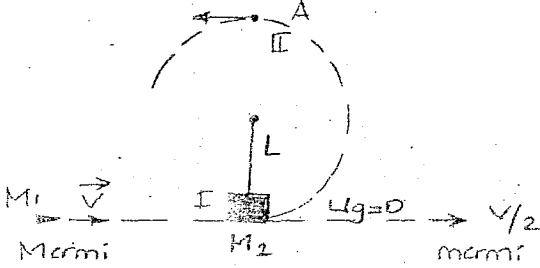


- 4) Şekilde görüldüğü gibi, kütlesi M_1 ve hızı V olan bir mermi, M_2 kütlesi bir sarkaç ramden $V/2$ hızı ile çıkmaktadır. Sarkaç L uzununda ve kütlesi ihmal edilebilen bir ipin ucunda asılıdır. Sarkaç tam bir düzey daire üzerinde hareket edebilmesi için minimum V ne olmalıdır?



mermi, sarkaç ile esnek olmayan çarpış yapar. Bu durumda yatayda momentum korunumu yazılırsa

$$P_x = P_x'$$

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1' + m_2 V_2'$$

$$m_1 \cdot V + 0 = m_1 \cdot \frac{V}{2} + m_2 \cdot V_2'$$

$$\left| V = \frac{2m_2 V_2'}{m_1} \right| \text{ veya } \left| V_2' = \frac{m_1 \cdot V}{2m_2} \right| \text{ elde edilir}$$

Sarkaç ram enerji korunumu yazılırsa

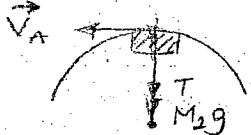
$$E_1 = E_2$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2} M_2 \cdot V_2'^2 = \frac{1}{2} M_2 \cdot V_A^2 + M_2 g \cdot 2L \Rightarrow \boxed{V_2'^2 - V_A^2 = 4gL}$$

(Sarkacın çarpışmadan hemen sonra en alt noktadaki hızı)

Sarkacın tam bir düzey dairede hareket edebilmesi için



$$\sum F_r = m \frac{V^2}{r}, \quad r = L$$

$$T + M_2 g = \frac{M_2 \cdot V_A^2}{L}$$

$$\Rightarrow M_2 g = \frac{M_2 \cdot V_A^2}{L}$$

$$\boxed{V_A^2 = g \cdot L}$$

→ Tepedeki hızın minimum olan gelen mermi hızının da minimum olması demektir. Bu koşu $T=0$ ram seçilir.

$$\frac{M_2 g}{r} =$$

Hız ifadelerini birleştirirsek

$$V_2'^2 - V_A^2 = 4gL$$

$$\left(\frac{m_1 V}{2m_2} \right)^2 - gL = 4gL \Rightarrow \frac{m_1^2 \cdot V^2}{4m_2^2} = 5gL \Rightarrow V^2 = 5gL \cdot \frac{4m_2^2}{m_1^2}$$

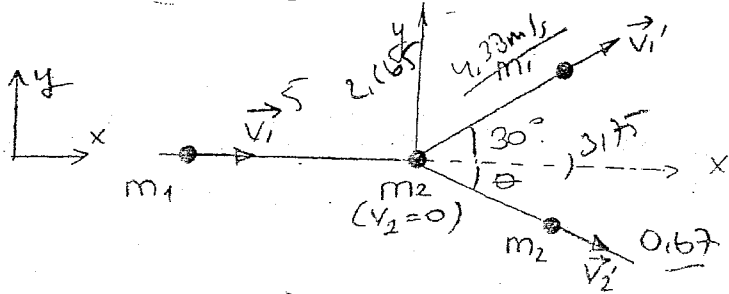
$$V = \frac{2m_2}{m_1} \sqrt{5gL}$$

$$m_2 U = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} U^2 \cdot m = (mgh) + \frac{1}{2} m v^2$$

Esnek Çarpışma

2) Bir bilarda topu 5 m/s hızla hareket eden aynı kütleli diğer bir topa çarpıyor. Çarpışmadan sonra top ilk hareket yönüne göre 30° açı altında 4,33 m/s hızla hareket eder. Çarpışma esnek olduğuna göre çarpılan topun hızının yön ve büyüklüğünü bulunuz. (sürtünme ve dönme hareketini ihmal ederiz.)



Esnek olmayan çarpışma çarpışma gücü yok.

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$v_1 = 5 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_1 = 5\vec{i} \text{ m/s}$$

$$v_1' = 4.33 \text{ m/s}$$

$$v_{1x}' = 4.33 \cdot \cos 30^\circ \approx 3.75 \text{ m/s}$$

$$v_{1y}' = 4.33 \cdot \sin 30^\circ = 2.165 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_1' = (3.75\vec{i} + 2.165\vec{j}) \text{ m/s}$$

Esnek çarpışma için momentum korunumu yazılırsa

$$\sum \vec{p} = \sum \vec{p}'$$

$$m_1 \vec{v}_1 + 0 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad , \quad m_1 = m_2$$

$$5\vec{i} = (3.75\vec{i} + 2.165\vec{j}) + \vec{v}_2'$$

$$\vec{v}_2' = (5 - 3.75)\vec{i} - 2.165\vec{j}$$

$$\vec{v}_2' = 1.25\vec{i} - 2.165\vec{j}$$

$$v_2' = \sqrt{v_{x'}^2 + v_{y'}^2} = \sqrt{(1.25)^2 + (-2.165)^2} \approx \underline{\underline{2.5 \text{ m/s}}}$$

$$\tan \theta = \frac{v_{y'}}{v_{x'}} = \frac{-2.165}{1.25} = -1.732 \Rightarrow \theta = 59.99^\circ \approx \underline{\underline{60^\circ}}$$

veya

esnek çarpışma için kinetik enerji korunumu yazılırsa

$$K_1 = K_2$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} m v_2'^2$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

$$5^2 = 4.33^2 + v_2'^2 \Rightarrow v_2' = \underline{\underline{2.5 \text{ m/s}}}$$

diğer momentum korunumu yazılarak,

$$\sum p_y = \sum p_y'$$

$$0 = -2.165 + v_{2y}' \Rightarrow v_{2y}' = 2.165$$

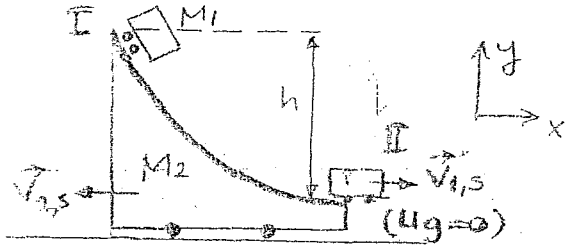
3) Kütleleri M_2 olan büyük bir arabaya en alt ucu yatay olan eğik bir rampa yerleştirilmiştir. Büyük araba başlangıçta hareket etmemektedir. Kütleleri M_1 olan küçük bir araba rampanın alt ucundan h düzey yüksekliğinde bir noktadan bırakılıyor. Tekerlekler ile yüzeyler arasında sürtünme yoktur. Küçük araba en alt uca ulaştığında büyük araba hızının $V_2 = \sqrt{\frac{2M_1^2gh}{M_1 + M_2}}$ olduğunu gösteriniz. $\omega = \sqrt{2g}$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2M_1^2 g h}{M_2(M_1 + M_2)}}$$

olduğunu göstermiştir.

$$\rho_1 g h = \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2$$

$$M_2 \sqrt{2gh} = M_1 t$$


$$H = 0$$

Sistem = (kecil + besar + besar)

Sistem üzerine olası doğrultuda. ağırlar ve dolaylı etkileri etkilemek tedbir

$\Sigma F_y(\text{dis}) \neq 0 \Rightarrow$ Bu nedenle dış
momentum korunmaz. !

* yatayda sürtünme yada başka bir dış kuvvet mevcut
bu durumda yatayda momentum korunumu yazabiliriz

$$\Sigma f_X = 0 \Rightarrow \Sigma P_X = \Sigma P_X$$

$$M\sqrt{2gh} = M_1 V_1 + M_2 V_2$$

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

$$\left. \begin{aligned} V_{1,nk} &= 0 \\ V_{2,nk} &= 0 \end{aligned} \right) \Rightarrow$$

$$0 = m_1 \cdot v_{1s} - m_2 v_{2s} \Rightarrow (\text{hızlar yatağı})$$

$$V_{15} = \frac{m_2 V_{25}}{m_1}$$

Sistem ram energi korumunu yaziliriz

$$E_1 = E_2$$

$$\cancel{K_1} + U_1 = K_2 + \cancel{U_2}$$

$$m_1 \cdot gh = \frac{1}{2} m_1 v_{1s}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2s}^2$$

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2 v_{2s}}{m_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2s}^2$$

$$m_1gh = \frac{1}{2} m_2 v_{2s}^2 \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right)$$

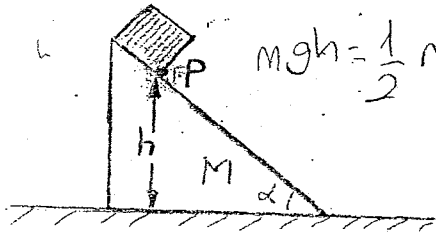
$$\Rightarrow V_{2S} = \sqrt{\frac{2m_1^2 g h}{m_2(m_1 + m_2)}} \quad \text{m/s}$$

Not : V_{15} (mı camın açılma anında yere göre hızı)

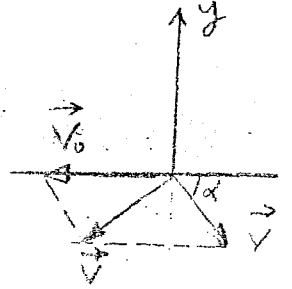
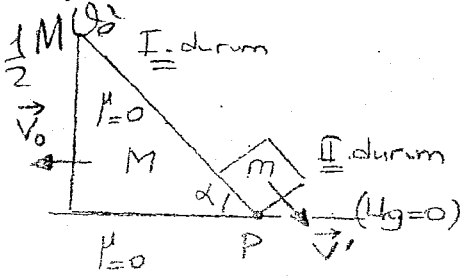
$$V_{1,S}(m_2 \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad ")$$

(momentum korunumu, değil mi?)

