MEKANİK — Statik Konu

Mekanik: Kuvvetlerin etkisi altında cisimlerin denge ve hareket şartlarını anlatan ve inceleyen bilim dalıdır. Amacı fiziksel olayları açıklamak, önceden tahmin etmek ve böylece mühendislik uygulamalarına ışık tutmaktır.

MEKANİK

- Rijit Katı Cisim Mekaniği
  - Statik
  - Dinamik
    - Kinematik
    - Kinetik
- Şekil değiştiren (Rijit olmayan) katı cisim mekaniği (Mukavemet)
- Akışkanlar Mekaniği
  - Sıkıştırılabilen A. M. (Gaz dinamiği)
  - Sıkıştırılamayan A. M. (Hidrolik)

STATİK

* Vektörler Bilgisi
* Kuvvet (vektör) sistemleri
* Statiğin Temel Pren.
* Ağırlık Merkezi
* Uzay statik
* Düzlem statik.

Kuvvet: Mekanikte temel kavramlarda biri ola kuvvet uygulama noktası şiddeti, doğrultu ve yönü ile karakterize edilir, ve vektörle gösterilebilir. Vektörel büyüklükler üzerinde yapılacak işlemler vektörler üzerine yapılan işlemlerdir. Kuvvet gibi bir noktanın hızı, ivmesi de vektörel büyüklüklerdir.

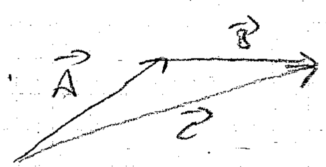
kuvvet ⇒ fiziksel büyüklük
vektör ⇒ matematiksel büyüklük.

Vektörler:

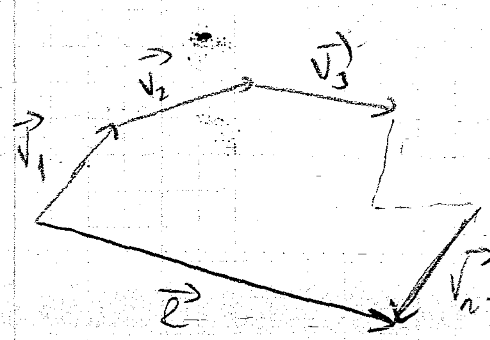
- Serbest vek.
- Bağlı vek.
- Kayan vek.

* kaydırılabilme ilkesi: Bir rijit katı cismin bir noktasına etkiyen bir kuvvetin yerine aynı tesir çizgisi üzerinde aynı şiddet, doğrultu ve yönde başka bir noktaya etkiyen bir kuvvet konursa rijit katı cismin denge ve hareket durumunda değişiklik olmaz.

Vektörlerin toplanması



$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$



$$\sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \dots \vec{V}_n = \vec{R}$$

⟶ vektör poligonu

Kapalı vek. p. $\vec{R} = 0$

Açık vek. p. $\vec{R} \neq 0$

$\vec{R}$ ⇒ geometrik toplam

Vektör Cebirinin Kuralları

1) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}=\vec{C}$ $\vec{C}-\vec{B}=\vec{A}$

2) $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$

3) $k.\vec{A}=\vec{A}.k=\vec{C} \Longrightarrow k>0 \rightarrow \vec{A},\vec{C}$ aynı yönde

$k<0 \rightarrow \vec{A},\vec{C}$ zıt yönde

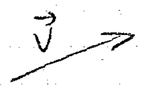
$k=-1 \rightarrow \vec{C}=-\vec{A}$ zıt vektör

$k=1 \rightarrow \vec{C}=\vec{A}$ eşit vektör

4) $k(n\vec{A})=(kn)\vec{A}$

5) $k(\vec{A}+\vec{B})=k\vec{A}+k\vec{B}$ 6) $(k+n)\vec{A}=k\vec{A}+n\cdot\vec{A}$

Bir vektörün Modülü



$|\vec{V}|$ vektörün cebirsel ölçüsünün mutlak değerine vektörün büyüklüğü, modülü denir.

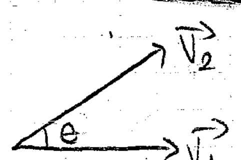
Birim vektör: Büyüklüğü birim uzunlukta olan (modülü 1 olan) vektöre denir. $\vec{e}$, $\vec{u}$ diye gösterilir. $\vec{e_x}=1\vec{i}$; $\vec{e_y}=1\vec{j}$, $\vec{e_z}=1\vec{k}$

Herhangi bir doğrunun birim vektörü için:

Bir vektör oluşturup modülüne böleriz. ($\vec{AB}$ için)

$$\vec{u_L}=\frac{(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

Skaler Çarpım



$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=|\vec{V_1}||\vec{V_2}|\cos\theta$

$\theta=90^\circ \Rightarrow \vec{V_1}\perp\vec{V_2} \Rightarrow \vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=0$

$$\boxed{\begin{array}{l} i.i=1 \\ i.j=0 \end{array}}$$

$\vec{V_1}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$

$\vec{V_2}=B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}$

$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=(A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k})(B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k})$

$=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$ (skaler)

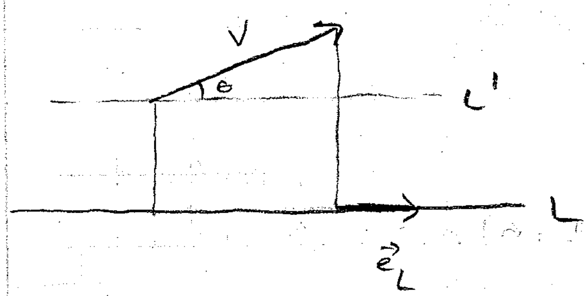
Skaler Çarpım Özellikleri

1) $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \vec{V_2} \cdot \vec{V_1}$

2) $(k \cdot \vec{V_1})\, \vec{V_2} = k(\vec{V_1} \cdot \vec{V_2})$

3) $\vec{V_r}\,(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \vec{V_r}\,\vec{V_1} + \vec{V_r}\,\vec{V_2}$

Bir vektörün bir eksene izdüşümü

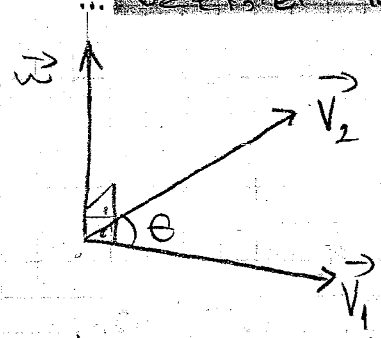


$L \parallel L'$

$|\vec{V}| \cos\theta = \vec{V}\, \vec{e}_L$

Vektörel Çarpım

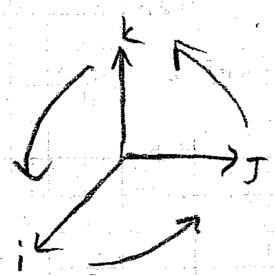
$\wedge \rightarrow$ vektörel çarpma



$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \vec{w}$

$|\vec{w}| = |\vec{V_1}|\,|\vec{V_2}| \sin\theta$

$\left.\begin{array}{l}\theta = 0^\circ \\ \theta = 180^\circ\end{array}\right\} \; |\vec{w}| = 0$



$i \wedge j = k \qquad k \wedge j = -i \qquad i \wedge i = 0$

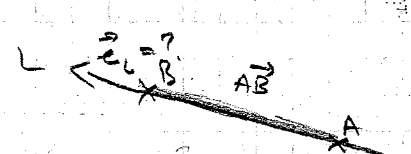
$j \wedge k = i \qquad i \wedge k = -j \qquad j \wedge j = 0$

$k \wedge i = j \qquad j \wedge i = -k \qquad k \wedge k = 0$

$\left.\begin{array}{l}\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k} \\ \vec{B} = B_1 \vec{i} + B_2 \vec{j} + B_3 \vec{k}\end{array}\right\} \; \vec{A} \wedge \vec{B} =$

$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2)\vec{i} + (A_3 B_1 - A_1 B_3)\vec{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\vec{k}$

$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$



izdüşümü $= P_L$

örnek:

$A(2,3,0)$; $B(-2,4,6)$ ise birim vektörünü ve

$\vec{P} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ vektörünün L doğrusu üzerindeki izdüşümü?

$\vec{AB} = -4\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{53}$

$16 + 1 + 36$

$\dfrac{-4\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{53}} = \vec{e}_L = -0{,}549\,\vec{i} + 0{,}137\,\vec{j} + 0{,}823\,\vec{k}$?

$P_L = \vec{P} \cdot \vec{e}_L$

$= -1{,}41$

$2 \cdot (-0{,}549) +$
$3 \cdot (0{,}137) -$
$1 \cdot (0{,}823) =$
$= -1{,}41$

Vektörel Çarpım Özellikleri

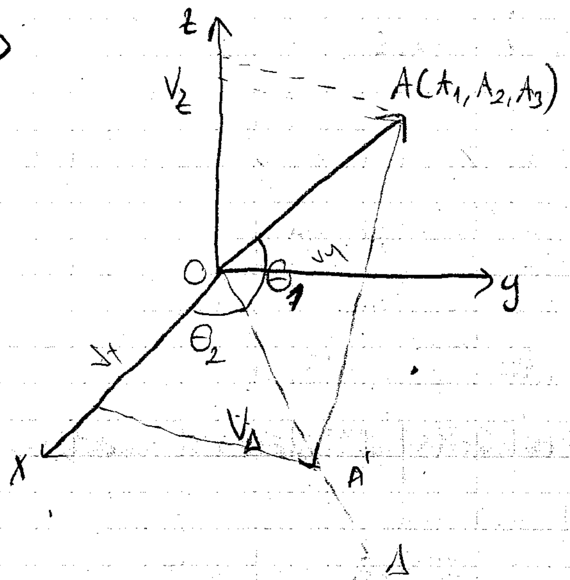
1) $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} \neq \vec{V_2} \wedge \vec{V_1}$

$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = -\vec{V_2} \wedge \vec{V_1}$

2) $(k\vec{V_1}) \wedge \vec{V_2} = \vec{V_1} \wedge (k\vec{V_2})$

3) $\vec{F} \wedge (\vec{V_1} + \vec{V_2} + \dots + \vec{V_n}) = \vec{F} \wedge \vec{V_1} + \vec{F} \wedge \vec{V_2} + \dots + \vec{F} \wedge \vec{V_n}$

ÖR)



