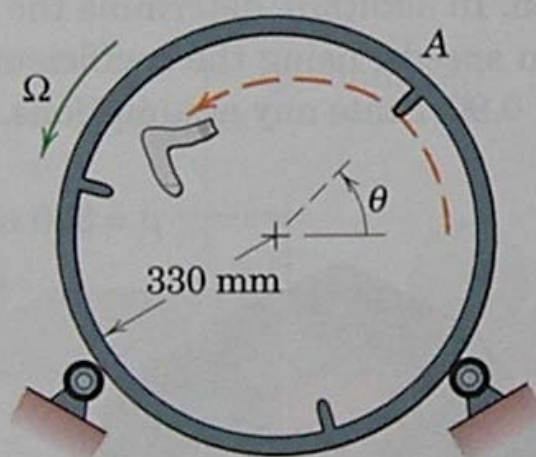


- 6 The rotating element in a mixing chamber is given a periodic axial movement $z = z_0 \sin 2\pi nt$ while it is rotating at the constant angular velocity $\dot{\theta} = \omega$. Determine the expression for the maximum magnitude of the acceleration of a point A on the rim of radius r . The frequency n of vertical oscillation is constant.





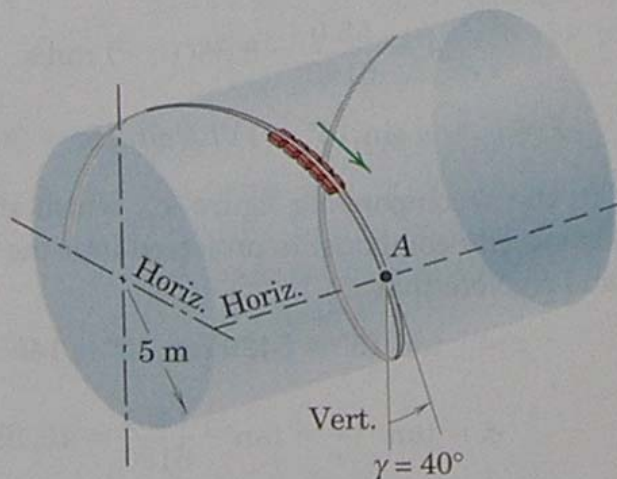
The rotating drum of a clothes dryer is shown in the figure. Determine the angular velocity Ω of the drum which results in loss of contact between the clothes and the drum at $\theta = 50^\circ$. Assume that the small vanes prevent slipping until loss of contact.





Dennis Macdonald/Index Stock

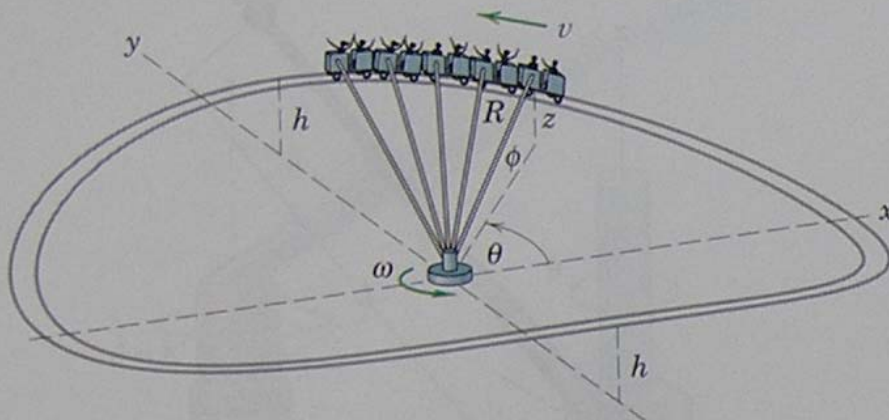
- 4 An amusement ride called the “corkscrew” takes the passengers through the upside-down curve of a horizontal cylindrical helix. The velocity of the cars as they pass position A is 15 m/s, and the component of their acceleration measured along the tangent to the path is $g \cos \gamma$ at this point. The effective radius of the cylindrical helix is 5 m, and the helix angle is $\gamma = 40^\circ$. Compute the magnitude of the acceleration of the passengers as they pass position A.