4) Şekilde gösterildiği gibi, kütlesi m olan bir blok kütlesi M olan eğen şeklindeki diğer bir bloğun üzerinde duruyor. Büyük blok yatay bir düzlem yüzey üzerinde bulunmaktadır. Yüzeyler arasında sürtünme yoktur. Sistem harekete, m kütlesindeki blok alt yüz h kadar yükseklikte iken başlıyor. Şekilde belirtilen P noktası yatay düzleme ulaştığında eğen bloğun hızını bulunuz.



$$mgh = \frac{1}{2} m \cdot V^2 + \frac{1}{2} M \cdot V_0^2$$



V_{ym} $\vec{V}_0$ (M kütlesinin ayrılma noktasında yere göre hızı)
 V_{Mm} $\vec{V}$ (m kütlesinin ayrılma noktasında yere göre hızı)
 V_{mm} $\vec{V}'$ (m kütlesinin M kütlesine göre hızı)

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}'$$

Galileo hız denklemini

m kütlesinin yere göre hızının yatay bileşeni, $V_x = V \cdot \cos \alpha - V_0$

m kütlesinin yere göre hızının dikey bileşeni, $V_y = -V \cdot \sin \alpha$

m kütlesinin hızının büyüklüğü, $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \rightarrow V^2 = V_x^2 + V_y^2$

* m kütlesi üzerine etkileyen yerçekimi kuvveti dikey düzlemde etkilediğini dikey düzlemde momentum korunmaz. Fakat yüzeyler arasında sürtünme olmadığı ve yatay düzlemde sisteme etkileyen herhangi bir dış kuvvet bulunmadığından yatay düzlemde momentum korunur.

$$P_x = P_x' \Rightarrow 0 = m \cdot V_x - M \cdot V_0$$

$$\Rightarrow m(V' \cos \alpha - V_0) = M \cdot V_0 \Rightarrow$$

$$V' = \frac{(M+m) \cdot V_0}{m \cdot \cos \alpha}$$

$$M=0 \Rightarrow \Delta E = 0 =$$

$$E_1 = E_2$$

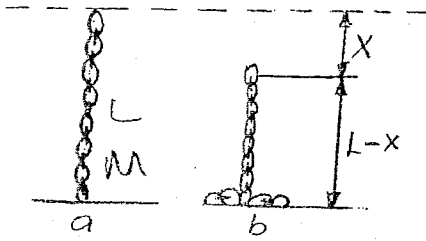
$$mgh = \frac{1}{2} m \cdot V^2 + \frac{1}{2} M \cdot V_0^2$$

$$= \frac{1}{2} m (V_x^2 + V_y^2) + \frac{1}{2} M \cdot V_0^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left[(V' \cos \alpha - V_0)^2 + (-V' \sin \alpha)^2 \right] + \frac{1}{2} M \cdot V_0^2$$

$$V' \text{ ifadesi yerine yazılıp } V_0 \text{ çekilirse, } V_0 = \sqrt{\frac{2m^2 g h \cos^2 \alpha}{(M+m)(M+m \sin^2 \alpha)}}$$

- 5) Uzunluğu L ve kütlesi M olan bir zincir 'şekil a' deki gibi, bir ucu'nun üstüne okunacak şekilde tutulur ve serbest bırakılır. Zincir, 'b' deki gibi x kadar düşünce zincire mesanın uyguladığı kuvveti (Masa ya erişince her halkanın durduğunu kabul ederiz.)



Birim uzunluğun kütlesi $= \frac{M}{L}$
 dx uzunluğundaki kütle, $dm = \frac{M}{L} dx$

Düzen zincirden üzeri gelen kuvvetin büyüklüğü,

$$F_1 = \frac{dP}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot v = v \cdot \left(\frac{M}{L} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{M}{L} v^2 \text{ olur.}$$

d. P: momentum
momentumun du
hatırlatma
($v = \frac{dx}{dt}$) kuvvet ver

x kadar düşen bir halkanın hızı, $v^2 = 2gx$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{M}{L} (2gx) \quad m v^2 = m \cdot 2 \cdot x = F$$

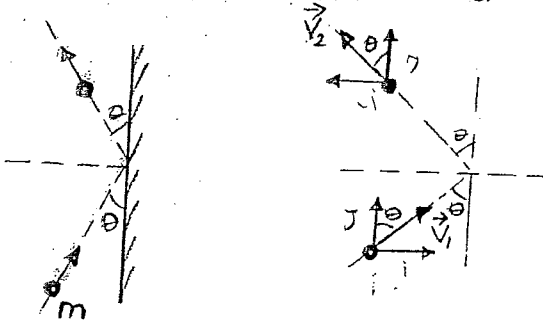
$$P \cdot v = F$$

- Masanın üzerinde bulunan halkalar eşitliklerine eşit olan bir kuvvet uygular. x kadar halka düşmüş olduğundan

$$F_2 = \left(\frac{M}{L} \cdot x \right) g$$

$$F_{\text{toplam}} = F_1 + F_2 = \frac{M}{L} 2gx + \frac{M}{L} gx = \frac{3Mg}{L} x$$

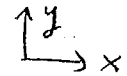
- 6) Şekilde gösterildiği gibi, kütlesi 300 g olan bir top 6.0 m/s hızla 30° açısı altında bir duvara çarparak yine aynı açı altında yansıyor. Duvarla çarpışma süresi 10 ms olduğuna göre
a) topa etkiyen impulsun değeri nedir? 300 ms
b) Topun duvara uyguladığı F ortalama kuvvetini bulunuz.



$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v \text{ olsun}$$

$$\vec{v}_1 = v \sin \theta \vec{i} + v \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{v}_2 = -v \sin \theta \vec{i} + v \cos \theta \vec{j}$$



$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{I} &= \Delta \vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m(-v \sin \theta \vec{i} + v \cos \theta \vec{j} - v \sin \theta \vec{i} - v \cos \theta \vec{j}) \\ &= -2mv \sin \theta \vec{i} \\ &= -2(0.3 \text{ kg}) \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ \vec{i} = -1.8 \vec{i} \text{ N.s} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \vec{F}_{\text{duvar}} = -\vec{F}_{\text{top}} \Rightarrow \vec{F}_{\text{top}} = -\frac{\vec{I}}{\Delta t} = -\frac{-1.8 \vec{i}}{10 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 180 \vec{i} \text{ N}$$

$$F = 180 \text{ N}$$

Gizgisel momentum ve impuls

- ⑦ 750 gramlık öleekli bir kova içermeye, yerden 60 m yükseklikten, dışa sığramadan, saniyede 0,25 litre su düşmektedir. Kova başlangıçta boş ise, 3 saniye sonra kovadaki öleek ne gösterir?

(Suyun yoğunluğu, $d = 1 \text{ g/cm}^3$)

$$d_{su} = \frac{1 \text{ g}}{\text{cm}^3} = 1 \text{ kg/Litre}$$

Birim zamanda düşen su miktarı, $\frac{\Delta m}{\Delta t} = [0,25 \text{ Litre/s} \cdot 1 \text{ kg/Litre}] = 0,25 \text{ kg}$

Düşen her su damlasından iteri gelen kuvvet, $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot u}{\Delta t} = 0,25 u$ $\rightarrow$ (hız)

$$u_{son}^2 = u_0^2 + 2gh \Rightarrow u_{son} = \sqrt{2gh} \\ = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 60} \approx 35 \text{ m/s} \quad (\text{su damlasının son hız})$$

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = 0,25 u = 0,25 \cdot 35 = \underline{\underline{8,75 \text{ N}}} \quad (\text{damlayan sudan iteri gelen k})$$

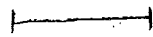
$$\text{— Kovanın ağırlığı, } M_{kova} \cdot g = \underline{\underline{7,5 \text{ N}}}$$

$$\text{— 3 saniyede biriken suyun ağırlığı, } W_{su} = (0,25 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 3 \text{ s}) \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{7,5 \text{ N}}}$$

$$\text{Toplam kuvvet, } \Sigma F = M_{kova} \cdot g + W_{su} + \frac{\Delta P}{\Delta t} \quad (\text{damla})$$

$$= 7,5 \text{ N} + 7,5 \text{ N} + 8,75$$

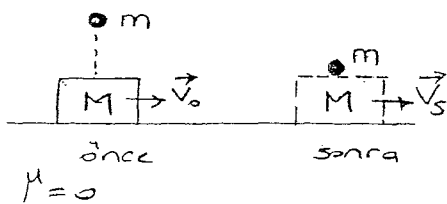
$$\Sigma F = \underline{\underline{23,75 \text{ N}}}$$



$$b. \text{ } \frac{1}{2} = (12+6) u$$

③

- ⑧ Kütleli 6 kg olan bir kızak, buz üzerinde, 9 m/s hızla kayarken üzerine 12 kg'lık bir paket, düşey doğrultuda bırakılır. Kızoğın bundan sonraki hareketini belirleyiniz.