$V = 20N = |OA|$

$\theta_1 = \theta_2 = 60°$

$\vec{V} = ?$

$A(?, ?, ?)$

$V = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$

$V = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$

$V_z = V \cdot \sin\theta_1 = 20 \sin 60 = 17{,}32$

$V_y = V_\Delta \sin 60 = 20\cos 60 \sin 60 = 8{,}66$

$V_x = V_\Delta \cos\theta_2 = 20\cos 60 \cos 60 = 5$

$V = 5\vec{i} + 8{,}66\vec{j} + 17{,}32\vec{k}$

$A(5,\ 8{,}66,\ 17{,}32)$

örnek

$A(2, 1, -5)$
$B(5, 5, 7)$
$C(-2, 1, 2)$

a) $-2/3 \cdot \vec{BC} = ?$
b) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = ?$
c) $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = ?$
d) $\vec{CA} \wedge \vec{AB} = ?$

a) $BC = (-7, -4, -5) = (-7\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}) \cdot 2/3 = \frac{14}{3}\vec{i} + \frac{8}{3}\vec{j} + \frac{10}{3}\vec{k}$

b) $\vec{AB} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$ $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -97$ $(-21 - 16 - 60)$

c) $\vec{AC} = -4\vec{i} + 7\vec{k}$

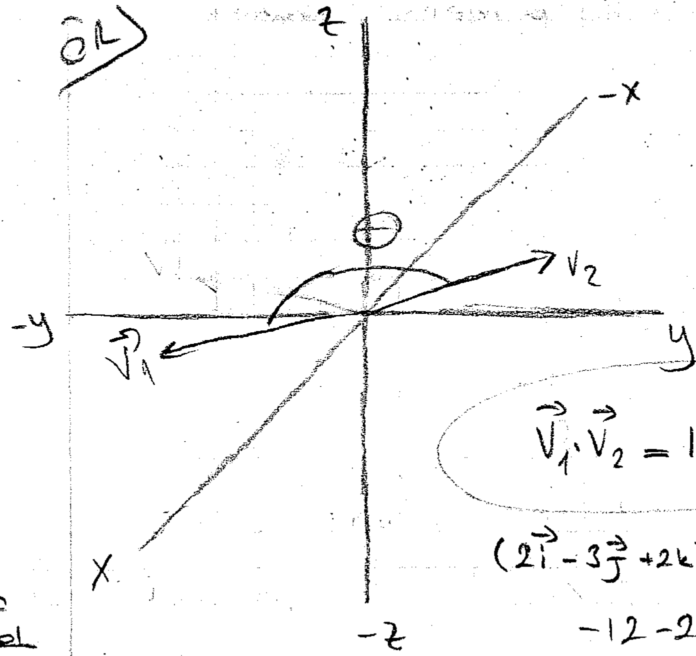
$$\begin{matrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 12 \\ -4 & 0 & 7 \end{matrix}$$

$28\vec{i} - 69\vec{j} + 16\vec{k}$

d) $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{CA} \wedge \vec{AB}$ vektörel çarpım özelliğinden dolayı

c = d

ör)



$V_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

$V_2 = -6i + 8\vec{j}$

$\theta = ?$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1||\vec{V}_2| \cos\theta$$

$$(2\vec{i} - 3\vec{j} + 2k)(-6i + 8j) = \sqrt{4+9+4} \cdot \sqrt{36+64} \cos\theta$$

$$-12 - 24 = \sqrt{17} \cdot 10 \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{-36}{10\sqrt{17}} \Rightarrow \theta = 150.8^\circ$$

uzun
2.yol

$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{\omega}$

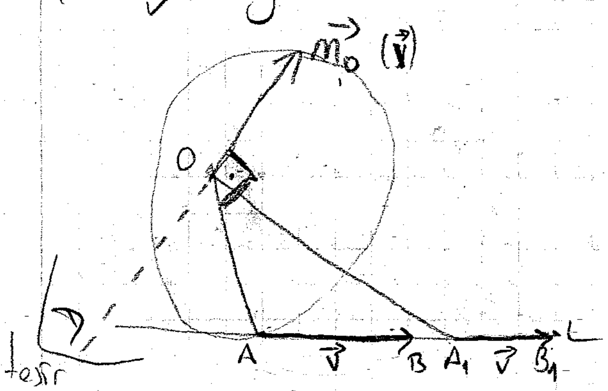
$\vec{\omega} = -16\vec{i} - 12\vec{j} - 2\vec{k}$

$|\vec{\omega}| = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \sin\theta$

$20 = \sqrt{17} \cdot \sqrt{100} \cdot \sin\theta$

$\theta = 29^\circ, \theta = 151^\circ$ ✓

Kayan Bir Vektörün Bir Noktaya Göre Momenti:



$\vec{AB} = \vec{V} \Rightarrow$ kuvvet vektörü

$\vec{OA} \Rightarrow$ yer vektörü

$$|\vec{m}_o(\vec{v})| = |\vec{OA}| \cdot |\vec{V}| \cdot \sin\theta$$

aynı

$$\vec{m}_o(\vec{V}) = \vec{OA} \wedge \vec{V}$$

$$\vec{m}_o(\vec{V}) = \vec{OA_1} \wedge \vec{V}$$

İspat: $\vec{m}_o(\vec{V}) = (\vec{OA} + \vec{AA_1}) \wedge \vec{V}$

$$\vec{m}_o(\vec{V}) = \vec{OA} \wedge \vec{V} + \underbrace{\vec{AA_1} \wedge \vec{V}}_{0}$$

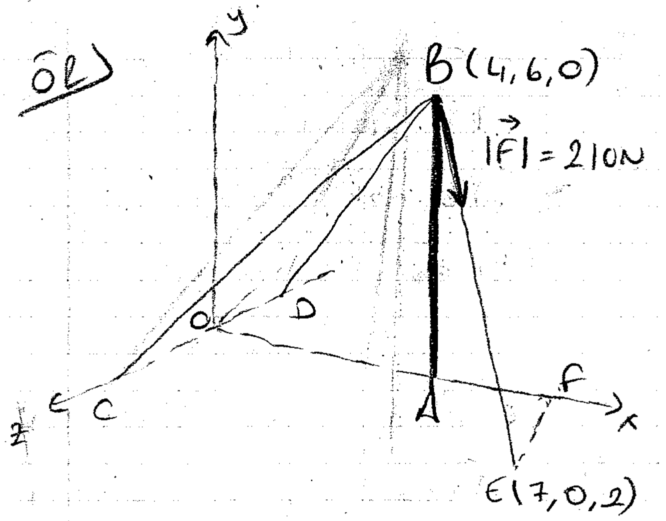
$$\vec{m}_o(\vec{V}) = \vec{OA} \wedge \vec{V}$$

kaydırılabilme ilkesi

⊛ $\vec{V}$ kayan vektörünün O noktasına göre momenti A noktasının L doğrusu üzerindeki seçilişine bağlı değildir. Bir kayan vektör tesir doğrusu üzerinde nerede bulunursa bulunsun, bir noktaya göre momenti değişmez. Ancak moment vektörü O düzlemine dik olacaktır. Ve cismin tesir çizgisini dönme ekseni kabul edecektir.

Örnek arkada ① ②

ÖR)



6 metre boyundaki bir AB telefon direği şekildeki gibi 3 gergi teli ile bağlanmıştır. BE teli tarafından B noktasından

OD = 5m
OC = 3m
OA = 4m
AF = 3m
FE = 2m
AB = 6m

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OB} \wedge \vec{F} \qquad \vec{F} = |\vec{F}| \cdot \vec{e}_{BE}$$

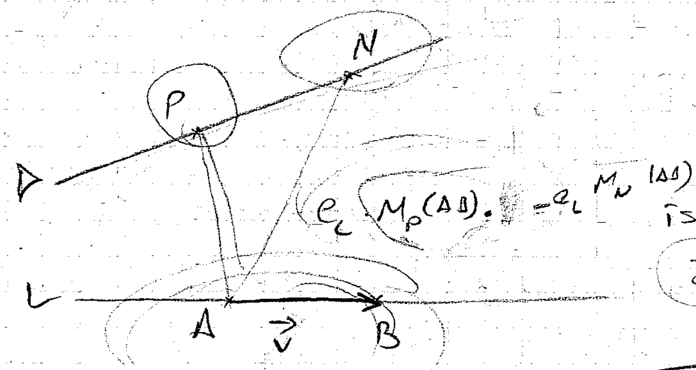
$$\vec{F} = 210 \cdot \frac{\vec{BE}}{|\vec{BE}|} = 210\,\frac{(3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k})}{\sqrt{9+36+4}}$$

$$\vec{F} = 90\vec{i} - 180\vec{j} + 60\vec{k}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = (4\vec{i} + 6\vec{j}) \wedge (90\vec{i} - 180\vec{j} + 60\vec{k})$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 6 & 0 \\ 90 & -180 & 60 \end{vmatrix} = 360\vec{i} - 240\vec{j} - 1260\vec{k}$$

Kayan Bir Vektörün Bir Eksene Göre Momenti



$$\left.\begin{aligned} \vec{M}_P(\vec{v}) &= \vec{PA} \wedge \vec{v} \\ \vec{M}_N(\vec{v}) &= \vec{NA} \wedge \vec{v} \end{aligned}\right\} \quad \vec{M}_P(\vec{v}) \neq \vec{M}_N(\vec{v})$$

İspat: $\vec{M}_P(\vec{v}) - \vec{M}_N(\vec{v}) = (\vec{PA} - \vec{NA}) \wedge \vec{v}$

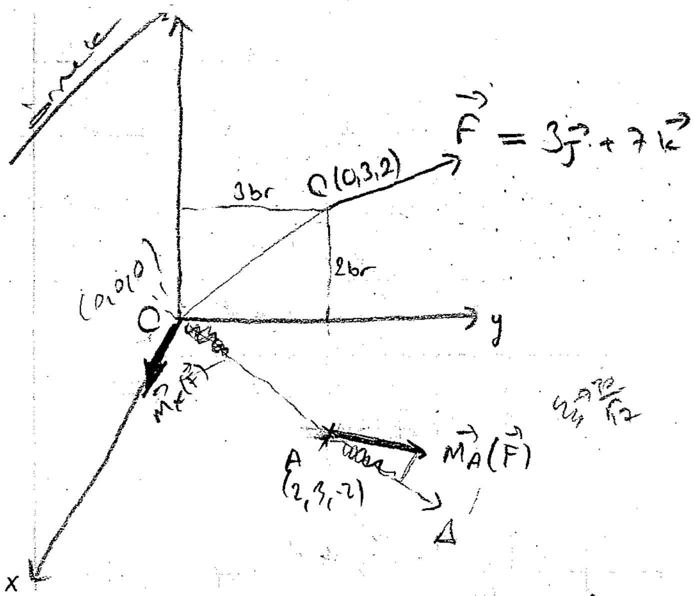
$$\vec{e}_\Delta (\vec{M}_P(\vec{v}) - \vec{M}_N(\vec{v})) = \underbrace{(\vec{PN} \wedge \vec{v})\,\vec{e}_\Delta}_{0}$$

dik olduğu için

$$\boxed{\vec{e}_\Delta\, \vec{M}_P(\vec{v}) = \vec{e}_\Delta\, \vec{M}_N(\vec{v})}$$

Bir vektörün bir eksen üzerindeki herhangi bir noktaya göre momentinin o eksen üzerindeki izdüşümü sabit kalmaktadır. Bu izdüşüme o vektörün o eksene göre moment denir. Ve sonuç skalerdir. Fiziksel anlamı bir kuvvetin rijit cismi sabit bir Δ ekseni etrafında döndürme çabasını ölçmektedir.