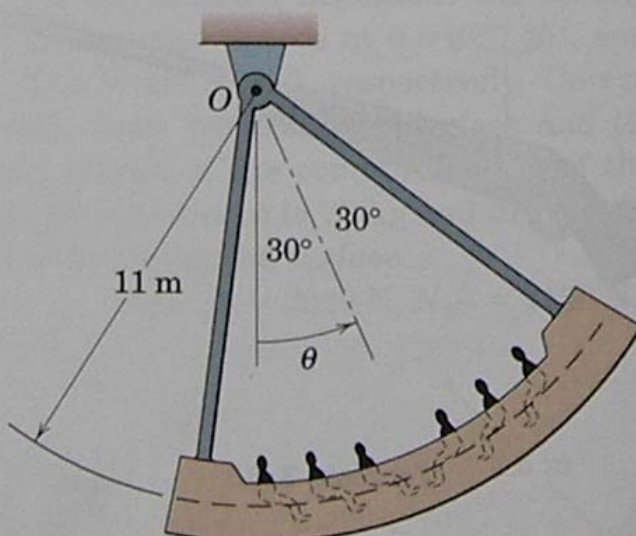
►2/186 In the design of an amusement-park ride, the cars are attached to arms of length R which are hinged to a central rotating collar which drives the assembly about the vertical axis with a constant angular rate $\omega = \dot{\theta}$. The cars rise and fall with the track according to the relation $z = (h/2)(1 - \cos 2\theta)$. Find the R -, θ -, and ϕ -components of the velocity $\mathbf{v}$ of each car as it passes the position $\theta = \pi/4$ rad.

$$\text{Ans. } v_R = 0, v_\theta = R\omega\sqrt{1 - (h/2R)^2}$$

$$v_\phi = h\omega/\sqrt{1 - (h/2R)^2}$$

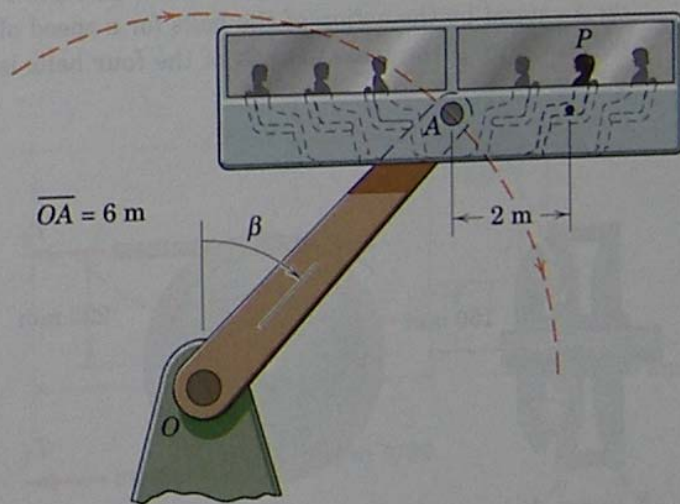


The amusement-park ride pivots about the fixed point O . A mechanism (not shown) drives the unit according to $\theta = (\pi/3) \sin 0.950t$, where θ is in radians and t is in seconds. Determine the maximum normal force N exerted by the seat on a rider of mass m , and state which riders are subjected to the maximum force.





3/92 The amusement-park ride consists of a fixed support near O , the 6-m arm OA , which rotates about the pivot at O , and the compartment, which remains horizontal by means of a mechanism at A (not shown). At a certain instant, $\beta = 45^\circ$, $\dot{\beta} = 0.8 \text{ rad/s}$, and $\ddot{\beta} = 0.4 \text{ rad/s}^2$, all clockwise. Determine the horizontal and vertical forces (F and N) exerted by the bench on the 80-kg rider at P . Compare your results with the static values of these forces. Note that every rider moves in a circle of radius 6 m.



A small object A is held against the vertical side of the rotating cylindrical container of radius r by centrifugal action. If the coefficient of static friction between the object and the container is μ_s , determine the expression for the minimum rotational rate $\dot{\theta} = \omega$ of the container which will keep the object from slipping down the vertical side.

$$\text{Ans. } \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}}$$