Düşey doğrultuda cisimler üzerine kütleli kuvvetleri (ağırlıklar) etki etmekte bu nedenle momentum korunmaz. Fakat yatayda, sürtünme ve başka bir dış kuvvet etki etmediğinden, momentum korunur.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P_x = P_x'$$

$$M \cdot V_0 = (M+m) \cdot V_s \Rightarrow V_s = \underline{\underline{3 \text{ m/s}}}$$

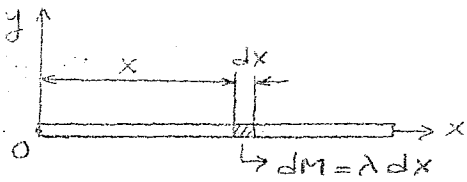
Kütle merkezi

- g) Uzunluğu 30 cm olan bir cubuğun çizgisel kütle yoğunluğu $\lambda = [50 \text{ g/m} + 20 \times \text{g/m}^2]$ ile verilmektedir. Burada x , cubuğun bir ucundan olan uzaklıktır ve metre cinsindedir.

a) Cubuğun kütlesi nedir?

b) Kütle merkezinin koordinatları nedir?

a) Kütle dağılımı düzensizdir $\Rightarrow \lambda \neq \text{sabit}$



Toplam kütle, $M = \int dm$

$$M = \int_0^L \lambda \cdot dx = \int_0^L (50 + 20x) dx$$

$$\int_0^L \lambda \cdot dx = 50x + 10x^2 = \int_0^L 50 dx + \int_0^L 20x dx$$
$$= 50 \cdot x \Big|_0^L + 20 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^L$$

$$L = \underline{0,3 \text{ m}} \Rightarrow$$

$$M = 50L + 10L^2 = 50 \cdot (0,3) + 10 \cdot (0,3)^2$$

$$M = \underline{15,9 \text{ gram}}$$

b) Cubuk tek boyutlu olarak veriliyor, $\Rightarrow y_{\text{km}} = 0$
 $z_{\text{km}} = 0$

$$x_{\text{km}} = \frac{1}{M} \int x^2 \cdot dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \cdot \lambda dx$$

$$= \frac{1}{M} \int_0^L x (50 + 20x) dx = \frac{1}{M} \left[\int_0^L 50x dx + \int_0^L 20x^2 dx \right]$$

$$= \frac{1}{M} \left[50 \frac{x^2}{2} \Big|_0^L + 20 \frac{x^3}{3} \Big|_0^L \right] = \frac{1}{M} \left[25L^2 + \frac{20}{3}L^3 \right]$$

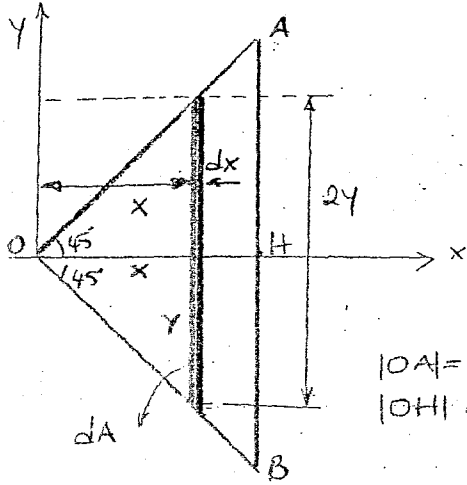
$$= \frac{1}{15,9} \left[25 \cdot (0,3)^2 + \frac{20}{3} (0,3)^3 \right] = 0,1528 \text{ m} \approx \underline{15,3 \text{ cm}}$$

kütle merkezi için çift integral alınır.

$$\frac{1}{M} \iint x \cdot dm$$

(Kütle Merkezi)

- (10) İki kenar dik üçgen şeklinde kesilip ve dik kenar uzunlukları 1 m olan bir levhanın kütle merkezinin konumunu hesaplayınız. Üçgen 90°'lik açısının açıortayı x-ekseni üzerinde olacak şekilde yerleştirilmiştir.



* Simetri nedeniyle $y_{km} = 0$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x \cdot dm$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x \cdot dm$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \int_0^{\sqrt{2}/2} x \cdot \left(\frac{M}{A} \cdot 2x dx \right)$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \frac{2M}{A} \int_0^{\sqrt{2}/2} x^2 dx$$

$$= \frac{2}{A} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}/2}$$

$$x_{km} = 0.47 \text{ m} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$x = y$ (iki kenar dik üçgen)

ince dilimin alanı, $dA = 2y \cdot dx = 2x dx$

ince dilimin kütlesi, $dM = \sigma \cdot dA = \left(\frac{M}{A} \right) \cdot 2x dx$

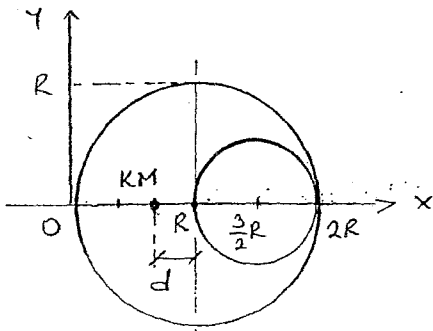
$\left[\begin{array}{l} M, \text{ levhanın kütlesi} \\ A, \text{ levhanın alanı} \\ \sigma, \text{ birim alanın kütlesi} \end{array} \right]$

$$A = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \text{ m}^2$$

KM $[0.47 \text{ m}, 0]$

444

- (11) Yarıçapı R olan düğün bir diskten, çapı R olan daire şeklinde bir f çıkarılmıştır. Sistemin kütle merkezinin diskin merkezine olan uzaklığını bulunuz.



$$y_{km} = 0$$

* Diskin kütlesi M, daire parçasının kütlesi m

Birim alanın kütlesi σ ise :

$$\frac{M}{m} = \frac{(\pi \cdot R^2) \cdot \sigma}{\pi \cdot \left(\frac{R}{2} \right)^2 \cdot \sigma} = 4 \Rightarrow M = 4m \text{ veya } m = \frac{M}{4}$$

$$x_{km} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{M \cdot R - m \cdot \left(\frac{3}{2} R \right)}{M - m} = \frac{4m \cdot R - m \cdot \left(\frac{3}{2} R \right)}{4m - m}$$

$$x_{km} = \frac{5}{6} R$$

$$\Rightarrow d = R - x_{km} = R - \frac{5}{6} R$$

$$d = R/6$$

(Çizgisel Momentum ve Çarpışmalar)

① m_1 cisminin hızı: $E_1 = E_2$
 $\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \rightarrow v_1 = \frac{kx^2}{m_1} = \frac{1250 \text{ N/m} \cdot (0,2 \text{ m})^2}{2 \text{ kg}} \Rightarrow v_1 = 5 \text{ m/s}$

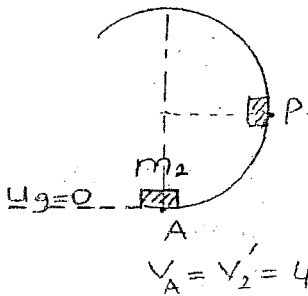
m_1 ve m_2 cisimleri esnek olarak çarpışıyor $\Rightarrow$ $\begin{cases} 1) \text{ momentum} \\ 2) \text{ K.E korunur} \end{cases}$

* $\sum \vec{P}_{ilk} = \sum \vec{P}_{son} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$
 $2 \cdot 5 + 0 = 2 \cdot v_1' + 3 \cdot v_2' \Rightarrow \underline{10 = 2v_1' + 3v_2'} \quad (1)$

* Esnek çarpışma $\Rightarrow v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$
 $5 + v_1' = 0 + v_2' \Rightarrow \underline{5 = v_2' - v_1'} \quad (2)$

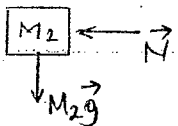
① ve ② 'den $v_2' = 4 \text{ m/s}$ elde edilir. (m_2 cisminin rayın altına doğru hızı, A noktasındaki hız)

* m_2 cisminin ray üzerindeki enerji korunumu yazılırsa ($\mu=0 \Rightarrow \Delta E=0$)



$E_A = E_P$
 $K_A + U_A = K_P + U_P$
 $\frac{1}{2} m_2 v_A^2 = \frac{1}{2} m_2 v_P^2 + m_2 \cdot g \cdot R \quad (3)$

* m_2 cisminin dairesel hareket yapıyor $\Rightarrow \sum F_r = m \cdot a_r = m \cdot \frac{v^2}{r}$
 P noktasında $\Rightarrow N = m_2 \cdot \frac{v_P^2}{R}$