[moment vektörleri farklı olsada izdüşümleri aynıdır]



C noktasına etkiyen F vektörünün;

a) O noktasına göre

b) A noktasına göre

c) x, y, z eksenlerine göre

d) O'dan başlayıp A'dan geçen Δ eksenine göre momentlerini bulunuz

$\vec{M}_o(\vec{F}) = ?$

$\vec{M}_A(\vec{F}) = ?$

$\vec{M}_{ox}(\vec{F}) = ?$

$\vec{M}_{oy}(\vec{F}) = ?$

$\vec{M}_{oz}(\vec{F}) = ?$

$\vec{M}_\Delta(\vec{F}) = ?$

a) $\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{OC} \wedge \vec{F}$

$\vec{M}_o(\vec{F}) = (3\vec{j} + 2\vec{k}) \wedge (3\vec{j} + 7\vec{k})$

$\vec{M}_o(\vec{F}) = 21i - 6i = 15\vec{i}$

b) $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AC} \wedge \vec{F}$

$\vec{M}_A(\vec{F}) = (-2\vec{i} + 4\vec{k}) \wedge (3\vec{j} + 7\vec{k})$

$\vec{M}_A(\vec{F}) = -12\vec{i} + 14\vec{j} - 6\vec{k}$

c) $\vec{M}_{ox}(\vec{F}) = \vec{M}_o(\vec{F}) \cdot \vec{e}_x = 15\vec{i} \cdot 1\vec{i} = 15$ Nbr

$\vec{M}_{oy}(\vec{F}) = 15\vec{i} \cdot 1\vec{j} = 0$

$\vec{M}_{oz}(\vec{F}) = 15\vec{i} \cdot 1\vec{k} = 0$

d) 1. yöntem O'ya göre

$\vec{e}_\Delta = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{4+9+4}}$

$\vec{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_o(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta$

$= 15\vec{i} \left(\frac{2}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{17}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{17}}\vec{k}\right)$

$\vec{M}_\Delta(\vec{F}) = \frac{30}{\sqrt{17}}$

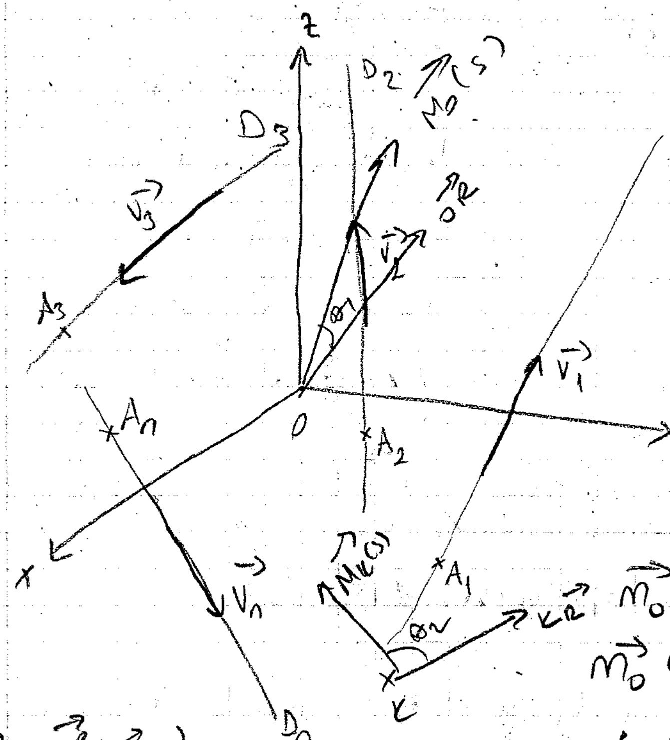
2. yöntem A'ya göre

$\vec{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F})\, \vec{e}_\Delta$

$M_\Delta(\vec{F}) = (-12i + 14j - 6k)\left(\frac{2}{\sqrt{17}}i + \frac{3}{\sqrt{17}}j - \frac{2}{\sqrt{17}}k\right)$

$M_\Delta(\vec{F}) = \frac{-24}{\sqrt{17}} + \frac{42}{\sqrt{17}} + \frac{12}{\sqrt{17}} = \frac{30}{\sqrt{17}}$

Vektör Sistemi (Kuvvet sistemi)



S

$\{(D_1\vec{V_1}), (D_2\vec{V_2}) ---, (D_n\vec{V_n})\}$

Sonlu sayıda kayan vek... oluşturduğu grubu vektör sistemi denir.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{V_i} = \vec{V_1} + \vec{U_2} + --- + \vec{U_n} = \vec{R}$$

$\vec{OR}$ = Geometrik toplam

$$\vec{M_0}(S) = \vec{OA_1} \wedge \vec{F_1} + \vec{OA_2} \wedge \vec{F_2} + --- + \vec{OA_n} \wedge \vec{F_n}$$

$$\vec{M_0}(S) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{OA_i} \wedge \vec{F_i}) \Rightarrow \text{Bileşke mome...}$$

$\boxed{(F = V)}$

$\vec{KR} = \vec{OR}$

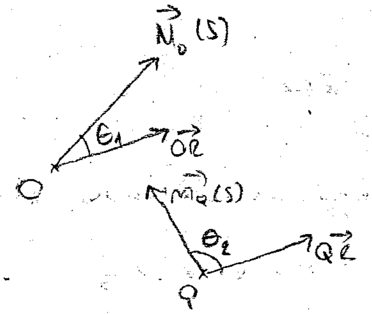
$\vec{M_0}(S) \neq \vec{M_K}(S)$

$\vec{OR}$, $M_0(S)$ İndirgeme elemanları (statik eşdeğer) { geometrik toplam / bileşke moment.

Vektör sistemindeki vektörlerin herhangi noktasındaki geom... toplamına sistemin O noktadaki geo. toplamı denir. Vektör si...mindeki vektörlerin herhangi bir noktadaki momen...lerinin oluşturduğu moment vektörlerinin toplamına da sistemin O noktadaki bileşke momenti denir. Bir vektör sis...nin bir noktadaki geometrik toplam vektörü ile bileşke moment vektörünün ikisine birden sistemin O noktadaki indirgeme elemanları (statik eşdeğer) denir. Sistemin her noktada indirgeme ele. bulunabilir. Geo. toplam cisin ötelenme durumu; bileşke moment ise cismin dönme du... vektörel olarak ifade eder. Bir sisteme eşdeğer en basi... sistemi bulmaya ise sistemin indirgemesi denir.

Örnek (3)

Geçiş Teoremi



$$\vec{M}_O(S) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{OA_i} \wedge \vec{V_i})$$

$$\vec{M}_Q(S) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{QA_i} \wedge \vec{V_i})$$

$$\vec{M}_Q(S) = \sum_{i=1}^{n} \left[(\vec{QO} + \vec{OA_i}) \wedge \vec{V_i}\right]$$

$$\vec{M}_Q(S) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{QO} \wedge \vec{V_i}) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{OA_i} \wedge \vec{V_i})$$

$$\vec{M}_Q(S) = \vec{QO} \wedge \vec{OR} + \vec{M}_O(S)$$

$$\boxed{\vec{M}_Q(S) = \vec{M}_Q(\vec{OR}) + \vec{M}_O(S)}$$

Tanım: S vektör sisteminin Q noktasındaki bileşke momenti O noktasındaki bileşke momentin Q'daki eşdeğeri ile O noktasındaki geo. toplamın Q'ya göre momentinin oluşturduğu Q noktasından çıkan iki moment vektörünün toplamıdır.

Eşdeğer vektör sistemi:

Birbirinden farklı iki vektör sisteminin bir noktadaki indirgeme elemanları aynı ise diğer bir noktadaki indirgeme elemanları da aynı olacaktır. Ve bu iki vektör sistemine eşdeğer vektör sistemleri denir.