$\Rightarrow m_2 \cdot \frac{v_P^2}{R} = N \cdot R \quad (4)$

④ ifadesi (3) ifadesinde yerine yazılırsa

$\frac{1}{2} m_2 v_A^2 = \frac{1}{2} N \cdot R + m_2 \cdot g \cdot R$

$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4^2 = \frac{1}{2} \cdot N \cdot 0,5 + 3 \cdot 10 \cdot 0,5 \Rightarrow N = 36 \text{ N}, \vec{N} = -36 \hat{i} \text{ N}$

b) Tamamen esnek olmayan çarpışma için $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_{sist}$
 $\Rightarrow 2 \cdot 5 + 0 = (2 + 3) \cdot v_{sistem} \Rightarrow v_{sistem} = 2 \text{ m/s}$

($m_1 + m_2$) sisteminin enerji korunumu yazılırsa $E_A = E_P$

$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v_{sist}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v_P^2 + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot R \Rightarrow v_P^2 = -6 \text{ m}^2/\text{s}^2$ elde

② $\sum \vec{F}_{dis} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{P} = 0 \Rightarrow$ sistemin momentumu korunur $\Rightarrow \sum \vec{P}_{ilk} = \sum \vec{P}_{son}$

a) $\vec{v}_{km} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{10 \cdot 20\vec{i} + 50 \cdot 8\vec{i}}{(10+50)} = 10\vec{i} \text{ m/s}$

b)

c) Enerji korunur $\Rightarrow \sum P_{ilk} = \sum P_{son} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$
 $|60 = v_1' + 5v_2'|$ ①

$\Rightarrow v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \Rightarrow |12 = v_2' - v_1'|$ ②

① ve ② den $v_2' = 12 \text{ m/s}$ ve $v_1' = 0$ elde edilir.

③ $\vec{F}_1 = -F_1 \cos 37^\circ \vec{i} + F_1 \sin 37^\circ \vec{j} = -8\vec{i} + 6\vec{j} \text{ N}$

$\vec{F}_2 = -F_2 \cos 37^\circ \vec{i} - F_2 \sin 37^\circ \vec{j} = -12,8\vec{i} - 9,6\vec{j} \text{ N}$

$\vec{F}_3 = 0 - F_3 \cdot \vec{j} = -20\vec{j} \text{ N}$

a) $\vec{a}_{km} = \frac{\sum \vec{F}}{M} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{-20,8\vec{i} - 23,6\vec{j}}{15} \text{ m/s}^2$

$x_{km} = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4(-2) + 8(3) + 3(-3)}{15} = \frac{7}{15} \text{ m}$

$y_{km} = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4(2) + 8(2) + 3(-2)}{15} = \frac{18}{15} \text{ m}$

$\vec{r}_{km} = x_{km} \cdot \vec{i} + y_{km} \cdot \vec{j} = \left(\frac{7}{15} \vec{i} + \frac{18}{15} \vec{j} \right) \text{ m}$

b) $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{dis} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-20,8\vec{i} - 23,6\vec{j}) \text{ N}$

4.) (iki boyutta çarpışma)

a) momentum korunur: $\sum \vec{P}_{ilk} = \sum \vec{P}_{son}$

$$\sum P_x = \sum P_x' \Rightarrow m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} = m_1 \cdot v_{1x}' + m_2 \cdot v_{2x}'$$

$$1 \cdot 5 + 0 = 1(-5 \sin 37) + 4 \cdot (v_2' \sin \theta) \Rightarrow \underline{2 = v_2' \sin \theta}$$

$$\sum P_y = \sum P_y' \Rightarrow m_1 \cdot v_{1y} + m_2 \cdot v_{2y} = m_1 \cdot v_{1y}' + m_2 \cdot v_{2y}'$$

$$0 + 4(-3) = 1 \cdot (-5 \cos 37) + 4 \cdot (-v_2' \cos \theta) \Rightarrow \underline{2 = v_2' \cos \theta}$$

① ve ② den $\Rightarrow \sin \theta = \cos \theta \Rightarrow \underline{\theta = 45^\circ}$

$$v_2' = \frac{2}{\sin \theta} = \frac{2}{\cos \theta} \Rightarrow v_2' = \frac{2}{1/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ m/s}$$

b) $K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 30,5 \text{ J}$
 $K_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 28,5 \text{ J}$ $\Delta K = K_2 - K_1 = -2 \text{ J}$

c) $\vec{V}_{km} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1(5\vec{i}) + 4 \cdot (-3\vec{j})}{5} = \frac{5\vec{i} - 12\vec{j}}{5}$

$$\vec{V}_{km} = \left(\vec{i} - \frac{12}{5} \vec{j} \right) \text{ m/s}$$

d) $\vec{P}_1 = m_1 \cdot \vec{v}_1 = 1 \cdot (5\vec{i}) = 5\vec{i} \text{ kg m/s}$

$$\vec{P}_2 = m_2 \cdot \vec{v}_2 = 4 \cdot (-3\vec{j}) = -12\vec{j} \text{ kg m/s}$$

$$\vec{P}_1' = m_1 \cdot \vec{v}_1' = 1 \cdot [-v_1 \sin 37 \vec{i} - v_1 \cos 37 \vec{j}] = (-3\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ kg m/s}$$

$$\vec{P}_2' = m_2 \cdot \vec{v}_2' = 4 [v_2 \cos 45 \vec{i} - v_2 \sin 45 \vec{j}] = (8\vec{i} - 8\vec{j}) \text{ kg m/s}$$

1. cisim için momentum değişimi, $\Delta \vec{P}_{m_1} = \vec{P}_1' - \vec{P}_1 = (-8\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ kg m/s}$

2. " " " " " $\Delta \vec{P}_{m_2} = \vec{P}_2' - \vec{P}_2 = (8\vec{i} + 4\vec{j}) \text{ kg m/s}$

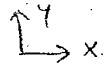
5) (İk boyutta çarpışma)

$$m_1 = m$$

$$m_2 = 3m$$

$$\vec{V}_1 = -v \cdot \vec{i} ; \vec{V}_1' = -v_1' \cdot \vec{j}$$

$$\vec{V}_2 = v \cdot \vec{i} ; \vec{V}_2' = v_2' (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$$



Esnek çarpışma : 1) momentum korunur $\Rightarrow \vec{P}_{ilk} = \vec{P}_{son}$

$$\Sigma P_x = \Sigma P_x' \Rightarrow m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} = m_1 \cdot v_{1x}' + m_2 \cdot v_{2x}'$$

$$m \cdot (-v) + 3m(v) = 0 + 3m(v_2' \cos \theta) \Rightarrow \underline{2v = 3v_2' \cos \theta} \quad (1)$$

$$\Sigma P_y = \Sigma P_y' \Rightarrow m_1 \cdot v_{1y} + m_2 \cdot v_{2y} = m_1 \cdot v_{1y}' + m_2 \cdot v_{2y}'$$

$$0 = m \cdot (-v_1') + 3m \cdot (v_2' \sin \theta) \Rightarrow \underline{v_1' = 3v_2' \sin \theta} \quad (2)$$

$$= 3 \cdot v_{2y}'$$

$$2) K.E \text{ korunur : } \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2'^2$$

$$m \cdot v^2 + 3m \cdot v^2 = m \cdot v_1'^2 + 3m \cdot v_2'^2 \Rightarrow \underline{4v^2 = v_1'^2 + 3v_2'^2} \quad (3)$$

① ve ②'nin kareleri alınarak topar toparla toplanır

$$v_1'^2 + 4v^2 = 9v_2'^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) , (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$\Rightarrow v_1'^2 + 4v^2 = 9v_2'^2$ elde edilir. Bu ifade ③ ile birlikte çözümler

$$v_2'^2 = \frac{8}{12} v^2 \Rightarrow v_2' = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot v \text{ elde edilir. } (=v_{2, \text{son}})$$

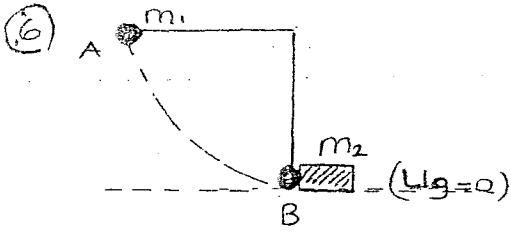
$$\Rightarrow v_1' = v_{1, \text{son}} = \sqrt{3} \cdot v_2' = \sqrt{2} \cdot v \text{ elde edilir.}$$

b) ① nolu bağıntıdan $2v = 3v_2' \cdot \cos \theta$

$$2v = 3 \cdot (\sqrt{\frac{2}{3}} v) \cdot \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = 0.81649$$

$$\underline{\underline{\theta = 35.3^\circ}}$$



m_1 cisim için enerji korunumu yazılır

$$E_A = E_B$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_A^2 + U_A = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 + U_B$$

$$m_1 \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} =$$

m_1 ile m_2 esnek olarak çarpışıyor:

$$\Sigma P_{ilk} = \Sigma P_{son} \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$0,5 \cdot (3,74)^0 = 0,5 v_1' + 2,5 v_2' \Rightarrow \underline{1,87 = 0,5 v_1' + 2,5 v_2'}$$

$$+ \text{Esnek çarpışma için hızlar} \Rightarrow v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

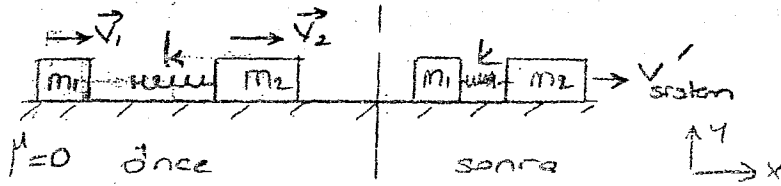
$$3,74 + v_1' = 0 + v_2' \Rightarrow \underline{3,74 = v_2' - v_1'}$$