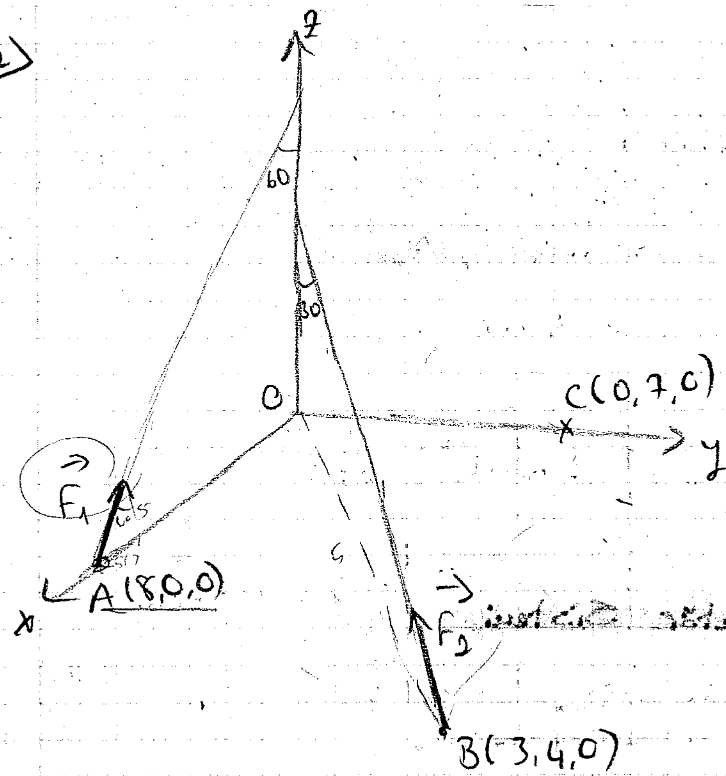
$$S_1 \equiv S_2$$

$\vec{OR}$ $\quad M_o(S_1)$ $\quad \vec{OR}$ $\quad M_o(S_2)$

-y

	Başlangıç nokt. koord.			vektörel gösterimleri			momentin		
	x	y	z	X	Y	Z	M_{ox} L	M_{oy} M	M_{oz} N
$\vec{F_1}$	8	0	0	$-5\sqrt{3}$	0	5	0	-40	0
$\vec{F_2}$	3	4	0	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{16}{5}$	$4\sqrt{3}$	$16\sqrt{3}$	$-12\sqrt{3}$	0
Σ	/	/	/	-11,06	-3,2	11,92	27,7	-60,78	0
					$\vec{OR}$			$\vec{M}_o(S)$	

ÖR)



$F_1 = 10N$

$F_2 = 8N$

Bu iki vektörden oluşan vektör sisteminin;

a) O'daki indirgeme elemanlarını,

b) x, y, z eksenlerine göre bileşke momenti yazınız

c) OB eksenine göre bileşke momenti bulunuz?

d) C noktasına göre indirgeme elemanlarını bulunuz?

$$\vec{F_1} = -5\sqrt{3}\,\vec{i} + 5\vec{k}$$

$$\vec{F_2} = -\frac{12}{5}\vec{i} - \frac{16}{5}\vec{j} + 4\sqrt{3}\vec{k}$$

$x \cdot y = z$
$y \cdot z = x$
$z \cdot x = y$

$z \cdot y = -x$
$y \cdot x = -z$
$x \cdot z = -y$

a) $\vec{OR} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$= -11{,}06\,\vec{i} - 3.2\vec{j} + 11.92\vec{k}$

$\vec{m_0}(S) = (\vec{OA} \wedge \vec{F_1}) + (\vec{OB} \wedge \vec{F_2})$

$= \left[(8i) \wedge (-5\sqrt{3}i + 5k)\right] + \left[(3i + 4j) \wedge (-\frac{12}{5}i - \frac{16}{5}j + 4\sqrt{3}k)\right]$

$= 27.7i - 60.78j$

TABLO

b) $m_{ox}(S) = 27.7$

$m_{oy}(S) = -60.78$

$m_{oz}(S) = 0$

c) $M_{OB}(S) = m_0(S)\,\vec{e}_{OB}$

$= (27.7i - 60.78j)(\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j)$

$\boxed{M_{OB}(S) = -32}$

d) $\vec{CR} = \vec{OR}$

$\vec{M_c}(S) = \vec{CO} \wedge \vec{OR} + \vec{m_0}(S)$

$\vec{M_c}(S) = \left[(-7j) \wedge (-11{,}06i - 3{,}2j + 11{,}92k)\right] + (27.7i - 60.78j)$

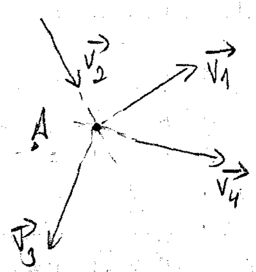
⋮

Dejenere Sistem

$\vec{M}_O(S) \cdot \vec{OR} = 0$ (dejenerelik şartı)

1) $\vec{OR} \neq 0$, $\vec{M}_O(S) = 0$ $\Rightarrow$ Bileşkeye eşdeğer vektör sistemi
2) $\vec{M}_O(S) \neq 0$, $\vec{OR} = 0$ $\Rightarrow$ Vektör çiftine (kuple) eşdeğer vektör sistemi
3) $\vec{M}_O(S) = 0$, $\vec{OR} = 0$ $\Rightarrow$ Sıfıra eşdeğer vektör sistemi
4) $\vec{M}_O(S) \neq 0$, $\vec{OR} \neq 0$, $\vec{OR} \perp \vec{M}_O(S)$ $\Rightarrow$ Bileşkeye eşdeğer vektör sistemi

Bileşkeye Eşdeğer Vektör Sistemi



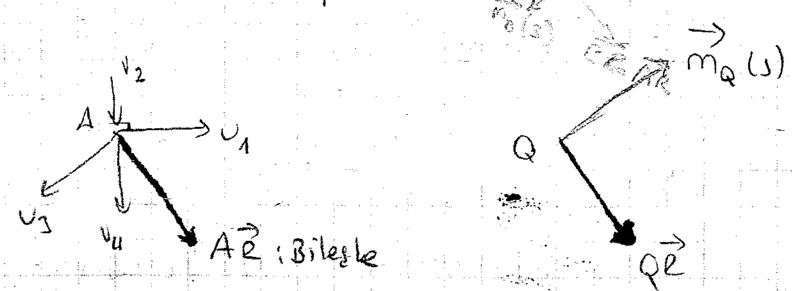
$\vec{AR} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} + \vec{V_4}$

$\vec{AR} \neq 0 \quad = \vec{R}$: Bileşke

$\vec{M}_A(S) = 0$

* Bileşke sistemi tek başına ifade eder ve geometrik toplamla karıştırılmamalıdır. Bileşkesi olan bir sistemin bir başka noktada indirgeme elemanları olur. Böyle bir durumda indirgeme ele. yaptıkları açı 90' derecedir.

Varignon Teoremi:

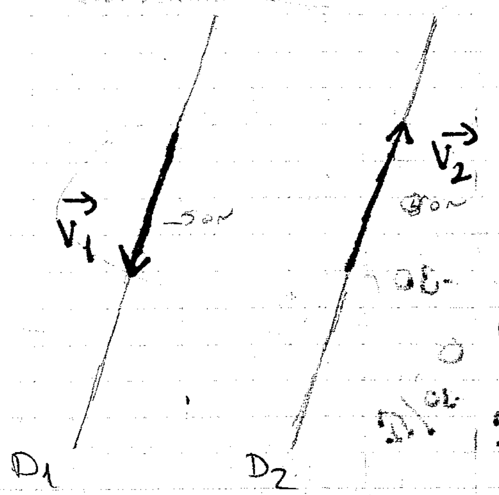


$$\boxed{\vec{M}_Q(S) = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{QA_i} \wedge \vec{V_i} \right) = \vec{QA} \wedge \vec{AR}}$$

* Bir bileşkesi olan vektörlerin oluşturduğu vek. sist. herhangi bir noktaya göre her bir vektörünün momentlerinin toplamı sistemin bileşkesi o noktaya göre momentine eşittir. Aynı teoremi bir eksene göre de söyleyebiliriz.

* Bileşke vermeyen sistemlerde bu teorem geometrik toplam için söylenmez.

Kuple (vektör çiftine) eşdeğer vektör sistemi



$D_1 \parallel D_2$

$|\vec{V_1}| = |\vec{V_2}|$

$\vec{V_1} = -\vec{V_2}$

$\vec{OR} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = 0$

$\vec{M_0}(s) \neq 0$

Tesir doğruları paralel, şiddetleri eşit fakat yönleri zıt iki vektör bir vektör çifti oluştururlar. Vektör çiftler bulundukları cismi, düzlemi ötelenme yapmaya değil dönme yapmaya veya dönmesini durdurmaya zorlarlar. Bileşke momen bu sistemlerde serbest vektördür. Herhangi bir noktaya uygulanabi

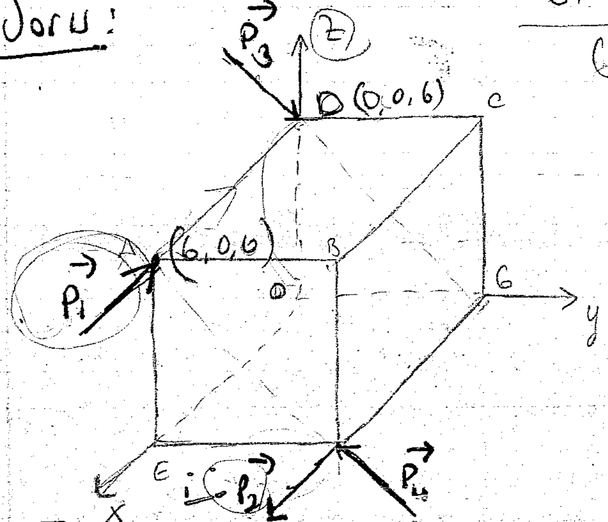
Sıfıra Eşdeğer Vektör Sistemi

$$\left.\begin{array}{l} \vec{M_0}(s) = 0 \\ \vec{OR} = 0 \end{array}\right\} S \equiv 0$$

Statiğin temel prensibini oluşturur.

Soru:

$$\frac{-6 \; 0 \; 0}{6}$$



5 N'luk P_1, P_2, P_3 ve P_4 kuvvetler şekildeki gibi 6x6x6 birimlik küpe etki etmekte. Bu durumda sistemin

a) O'daki indirgeme elemanları

b) B'deki " " ?

c) Sistem dejeneremidir? Hangi ?

a) $\vec{P_1} = -5\vec{i}$

$\vec{P_2} = 5\vec{i}$

$\vec{P_3} = |\vec{P_3}| \cdot \vec{e}_{0G} = 5 \cdot \left(\frac{6j - 6k}{6\sqrt{2}}\right)$

$\vec{P_4} = |\vec{P_4}| \cdot \vec{e}_{FA} = 5\left(\frac{-6j + 6k}{6\sqrt{2}}\right)$

	x	y	z	X	Y	Z	L M_{ox}	m M_{oy}	N M_{oz}
P_1	6	0	6	-5	0	0	0	-30	0
P_2	6	6	0	5	0	0	0	0	-30
P_3	0	0	6	0	$5/\sqrt{2}$	$-5/\sqrt{2}$	$-30/\sqrt{2}$	0	0
P_4	6	6	0	0	$-5/\sqrt{2}$	$5/\sqrt{2}$	$30/\sqrt{2}$	$-30/\sqrt{2}$	$-30/\sqrt{2}$
Σ				0	0	0			

$\vec{OR} = \Sigma x_i + \Sigma y_i + \Sigma z_i$ $\quad \vec{M_o}(s) = -\left(30 + \frac{30}{\sqrt{2}}\right)\vec{j} - \left(30 + \frac{30}{\sqrt{2}}\right)\vec{k}$

$\vec{OR} = 0$ $\quad \vec{M_o}(s) \neq 0$

b) $\vec{BR} = \vec{OR} = 0$

$\vec{M_B}(s) = \vec{M_o}(s) + \vec{M_B}(\vec{OR})$ $\quad \vec{BO} \wedge \vec{OR}$

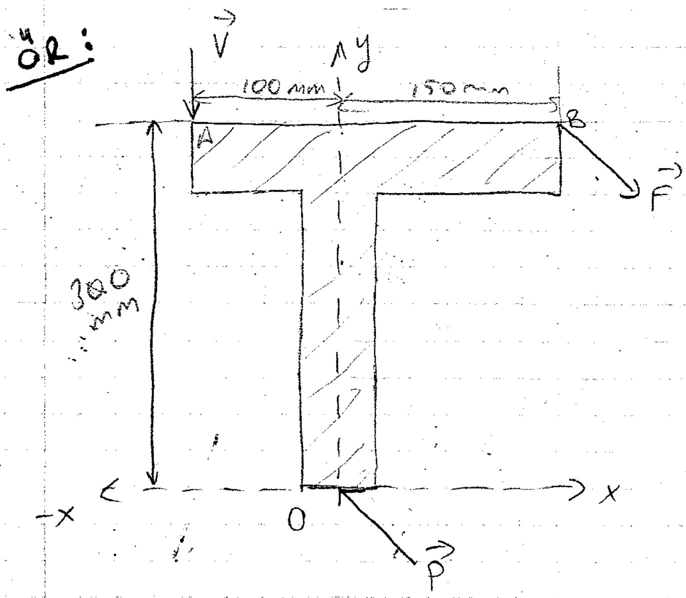
0

$\boxed{\vec{M_B}(s) = \vec{M_o}(s) = }$ (*)

c) $\vec{OR} \cdot \vec{M_o}(s) = 0 \implies$ sistem dejenereden

$\vec{OR} = 0, \; \vec{M_o}(s) \neq 0$ kuple esdeper u.s.

ÖR:



$\vec{V} = -480\vec{j}$

$\vec{F} = 100\vec{i} - 120\vec{j}$

$\vec{P} = -100\vec{i} + 600\vec{j}$

Şekildeki cisim V, F, P kuvvetler altında iken O'daki indirgeme elemanlarını bulunuz. Sistem dejenere midir?

	x	y	X	Y	N (m_{oz})
$\vec{V}$	-100	300	0	-480	48.000
$\vec{F}$	150	300	100	-120	-18.000 -30.000
$\vec{P}$	0	0	-100	600	0
Σ			0	0	0

$\vec{OR} = 0$ $\qquad M_0(s) = 0$

$\vec{OR} \cdot \vec{M_0}(s) = 0$

sistem dejenere

sıfıra eşdeğer vek. sis.

İnvariant

Sistemin noktadan noktaya değişmeyen özelliğidir.

1. $\vec{OR} \Rightarrow$ Geometrik toplam

2. $\vec{OR} \cdot \vec{m_0}(s) = 0 \Rightarrow$ Dejenerelik şartı

İspat

$$\vec{m_Q}(s) = \vec{QO} \wedge \vec{OR} + \vec{m_0}(s) \quad \text{(Varignon teo.)}$$

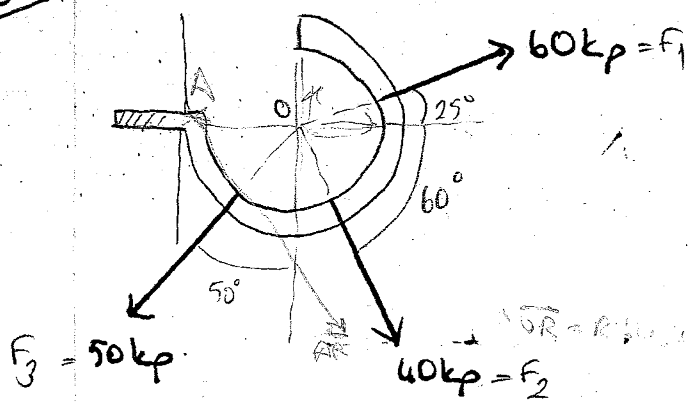
$$\vec{OR}\,\vec{m_Q}(s) = \underbrace{\vec{OR}\,(\vec{QO} \wedge \vec{OR})}_{0} + \vec{OR}\,\vec{M_0}(s)$$

$$\boxed{\vec{OR}\,\vec{m_Q}(s) = \vec{OR}\,\vec{m_0}(s)} \quad \text{dejenerelik şartı}$$

3. $\vec{m_Q}(s) \dfrac{\cdot \vec{QR}}{|\vec{QR}|} = \vec{m_0}(s) \dfrac{\vec{OR}}{|\vec{OR}|}$

ÖR:

Kocada F_1, F_2, F_3 kuvvetleri mevcuttur. Bu kuvvet sisteminin orijindeki indirgeme elemanlarını belirleyiniz? Sistem niye esdeğerdir?



$\vec{F_1} = F_1 \cos 25 \vec{i} + F_1 \sin 25 \vec{j}$

$\vec{F_1} = 54{,}37 \vec{i} + 25{,}35 \vec{j}$

$\vec{F_2} = F_2 \cos 60 \vec{i} + F_2 \sin 60 \vec{j}$

$\vec{F_2} = 20 \vec{i} + 34{,}64 \vec{j}$

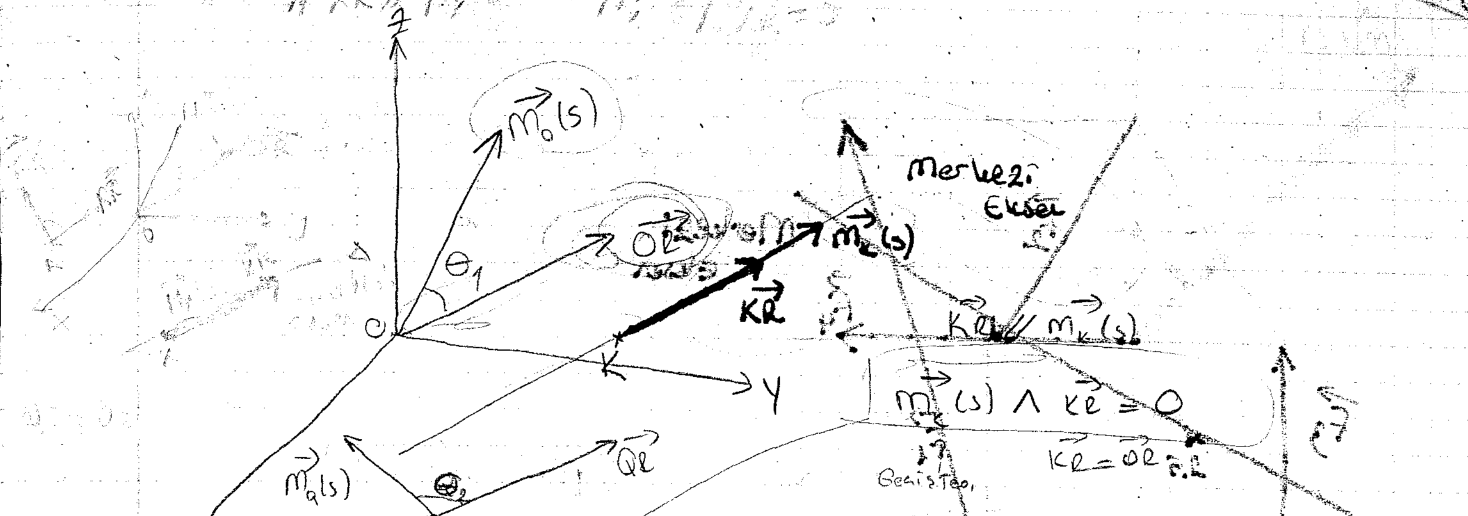
$\vec{F_3} = -F_3 \sin 50 \vec{i} - F_3 \cos 50 \vec{j}$

$\vec{F_3} = -38{,}3 \vec{i} - 32{,}13 \vec{j}$

$\vec{OR} = F_1 + F_2 + F_3 = \boxed{36.07 \vec{i} - 41.42 \vec{j}}$

$\vec{M_0}(s) = 0$ } sistem dejenere.
$\vec{OR} \neq 0$ } Bileşkeye esdeğer vektör sistemidir.

Merkezi Eksen (vida ekseni)



$$\vec{m}_k(s) \wedge \vec{KR} = 0$$

$$\vec{KR} = \vec{OR}$$

$$\vec{m}_k(s) = \vec{m}_0(s) + \vec{KO} \wedge \vec{OR} \qquad \text{Geçiş Teo.}$$

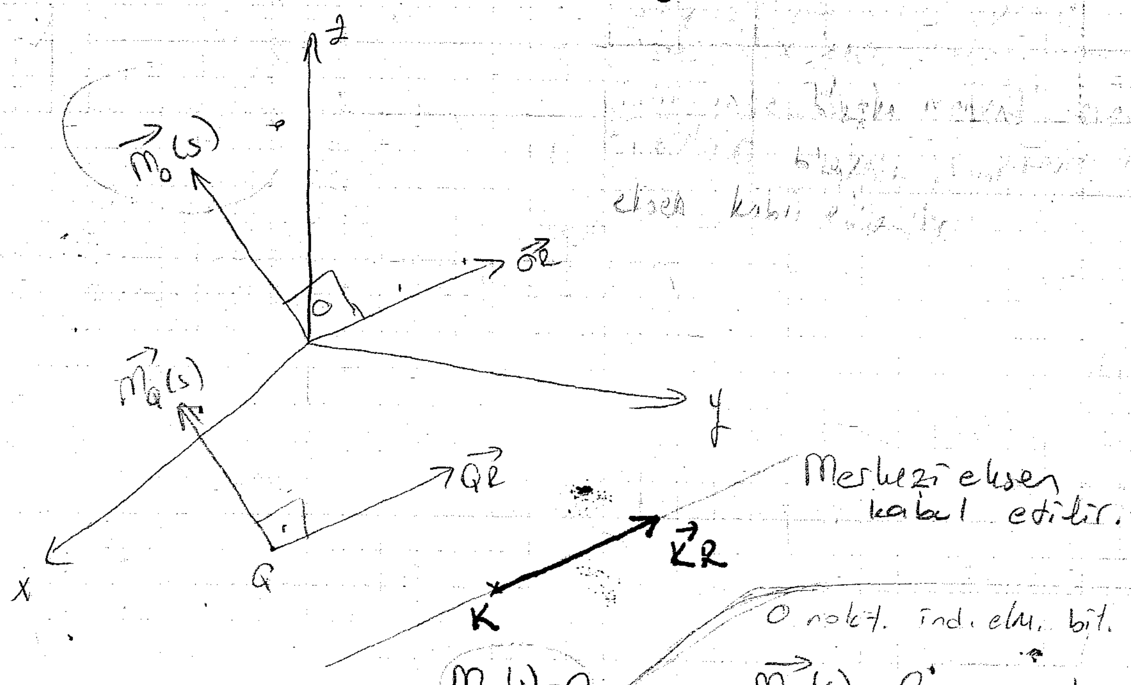
$$\vec{m}_k(s) = (\ )\vec{i} + (\ )\vec{j} + (\ )\vec{k}$$

$$\vec{m}_k(s) \wedge \vec{KR} = 0$$

$$\underbrace{(\ )}_{0}\vec{i} + \underbrace{(\ )}_{0}\vec{j} + \underbrace{(\ )}_{0}\vec{k} = 0$$