① ve ② birlikte çözüldüğünde $v_2' = \underline{1,24 \text{ m/s}}$ (m_2 'nin çarpışma sonrası hızı)

②'nin bağıntısından $v_1' = -2,5 \text{ m/s}$ elde edilir. (Tepki çarpışma)

(Tamamen esnek olmayan çarpışma)

Kütlesi $m_1 = 2 \text{ kg}$ olan bir blok, bir masa üzerinde sürtünmesiz olarak 10 m/s hızla kayıyor. Kütlesi $m_2 = 5 \text{ kg}$ ve hızı 3 m/s olan ikinci bir blok, birinci bloğun önünde aynı doğrultuda hareket ediyor. İkinci bloğun arkasında yay kuvveti sabiti, $k = 1120 \text{ N/m}$ olan kütli bir yay bulunmaktadır. Bloklar çarpıştığında yaydaki maksimum sıkışma nedir? Yayın bükülmediğini ve Hooke kanununa uyduğunu kabul ederiz.



$$m_1 = 2 \text{ kg}, v_1 = 10 \text{ m/s}$$

$$m_2 = 5 \text{ kg}, v_2 = 3 \text{ m/s}$$

$$k = 1120 \text{ N/m}$$

Yatayda $\Sigma F_x(\text{dis}) = 0 \Rightarrow$ momentum korunur.

$$\Sigma P_x = \Sigma P'_x \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) v'_{\text{system}} \rightarrow \text{(tamamen esnek o çarpışma)}$$
$$2 \cdot 10 + 5 \cdot 3 = (2 + 5) \cdot v'_s \rightarrow v'_s \equiv 5 \text{ m/s}$$

Sistem için enerji korunumu yazılırsa, $\mu = 0 \Rightarrow \Delta E = 0$

$$E_1 = E_2$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow \text{sadece yay potansiyeli mevcut}$$

$$K_1 + U_{\text{yay}} = K_2 + U_{\text{yay}}$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 + 0 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v_s'^2 + \frac{1}{2} k x_{\text{mek}}^2$$

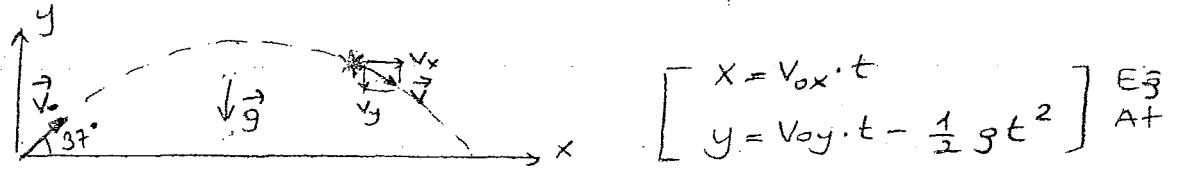
$$2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 3^2 = 7 \cdot 5^2 + 1120 \cdot x_{\text{mek}}^2$$

$$x_{\text{mek}}^2 = \frac{70}{1120} = 0.0625$$

$$x_{\text{mek}} = 0.25 \text{ m}$$

Ödev 3
9

(Parçacıklar sisteminin hareketi - momentum korunumu)



$$\begin{cases} X = v_{0x} \cdot t \\ Y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \begin{matrix} E\vec{g} \\ A\vec{t} \end{matrix}$$

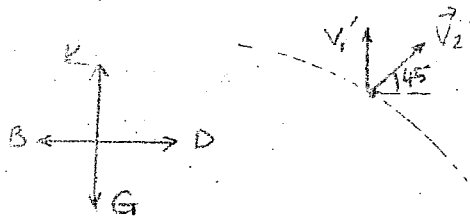
$$y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$1 \text{ m} = v_{0y} \cdot (1 \text{ s}) - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1^2 \Rightarrow v_{0y} = 6 \text{ m/s} = v_0 \cdot \sin 37^\circ \rightarrow v_0 = \frac{6}{0.6} \\ \Rightarrow v_0 = \underline{\underline{10 \text{ m/s}}}$$

$$v_{0x} = v_x = v_0 \cdot \cos 37^\circ = 10 \cdot 0.8 = \underline{\underline{8 \text{ m/s}}}$$

$$v_y(t=1 \text{ s}) = v_{0y} - g \cdot t = 6 - 10 \cdot 1 = -4 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = (8\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ m/s}$$



$$\vec{v}_1' = 5\vec{j}$$

$$\vec{v}_2' = v_2' \cdot \cos 45^\circ \vec{i} + v_2' \cdot \sin 45^\circ \vec{j}$$

Parçacıkların dış kuvvetler nedeniyle meydana gelmektedir, $\sum \vec{F}_{dış} = 0$ bu nedenle sistemin toplam momentumu korunur.

$$\sum \vec{p} = \sum \vec{p}'$$

(Parçacıkların hareketi önce ve sonra momentumları)

$$M \cdot \vec{v} = m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2' + m_3 \cdot \vec{v}_3'$$

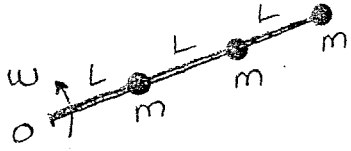
$$6 \text{ kg} (8\vec{i} - 4\vec{j}) = 1 \text{ kg} \cdot 5\vec{j} + 3 \text{ kg} \cdot 20 (0.707\vec{i} + 0.707\vec{j}) + 2 \text{ kg} \cdot \vec{v}_3'$$

$$48\vec{i} - 24\vec{j} = 5\vec{j} + 42.42\vec{i} + 42.42\vec{j} + 2\vec{v}_3'$$

$$\vec{v}_3' = \frac{1}{2} (5.58\vec{i} - 71.42\vec{j})$$

$$\vec{v}_3' = (2.79\vec{i} - 35.7\vec{j}) \text{ m/s}$$

(Eylemsizlik momenti, dönme kinetik enerjisi)



Şekilde gösterildiği gibi, herbirinin kütlesi m olan üç parçacık, birbirlerinden ve etrafında dördük eksenine uzaklıkları L ve kütleleri M olan

çubuklar ile bağlanmışlardır. Sistem dönme eksenini etrafında ω açı hızı ile dönmektedir.

- sistemin O noktesine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız
- Sistemin dönme kinetik enerjisini bulunuz.

$$I_{\text{sistem}} = I_{\text{çubuklar}} + I_{\text{kütleler}}$$

(Bir katı çubuğun bir ucu geçen, çubuğa dik bir eksenle göre eylemsizlik momenti $I = \frac{1}{3} ML^2$ dir.)

$$= \frac{1}{3} M' L'^2 + \sum m_i r_i^2$$

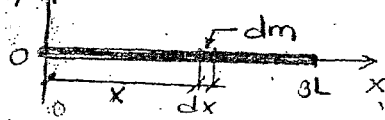
$$\left. \begin{array}{l} M' = 3M \\ L' = 3L \end{array} \right\} \Rightarrow = \frac{1}{3} (3M) (3L)^2 + [mL^2 + m(2L)^2 + m(3L)^2]$$

$$= 9ML^2 + m(L^2 + 4L^2 + 9L^2) = 9ML^2 + 14mL^2$$

$$a) I_{\text{sistem}} = (9M + 14m)L^2$$

$$b) K_d = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot (9M + 14m)L^2 \omega^2$$

Veya integral yöntemiyle başlayalım, $3L$ olan çubuk için



$$I_o = \int r^2 dm = \int_0^{3L} x^2 \cdot \lambda \cdot dx = \lambda \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^{3L}$$

$$dm = \lambda dx$$

$$= \left(\frac{3M}{3L} \right) \cdot \frac{1}{3} (3L)^3 = \frac{M}{3L} \cdot 27 \cdot L^3$$

$$I_{\text{çubuk}} = \underline{\underline{9ML^2}}$$

$$I_{\text{kütleler}} = \sum m_i r_i^2 = m \cdot L^2 + m \cdot (2L)^2 + m \cdot (3L)^2$$

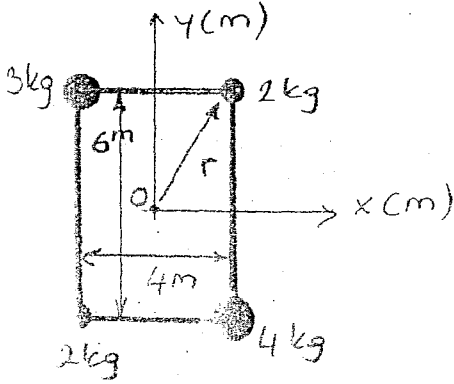
$$= m(L^2 + 4L^2 + 9L^2) = 14mL^2$$

$$I_{\text{sistem}} = I_{\text{çubuk}} + I_{\text{kütleler}} = \underline{\underline{9ML^2 + 14mL^2}}$$

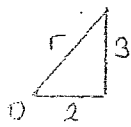
(Eylemsizlik momenti dönme kinetik enerjisi)