ÖZEL DURUM:

Kuvvet sisteminin bileşkeye eşdeğer



$\vec{m}_k(s) = 0$

O nokt. ind. elm. bil. ise

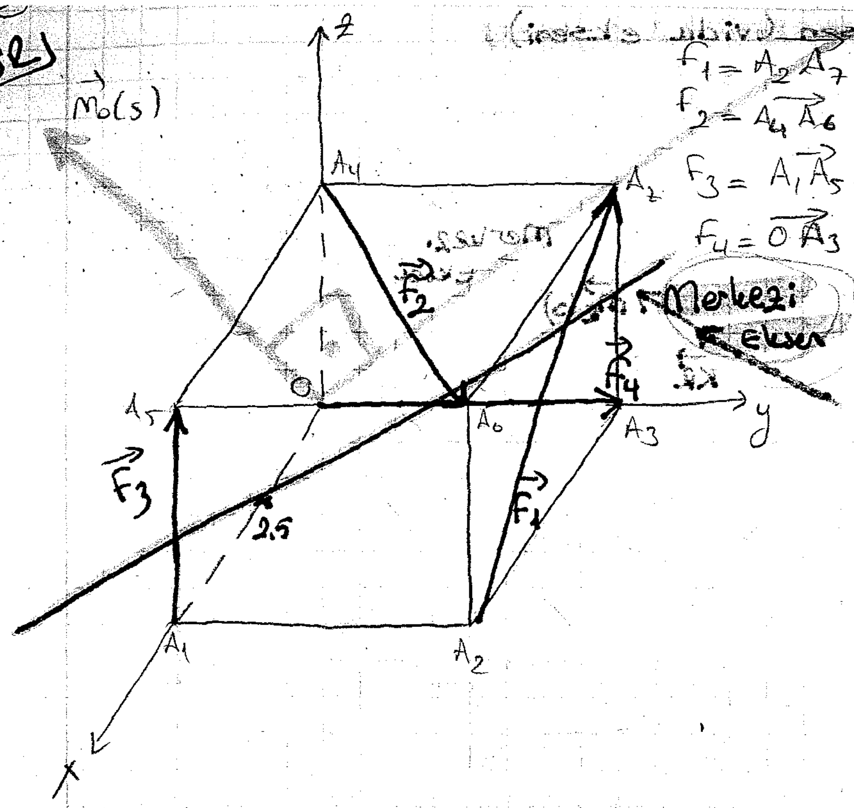
$\vec{m}_k(s) = 0$ olunda

$$\vec{m}_k(s) = \vec{m}_0(s) + \vec{KO} \wedge \vec{OR} \quad (\text{geçiş teo})$$

veya

$$\vec{m}_0(s) = \vec{OK} \wedge \vec{KR} \quad (\text{varignon teo})$$

Örn



$\vec{R} = 10\vec{j} + 10\vec{k}$

5x5x5 ola bir kübün kenarları ve köşegenleri üzerinde şekilde gösterilen gibi vektörler var. Bu kuvv. sist. O'da indirgeyelim, sistem invariantlarını bul. Dejenerelik şartını incele. Eğer bir bileşkeye eşdeğer ise tesir doğrusunu (merkezi eks.) belirle

	x	y	z	X	Y	Z	L	M	N
$\vec{F_1}$	5	5	5	-5	0	5	25	-25	25
$\vec{F_2}$	0	0	5	5	5	0	-25	25	0
$\vec{F_3}$	5	0	0	0	0	5	0	-25	0
$\vec{F_4}$	0	0	0	0	5	0	0	0	0
Σ				0	10	10	0	-25	25

$$\vec{OR} = 10\vec{j} + 10\vec{k} \qquad \vec{M}_0(s) = -25\vec{j} + 25\vec{k}$$

1) $\vec{OR}$

$|\vec{OR}| = 10\sqrt{2}$

2) $\vec{OR} \cdot \vec{M}_0(s) = (10j + 10k)(-25j + 25k) = 0$ sistem dejeneredir.

3) $\vec{M}_0(s) \cdot e_{OR} = 0$

$OR \perp \vec{M}_0(s)$ bileşkeye eşd. vek. sist.

$K(\overset{?}{x}, \overset{?}{y}, \overset{?}{z})$ Bileşke K'da

$\vec{M}_K(s) = 0$

$\vec{M}_K(s) = \vec{M}_0(s) + \vec{KO} \wedge \vec{OR}$

$\vec{M}_K(s) = (-25j + 25k) + [(-xi - yj - zk) \wedge (10j + 10k)] = 0$

$$\underbrace{(-10y+10z)}_{0}\vec{i} + \underbrace{(10x-25)}_{0}\vec{j} + \underbrace{(25-10x)}_{0}\vec{k} = 0$$

$x = 2.5$

$y = z$

veya

Varignon Teo.

$$\vec{M}_0(s) = \vec{OL} \wedge \vec{R}$$

$$(-25\vec{j}+25\vec{k}) = (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) \wedge (10\vec{j}+10\vec{k})$$

$$-25\vec{j}+25\vec{k} = 10y\,\vec{i} + 10x\,\vec{k} - 10z\,\vec{i} - 10x\,\vec{j}$$

$10y - 10z = 0$

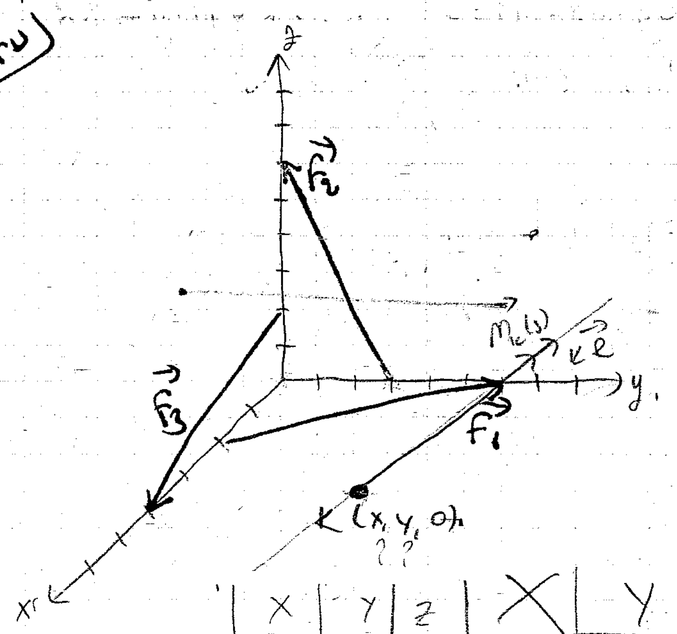
$-10x = -25$

$10x = 25$

$x = 2.5$

$y = z$

Soru)



Vektörlerin oluşturduğu sistemi orijindeki indirgeme elemanları ve merkezi ekseninin xoy düzlemini kestiği K noktasını bulunuz.

$\vec{F_1} = -2\vec{i} + 6\vec{j}$

$\vec{F_2} = -3\vec{j} + 6\vec{k}$

$\vec{F_3} = 4\vec{i} - 2\vec{k}$

	x	y	z	X	Y	Z	L	M	N
F_1	2	0	0	-2	6	0	0	0	12
F_2	0	3	0	0	-3	6	18	0	0
F_3	0	0	2	4	0	-2	0	8	0
Σ				2	3	4	18	8	12

$$\vec{OR} = 2i + 3j + 4k \qquad \vec{M_0}(s) = 18i + 8j + 12k$$

$$(\vec{OE})(\vec{M_0}(s)) = (2i+3j+4k)(18i+8j+12k) = 36+24+48=108$$

degenere değil.

$$\vec{m_K}(s) = \vec{m_0}(s) + \vec{KO}\wedge\vec{OE}$$

$$\vec{m_K}(s) = (18i+8j+12k) + (-xi-yj-zk)\wedge(2i+3j+4k)$$

$$\vec{m_K}(s) = 18i+8j+12k-4yi-3xk+2yk+4x\vec{j}$$

$$\vec{m_K}(s) = (18-4y)i+(8+4x)j+(12-3x+2y)k$$

$$\vec{KE}\parallel\vec{m_K}(s)$$

$$\vec{m_K}(s)\wedge\vec{KE}=0$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ (18-4y) & (8+4x) & (12-3x+2y) \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{(32+16x-36+9x-6y)}_{0}i + \underbrace{(24-6x+4y-72+16y)}_{0}j + \underbrace{(54-12y-16-8x)}_{0}k = 0$$

$25x-6y-4=0$

$25x-6y=4$

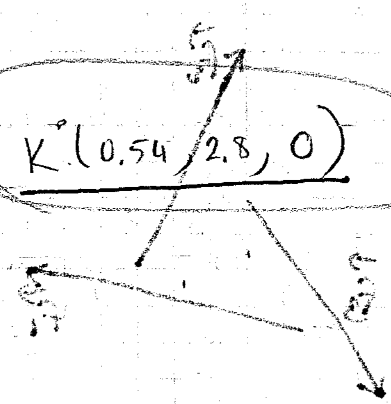
$20y-6x-48=0$

$20y-6x=48$

$8x+12y=38$

$$\left.\begin{array}{l} 25x-6y=4 \\ -6x+20y=48 \\ 8x+12y=38 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y\cong 2.8 \\ x\cong 0.54 \end{array}$$

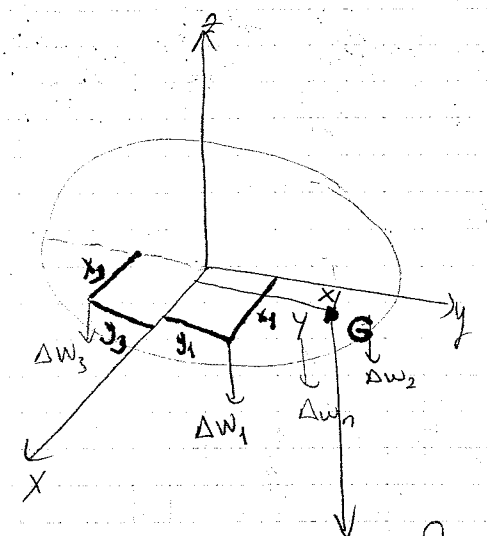
$K(0.54,\ 2.8,\ 0)$

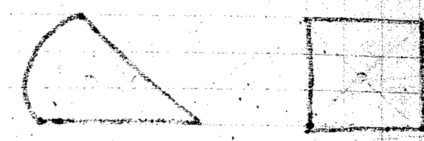


$42x=46$

Paralel Kuvvetler

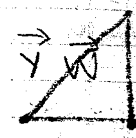
AĞIRLIK MERKEZİ





$$M_o x_1 = \vec{y_1} \Delta \vec{w_1}$$

$$M_{ox}(s) = \sum_{i=1}^{n} \vec{y_i} \Delta \vec{w_i} = \vec{Y} \vec{W}$$



$$M_{oy}(s) = \sum_{i=1}^{n} \vec{x_i} \Delta \vec{w_i} = \vec{X} \vec{W}$$

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^{n} \Delta \vec{w_i} \text{ : Bileşke}$$

Sonlu sayıda

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{x_i} \Delta \vec{w_i}}{\sum_{i=1}^{n} \Delta \vec{w_i}}$$

Y, Z

Sonsuz sayıda

$$X = \frac{\int x \, dw}{\int dw}$$

Y, Z

Kütlesel

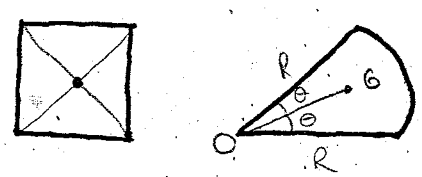
$$X = \frac{\int x \, dm}{\int dm}$$

Y, Z

$$W = \rho A t = \rho V$$

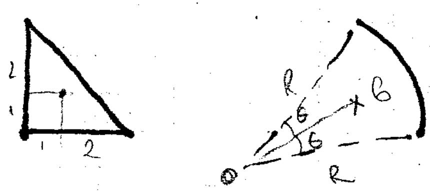
yoğunluk, Alan, kalınlık, hacim

Bir cismin parçalarının ağırlıkları cismin her noktasına uygulanmış sonsuz sayıdadır. Buna yayılı kuvvet denir. Birbirine paralel parça sayısı kadar kuvvet vardır. Bütün bu küçük kuvvetlerin yerine bunlara eşdeğer tek bir bileşke kuvveti konulabilir. Ağırlık merkezi bileşkenin uygulama noktasıdır.



daire dilimi

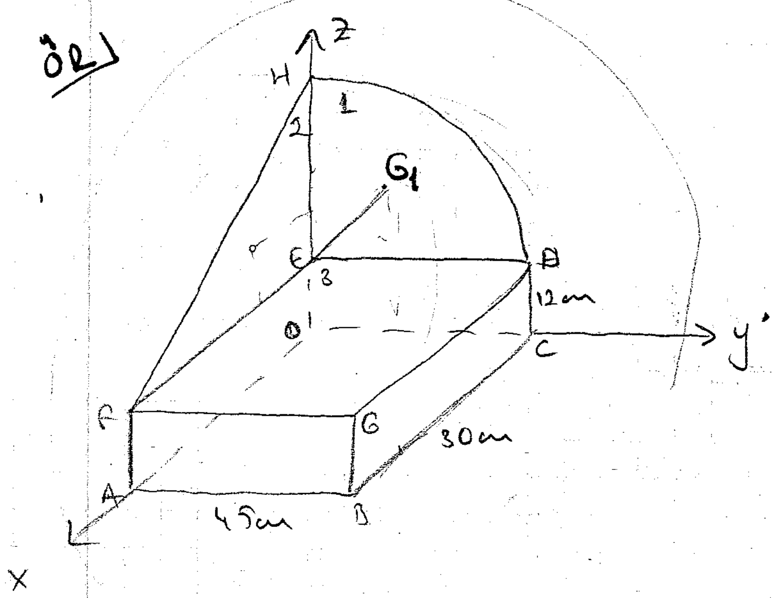
$$|\overrightarrow{OG}| = \frac{2}{3} R \frac{\sin\theta}{\theta}$$ (θ → radyan)



Çember yayı

$$|\overrightarrow{OG}| = R \frac{\sin\theta}{\theta}$$

ÖR)



120 N ağırlıklı dik prizma şeklinde içi dolu homojen cisim ile 30 N ağırlıklı dik üçgen şeklindeki levha EF kenarından, 50 N ağırlıklı 1/4 daire parçası şeklinde levha ED ve EH kenarlarından birbirlerine kaynaklanmışlardır. Aynı malzemeden yapıldıklarına göre oluşan cismin Ağırlık Merk. koor?

	x_i	y_i	z_i	w_i	$w_i x_i$	$w_i y_i$	$w_i z_i$
1	0	19	31	50	0	950	1550
2	10	0	27	30	300	0	810
3	15	22.5	6	120	1800	2700	720
Σ				200	2100	3650	3080

$$EG_1 = \frac{2}{3} \cdot 45 \frac{\sin 45}{\pi/4}$$

$$EG_1 = \frac{8 \cdot 45}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = 12 + EG_1 \cos 45 = 31$$

$$X_G = \xi = \frac{\Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i} = \frac{2100}{200} = 10.5\text{cm}$$

$$y_G = \eta = \frac{\Sigma w_i y_i}{\Sigma w_i} = \frac{3650}{200} = 18.25\text{cm}$$

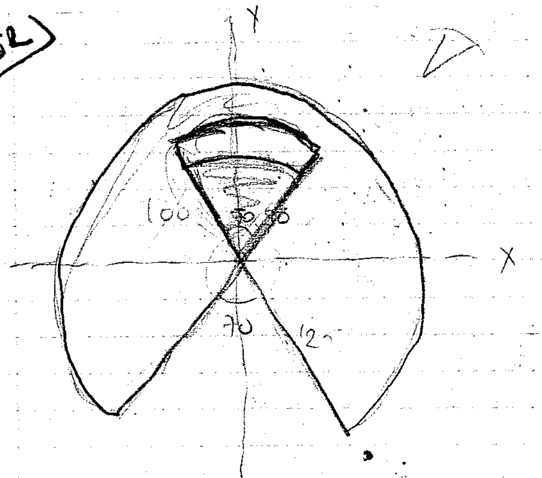
$$z_G = \zeta = \frac{\Sigma w_i z_i}{\Sigma w_i} = \frac{3080}{200} = 15.4\text{cm}$$

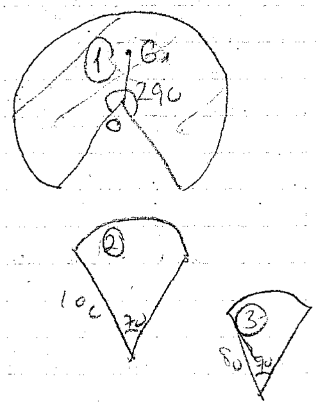
Ör)

A.M = ?

22 Nisan SALI
Saat 8:30

2. Vize
20 Mayıs Salı
Saat 8:30





	y_i	m_i	$m_i y_i$
1	18.88	39542,6	746841
2	62.59	-6108,6	-382337,2
3	50	3909.53	195777,5
Σ		37343.53	560281.33

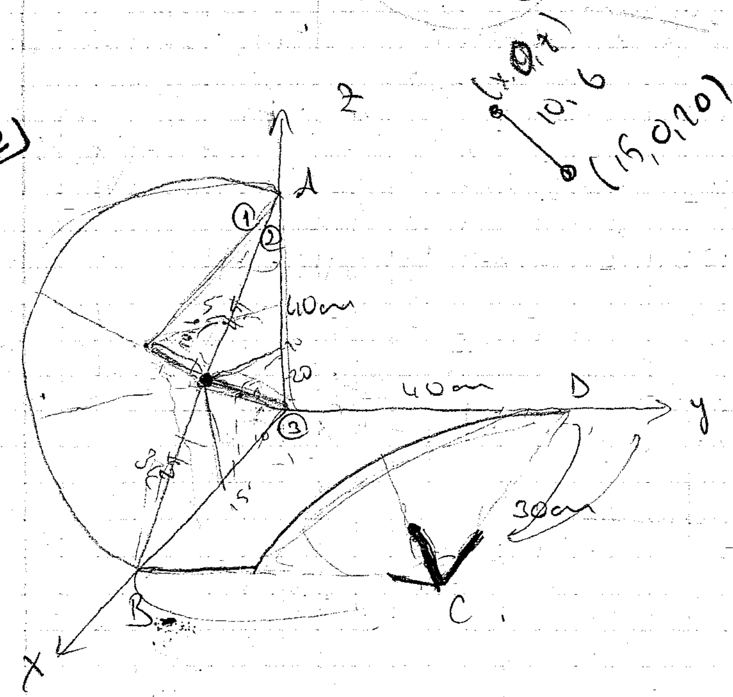
$$|OG_1| = \frac{2}{3}\,125\,\frac{\sin 145}{\frac{29\pi}{36}} = 18,88$$

$$|OG_2| = \frac{2}{3}\,100\,\frac{\sin 35}{\frac{7\pi}{36}} = 62.59$$

$$|OG_3| = \frac{2}{3}\,80\,\frac{\sin 35}{\frac{7\pi}{36}} = 50$$

$$y_G = \eta = \frac{560281.33}{37343.53} = 15\text{ mm}$$

Ör)