* Şekildeki dört par aak, kütelleri ihmal edilen katı cubuklar ile biribi tutturulmuştur. Orijin, dikdörtgenin merkezindedir. Sistem xy düzlemi   eksenine etrafında 6 rad/s  sal hız ile döner

- a)   eksenine göre sistemin eylemsizlik momentini
b) sistemin kinetik enerjisi hesaplayınız.



a) K tellerin   dönme eksenine uzaklıkları biribi eşit $\Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$



$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ m}$$

$$I_{\text{sistem}} = \sum m_i \cdot r_i^2 \quad (\text{baĝlantı cubuklarının k telleri ihmal ediliyor.})$$

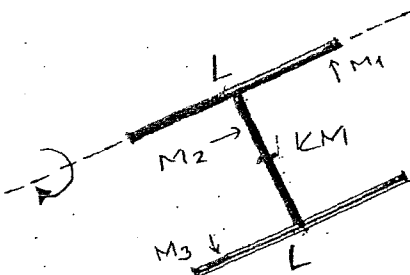
$$= r^2 [m_1 + m_2 + m_3 + m_4] = 13(2 + 2 + 3 + 4)$$

$$I_{\text{sistem}} = 143 \text{ kgm}^2$$

(sistemin O noktasından geçen   eksenine göre eylemsizlik momentine)

b) Dönme kinetik enerjisi, $K_d = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot (143 \text{ kgm}^2) \cdot (6 \text{ rad/s})^2$
 $= 2574 \text{ Joule}$

* Birbirinin aynısı olan  g cubuk birbirine baĝlanarak H harfi şeklinde   sistem oluşturulmuştur. Sistem cubuklardan birisi ile çekilen yatay eksen etrafında dönme özelliklerine sahiptir. Başlangıçta hareket z olan sistem yatay bir düzlemindedir. Sistem serbest birakılır. Sistem dönme hareket z yapip düsey düzlem  ine geldi er anda sistemin  sal hızı ne olur?



Cubuklar  zde  $\Rightarrow$ boyları ve kütelleri eşit. Sistemin k t le merkezi baĝlantı cubuĝun ortasıdır. ($m_1 = m_2 = m_3 = m$)

Sistem düsey konumda iken KM'nin bulunduğu  eyrede $U_g = 0$ secilirse, sistem yatay konumda iken k t le çekim potansiyeline sahip ol

$$I_{\text{sistem}} = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + \left(\frac{1}{3} ML^2\right) + M \cdot L^2 = \frac{4}{3} ML^2 \quad (\text{dönme eksenine göre sistemin eylemsizlik momentine})$$

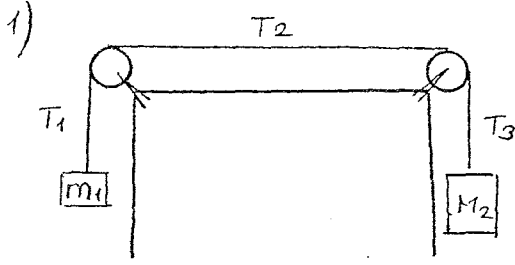
(yatay) $E_1 = E_2$ (d sey durum)

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$3mg \cdot \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2} I_{\text{sistem}} \cdot \omega^2$$

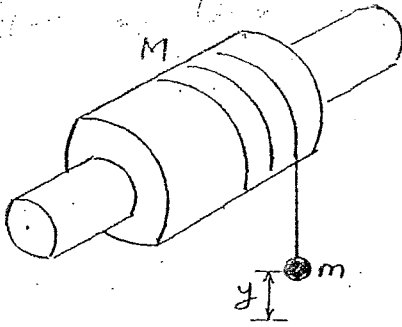
$$\omega = \frac{3}{2} \sqrt{3/L}$$

$$3mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} ML^2\right) \omega^2$$



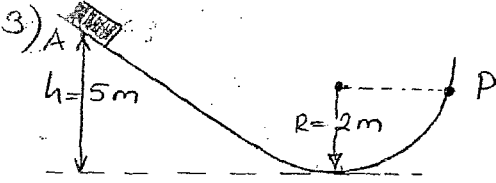
m_1 ve m_2 kütlesi, eylemsizlik momenti I olan, iki, deş makara üzerinden geçen hafif bir ip ile birbirine bağlıdır. Her kütlenin rumesir T_1, T_2, T_3 gerilmelerini bulunuz. (İp ve n karolar arasında hiçbir kaymanın olmadığı varsayınız.)

- 2) İari boş, düzgün bir silindirik makaranın iç yarıçapı $R/2$, dış yarıçap ve kütlesi M 'dir. Makara sürtünmeli, sabit, yatay bir mil etrafında dönebilecek şekilde tutturulmuştur. Makara etrafına sarılı ipin uc m kütlesi, bağlıdır. m kütlesi serbest bırakılınca t kadar $2y$ kadar düşer. Makara ile mil arasındaki sürtünme kuvvetine ait $\mathcal{E}_f = R \left[m \left(g - \frac{2y}{t^2} \right) - \frac{5}{4} M \left(\frac{y}{t^2} \right) \right]$ olacağını gösteriniz.

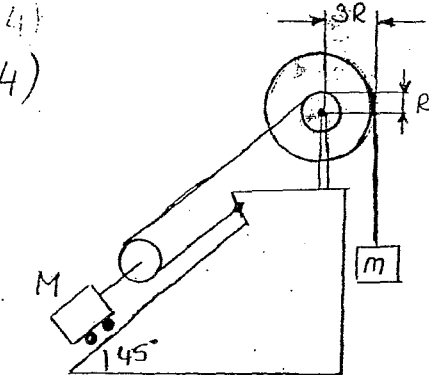


Veri: iç boş silindirin geometrik eksenine göre eylemsizlik momenti,

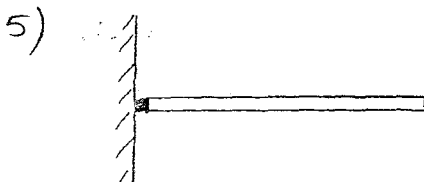
$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$



6 kg'lık bir blok, şekilde görüldüğü gibi sürtünmesiz bir ray üzerinde A noktasında serbest bırakılıyor. Blok P noktasına geldi zaman merkezsel ve teğetsel ivmeyi bulunuz.



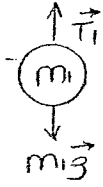
Şekildeki eğik düzlem üzerindeki 150 kg'lık arabayı dengeleyen m kütlesini bulunuz. (Makaralar kütsüz ve sürtünmesizdir.)



Uzunluğu L ve kütlesi M olan düzgün bir çubuk şekilde gösterildiği gibi, bir ucu etrafında sürtünmesiz dönebilecek durumdadır. Çubuk yatay durumda iken serbest bırakılır. Çubuğun ilk e rumesir ve sağ ucunun ilk çizgisel ivmesi nedir?

TORK

1) $m_2 > m_1$ için Newton'un ikinci yasası asılı kütlelere uygulanırsa, Σ

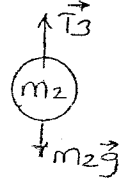


$$\Sigma \vec{F} = m_1 \cdot \vec{a}$$

$$T_1 - m_1 g = m_1 \cdot a \quad (1)$$

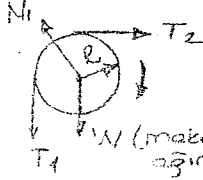
$$\Sigma \vec{F} = m_2 \cdot \vec{a}$$

$$m_2 g - T_3 = m_2 \cdot a \quad (2)$$



- Harekete makaraların etkisinde dâhil edilmelidir.

1. makara

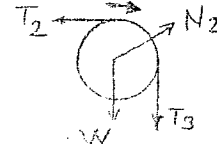


$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha$$

$$T_2 \cdot R - T_1 \cdot R = I \alpha$$

$$(T_2 - T_1) R = I \alpha \quad (3)$$

2. makara



$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha$$

$$T_3 \cdot R - T_2 \cdot R = I \cdot \alpha$$

$$(T_3 - T_2) R = I \cdot \alpha$$

Not: W, N1 ve N2 kuvvetleri dâhice ekseninden geçtikleri için tork olmazlar.

$$(T_2 - T_1) R = I \alpha$$

(makaralar düzdeğer olarak verilmemiş, bu nedenle α değerlerinde eşit olur.)

$$(T_3 - T_2) R = I \alpha$$

$$(T_3 - T_1) R = 2 I \alpha \quad (5)$$

① ve ② ifadelerinden T_3 ve T_1 çekilirse $T_3 = m_2(g - a)$

$$T_1 = m_1(g + a)$$

Bu ifadeler (5) nolu bağıntıda yazılırsa

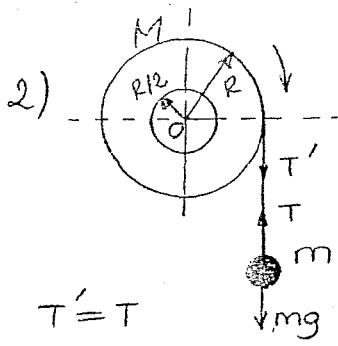
$$(T_3 - T_1) R = 2 I \alpha$$

$$[m_2(g - a) - m_1(g + a)] = 2 I \alpha, \quad \alpha = \frac{a}{R} \text{ yerine yazılır ve ifade düzenlenirse}$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{2I}{R^2}}$$

elde edilir.

Not: Sistemin hareket yönü pozitif yön olarak seçildi. Kuvvetler ve torklar bu kabule göre yazılmıştır.



TORK

Sürtünme kuvvetine ait tork, τ_f , hareket karşı çıkar, bu nedenle

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha$$

$$T \cdot R - \tau_f = I \cdot \alpha \Rightarrow \boxed{\tau_f = TR - I \alpha} \quad (1)$$

m kütlesi için hareket denklemini yazalım.

$$\Sigma F_y = m \cdot a$$

$$mg - T = m \cdot a \Rightarrow \boxed{T = m(g - a)} \quad (2)$$

m kütlesi düşeyde y kadar aşağıya iniyor, böylece

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow \boxed{a = \frac{2y}{t^2}} \quad (3) \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R} = \boxed{\frac{2y}{R t^2}} \quad (4)$$

İçer boş silindirin geometrik eksenine göre eylemsizlik momenti,

$$I = \frac{1}{2} M (R_{iç}^2 + R_{dış}^2) = \frac{1}{2} M \left[\left(\frac{R}{2} \right)^2 + R^2 \right] = \boxed{\frac{5}{8} M R^2} \quad (5)$$

2, 3, 4 ve 5 nolu bağıntılar (1) ifadesinde yazılarak düzenlenir

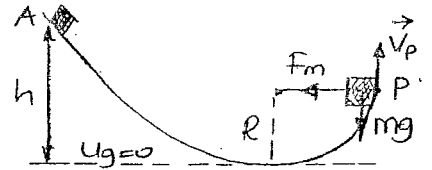
$$\tau_f = R \left[m \left(g - \frac{2y}{t^2} \right) - \frac{5}{4} M \left(\frac{y}{t^2} \right) \right]$$

$$3) \quad K=0 \Rightarrow \Delta E=0 \Rightarrow E_A = E_P$$

$$K_A + U_A = K_P + U_P$$

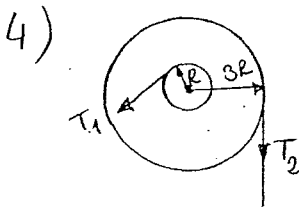
$$mgh = \frac{1}{2} m v_P^2 + m g \cdot R$$

$$v_P^2 = 2g(h - R) = 60 \text{ m}^2/\text{s}^2$$



P noktasındaki merkezî ivme, $a_r = \frac{v_P^2}{R} = \frac{60}{2} = 30 \text{ m/s}^2$

P noktasındaki teğetsel ivme, $a_t = g = 10 \text{ m/s}^2$ dir.



Denge koşulları $\left[\begin{array}{l} \Sigma \vec{F} = 0 \\ \Sigma \vec{\tau} = 0 \end{array} \right]$

$$\Sigma \vec{\tau} = 0 \Rightarrow T_2 \cdot 3R - T_1 \cdot R = 0$$

$$\boxed{3T_2 = T_1} \quad (1)$$

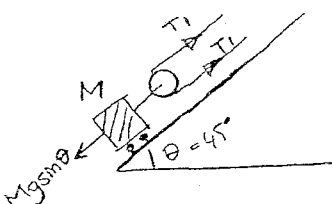
$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \boxed{T_2 = m \cdot g}$$

Eğik düzlem üzerinde :

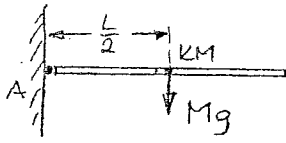
$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow M g \sin \theta = 2 T_1$$

$$M g \sin 45 = 2 \cdot (3 T_2) = 6 \cdot m g$$

$$m = \frac{M \sin 45}{6} = \underline{\underline{17.7 \text{ kg}}}$$



5)



A noktasına göre tork, (Not: merkez

$$\tau_A = F \cdot r_{\perp} = Mg \cdot \frac{L}{2}$$

kuvvetin tor
sıfır olur.)

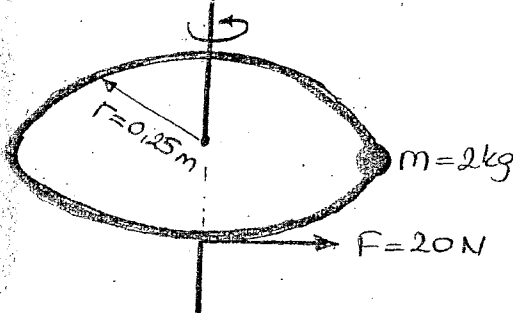
$$\tau_A = I \cdot \alpha = Mg \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{Mg \frac{L}{2}}{\frac{1}{3} ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

$I = \frac{1}{3} ML^2$ (cubukun bir
ucundan geçen
eksen göre
eylemsizlik
momenti)

$$a_t = \alpha \cdot r, \quad r = L \quad \text{ve} \quad \alpha = \frac{3g}{2L} \quad \text{yerine yazılırsa}$$

$$a_t = \frac{3g}{2L} \cdot L = \underline{\underline{\frac{3}{2}g}}$$

- 6) Kütleleri önemsenmeyen bir bisiklet tekerleği dikey bir eksen etrafında serbestçe dönebilecek şekilde yerleştirilmiştir. Bu tekerleğin acaresinde 2 kg'lık bir cisim bulunmaktadır. Tekerleğin acaresine dolanan bir ipin ucu $F = 20 \text{ N}$ luk sabit bir kuvvetle 3 saniye çekilmektedir. Açısal hareketin formülü ve bu süre sonundaki hızını bulunuz.



$$I_{\text{sistem}} = I_{\text{tekerlek}} + I_{\text{cisim}} \quad (\text{Not: tekerlekten önce edilecek})$$

$$I_{\text{sistem}} = mr^2$$

$$= 2 \cdot 0,25^2 = \underline{\underline{0,125 \text{ kgm}^2}}$$

$$\Sigma \tau = F \cdot r_{\perp} = I \cdot \alpha \rightarrow \alpha = \frac{F \cdot r}{I} = \frac{20 \cdot 0,25}{0,125} = \underline{\underline{40 \text{ rad/s}^2}}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \quad \omega_0 = 0 \text{ ise}$$

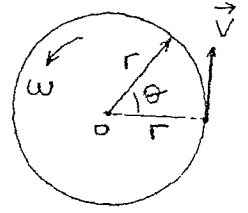
$$\omega = \alpha t = 40 \cdot 3 = \underline{\underline{120 \text{ rad/s}}} \quad \text{veya} \quad \frac{120}{2\pi} = 19 \text{ devir/s}$$

KATI BİR CİSMİN SABİT EKSEN ETRAFINDA DÖNMESİ
(ÖDEV 9)

① $r = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}$

$\alpha = 3 \text{ devir/s}^2 = 3 \cdot 2\pi \text{ rad/s}^2 = 6\pi \text{ rad/s}^2$

$t=0 \Rightarrow \theta_0=0, \underline{\underline{w_0 = 2 \text{ devir/s} = 2 \cdot 2\pi = 4\pi \text{ rad/s}}}$



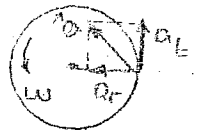
a) $w = w_0 + \alpha t = 4\pi + (6\pi \cdot 6) = 40\pi \text{ rad/s}$

b) $v = w \cdot r = (40\pi \text{ rad/s})(0.4 \text{ m}) = 16\pi \text{ m/s}$

c) $\theta = w_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
 $= (4\pi \text{ rad/s}) \cdot (6 \text{ s}) + \frac{1}{2} (3 \text{ devir/s}^2) \cdot (6 \text{ s})^2 = \underline{\underline{132\pi \text{ radyan}}}$

d) $a_t = \alpha \cdot r = (6\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2})(0.4 \text{ m}) = 2.4\pi \text{ m/s}^2$

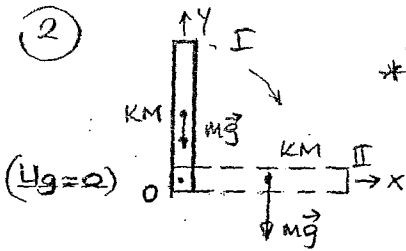
$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(16\pi)^2}{0.4 \text{ m}} = 640\pi^2 \text{ m/s}^2 = 6310 \text{ m/s}^2$



toplam arızgızel (doğrusel) ivmenin büyüklüğü, $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$

$a = \sqrt{(2.4\pi)^2 + (6310)^2} = 6310 \text{ m/s}^2$

②

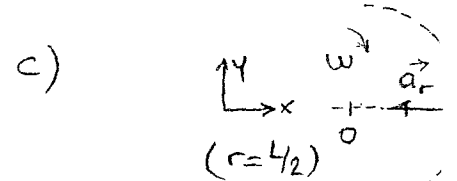


* [Çubuğun kütle merkezi den geçen eksen göre $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} ML^2$]

$I_0 = I_{\text{cm}} + Md^2 \rightarrow [\text{O noktasından geçen eksen göre}]$

$= \frac{1}{12} ML^2 + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$

a) $E_I = E_{II}$
 $K_I + U_I = K_{II} + U_{II}$
 $mg\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$



$a_t = \alpha \cdot r = \left(\frac{3g}{2L}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4}g$

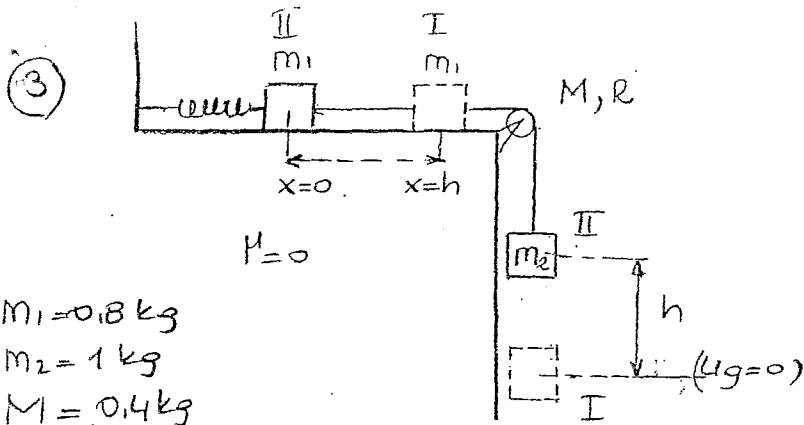
$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \left(\frac{3g}{L}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3}{2}g$

$\vec{a} = \left[-\frac{3}{2}g\vec{i} - \frac{3}{4}g\vec{j}\right] \text{ m/s}^2$

d) Newton'un 2. yasaına göre $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m \cdot a_x \\ -R_x = m \cdot \left(-\frac{3}{2}g\right) = -\frac{3}{2}mg \end{cases}$

$\Sigma F_y = m \cdot a_y$
 $R_y - mg = m \cdot \left(-\frac{3}{4}g\right)$
 $R_y = \frac{mg}{4}$



$$m_1 = 0.8 \text{ kg}$$

$$m_2 = 1 \text{ kg}$$

$$M = 0.4 \text{ kg}$$

$$k = 10^3 \text{ N/m}$$

$$x = h = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

$$v_1 = v_2 = v$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$E_I = K_1 + \sum U_1 = \cancel{K_1} + U_{\text{yay.}}$$

$$= \frac{1}{2} k x^2 = \underline{5 \text{ J}}$$

$$E_{II} = K_2 + \sum U_2 = K_{\text{cisimler}} + K_{\text{mek.}}$$

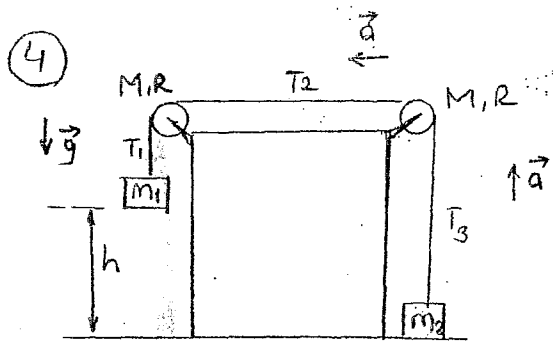
$$= \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} v^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \cdot \frac{v^2}{R^2}$$

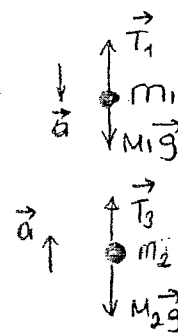
$$= 0.9 v^2 + 0.1 v^2 + 1 = v^2$$

$$\mu = 0 \Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow E_I = E_{II}$$

$$5 \text{ J} = v^2 + 1 \Rightarrow \underline{v = 2 \text{ m/s}} \Rightarrow v_1 = v_2 = 2$$



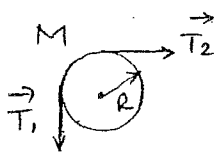
* (hareketin aynı pozitif yön olarak seç.)



$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$m_1 \cdot g - T_1 = m_1 \cdot a \rightarrow \underline{T_1 = m_1(g - a)}$$

$$T_3 - m_2 g = m_2 a \rightarrow \underline{T_3 = m_2(a + g)}$$



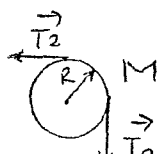
1. makara

$$\sum \tau = I \cdot \alpha$$

$$T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = I \alpha$$

$$R(T_1 - T_2) = I \alpha$$

$$\textcircled{3} \quad \underline{(T_1 - T_2) = \frac{I \cdot \alpha}{R}}$$



2. makara

$$\sum \tau = I \cdot \alpha$$

$$T_2 \cdot R - T_3 \cdot R = I \cdot \alpha$$

$$R(T_2 - T_3) = I \alpha$$

$$\underline{(T_2 - T_3) = \frac{I \cdot \alpha}{R}} \quad \textcircled{4}$$

③ ve ④ den

$$T_1 - T_2 = T_2 - T_3 = I \alpha / R$$

$$= \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \left(\frac{a}{R} \right)$$

$$= \frac{M \cdot a}{2}$$

$$\Rightarrow T_1 - T_2 = T_2 - T_3 = 0.625$$

$$\Rightarrow \underline{T_1 - T_3 = 1.25} \quad \textcircled{5}$$

① ve ② den

$$T_3 - T_1 = a(m_1 + m_2) - g(m_1 - m_2)$$

$$= 35a - g = 8.75$$

$$\Rightarrow g = 8.75 - (T_3 - T_1)$$

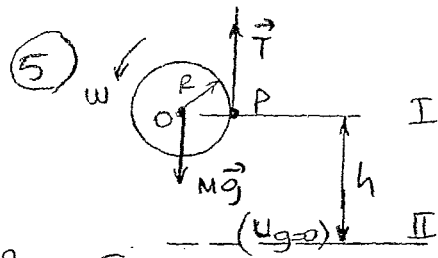
$$= 8.75 + \underline{T_1 - T_3} \quad \textcircled{5}$$

$$g = 8.75 + 1.25$$

m_1 'in hareketinden önce bulabiliriz:

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \rightarrow a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 0.5}{2^2}$$

$$a = \underline{0.25 \text{ m/s}^2}$$



$$R = 0.5 \text{ m}$$

$$M = 5 \text{ kg}$$

$$\Sigma \tau_O = I \cdot \alpha$$

$$T \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \left(\frac{a}{R} \right) \Rightarrow \boxed{T = \frac{M \cdot a}{2}} \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$Mg - T = M \cdot a \Rightarrow \boxed{T = M(g - a)} \quad (2)$$

① ve ② den

$$a) \quad M(g - a) = \frac{M \cdot a}{2} \Rightarrow g = \frac{3}{2} a \Rightarrow a = \frac{2}{3} g \approx 6.7 \text{ m/s}^2$$

$$b) \quad T = \frac{M \cdot g}{2} = \frac{50}{2} \text{ N} \approx 25 \text{ N}$$

$$c) \quad \alpha = \frac{a}{r} = \frac{\frac{2}{3} g}{0.5} \approx 13.3 \text{ rad/s}^2$$

Veya enerji bağlantıları ile çözülebilir:

$$E_I = E_{II}$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$U_g = K_{\text{dönme}} + K_{\text{ötkeme}} \rightarrow (\text{yuvarlanan cisimler için})$$

$$mgh = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$Mgh = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \cdot \left(\frac{v}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} M v^2$$

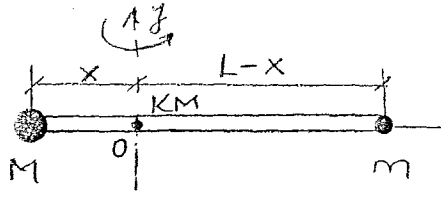
$$gh = \frac{3}{4} v^2 \rightarrow v^2 = \frac{4}{3} gh$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot h$$

$$v^2 = 2ah \Rightarrow 2ah = \frac{4}{3} gh \Rightarrow a = \frac{2}{3} g$$

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad \text{ve} \quad T = \frac{M \cdot a}{2} \quad \text{ifadelerinden yukarıdaki gibi hesap}$$

(6)



$$\text{Sistem} = (M + m + \text{Cubuk})$$

$$I = \sum_{\text{Sistem}} m_i \cdot r_i^2 \quad (\text{ayrık küteler için}) \quad [\text{Cubukun kütlesi ihmal ed}]$$

$$I_{\text{KM}} = M \cdot x^2 + m(L-x)^2 \rightarrow (\text{sistemin kütle merkezinden geç} \\ \text{ekseni göre eylemsizlik momenti})$$

$$\text{minimum olma koşulu} \Rightarrow \frac{dI}{dx} = 0 \quad \text{olmalı} \quad (\text{Fonksiyonun bir} \\ \text{türevinin sıfıra} \\ \text{landığı noktalar} \\ \text{maksimum veya} \\ \text{minimum noktası} \\ \text{verir.})$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dx} = \frac{d}{dx} [Mx^2 + m(L-x)^2] = 0$$

$$= M \cdot 2x + 2m(L-x)(-1) = 0$$

$$2Mx = 2m(L-x) \rightarrow \boxed{x = \frac{mL}{M+m}} \quad \text{olmalı.}$$

* Sonucun sağlanmasını yapmak için sistemin kütle merkezinin koordinatlarını bulabiliriz:

$$y_{\text{KM}} = 0$$

$$x_{\text{KM}} = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{\sum m_i}$$

$$= \frac{M \cdot 0 + m \cdot L}{m+M}$$

$$x_{\text{KM}} = \frac{mL}{m+M}$$

$$\text{KM} \left[\frac{mL}{m+M}, 0 \right]$$