Şekildeki taralı alan gibi kesilip bükülmüş şeklin A.M koordinat bul

① $\frac{2}{3} r \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{100}{3\pi}$

④ $\frac{2}{3}\,30\,\frac{\sin 45}{\pi/4} = \frac{80}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{40\sqrt{2}}{\pi}$

$\frac{2}{3} \cdot 30 \cdot \frac{\sin 45 \cdot 4}{\pi} = \frac{40\sqrt{2}}{\pi}$

$\frac{\pi r^2}{2}$

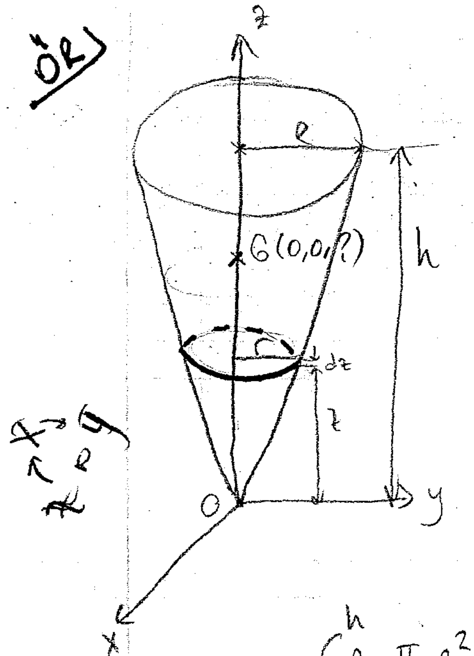
$\frac{40}{\pi}$

$\frac{2}{3} r \frac{\sin\theta}{\theta}$

$\frac{2}{3}\,25\,\frac{\sin\theta}{\theta}$

	x_i	y_i	z_i	m_i	$m_i x_i$	$m_i y_i$	$m_i z_i$
1	23,48	0	26,36	981.25	23091	0	25878
2	10	0	40/3	600	6000	0	8000
3	15	20	0	1200	18000	24000	0
4	17,2	27,2	0	706,5	12146,6	19216,8	0
Σ							

ÖR) R yarıçaplı, h yükseklikli içi dolu bir koninin A.M. integralle hesaplayınız.



$$\bar{z} = \frac{\int z\,dm}{\int dm}, \quad \bar{z} = \frac{\int z\,dV}{\int dV}$$

dV (Elemanter parça) daire

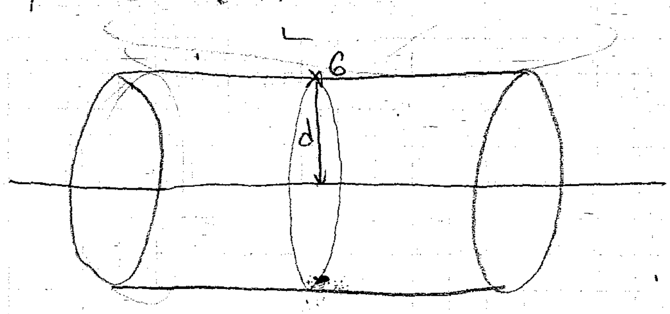
$$dV = \pi r^2 dz \qquad \frac{r}{R} = \frac{z}{h}$$

$$\boxed{dV = \pi \frac{z^2 R^2}{h^2} dz} \qquad \boxed{r = \frac{zR}{h}}$$

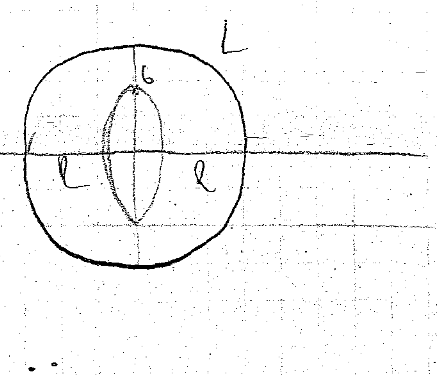
$$= \frac{\int_0^h z \cdot \pi \frac{z^2 R^2}{h^2} dz}{\int_0^h \pi \frac{z^2 R^2}{h^2} dz} = \frac{\cancel{\frac{\pi R^2}{h^2}} \left| \frac{z^4}{4} \right|_0^h}{\cancel{\frac{\pi R^2}{h^2}} \left| \frac{z^3}{3} \right|_0^h} = \frac{h^4}{4} \cdot \frac{3}{h^3} = 3h/4$$

Pappus - Guldin Teoremleri

1) Düzlemsel bir eğrinin kendi düzlemi içinde bulunan ve kendini kesmeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin alanı, eğri uzunluğu ile eğri sentroidinin bu dönmede çizdiği yörüngenin (çember (yayı)) uzunluğu ile çarpımına eşittir.



$$Alan = L \times 2\pi d$$



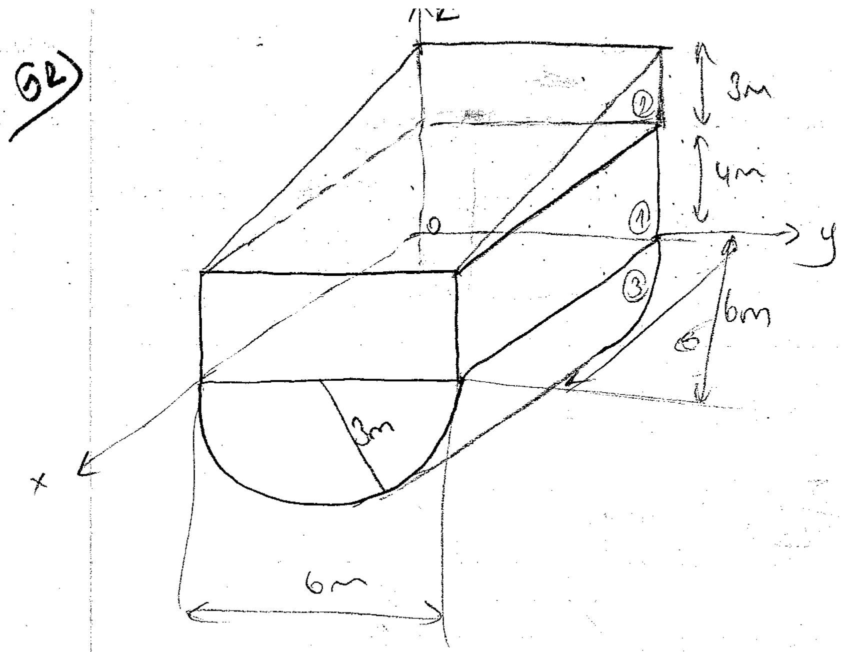
$$OG = R\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{2R}{\pi} \quad (\sin\tfrac{\pi}{2},\ \theta = \tfrac{\pi}{2})$$

$$= L \cdot 2\pi |OG|$$

$$Alan = \pi R \cdot 2\pi \cdot \frac{2R}{\pi} = 4\pi R^2$$

G2)

A.M. koordinatlı



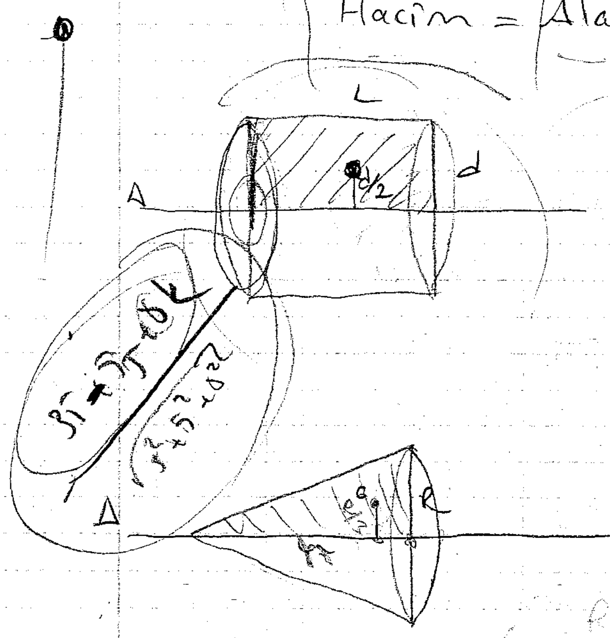
	x	y	z	M_i	$M_i x_i$	$M_i y_i$	$M_i z_i$
1	3	3	2	144	432	432	288
2	2	3	5	54	108	162	270
3	3	3	-1.27	84.8	254.46	254.46	-107.72
Σ				282.8	794.46	848.46	450.28

$G_x = 2.8$
$G_y = 3$
$G_z = 1.59$

$G(2.8;\ 3;\ 1.59)$

2) Düzlemsel bir yüzey parçasının kendi düzlemi içinde bulunan ve kendini kesmeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi, yüzey parçasının alanı ile yüzey parçası A.M.'nin bu dönmede çizdiği yörüngenin uzunluğu çarpımına eşittir.

Hacim = Alan × yörünge çevresi (A.M.)



$$\text{Hacim} = (L \cdot d) \times 2\pi \frac{d}{2}$$

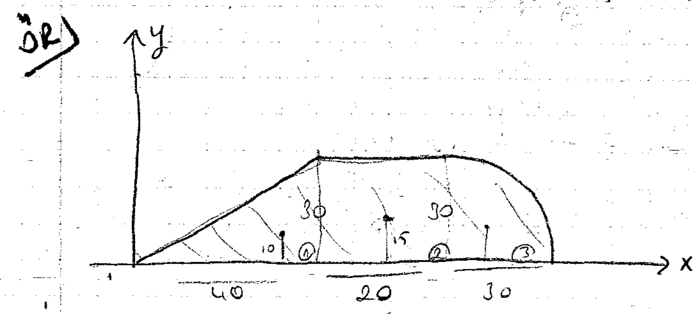
$$= \pi d^2 L$$

$V = \Sigma A \cdot 2\pi$

$$\text{Hacim} = \frac{hR}{2} \cdot 2\pi \frac{R}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Ör)



Şekilde görülen kesitin ox etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayınız. oy etraf. 360° et. hacmi?

	x	y	A_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	26.6	10	600	16000	6000
2	50	15	600	30000	9000
3	72.7	12.7	706.5	51411.5	9000
Σ			1906.5	97411.5	$24 \cdot 10^3$

$\xi = 51.09$

$\eta = 12.58$

$V_x = 1906.5 \times 2\pi \cdot 12.58 = 150694.4$

$V_y = 1906.5 \times 2\pi \cdot 51.09 = 612001.6$

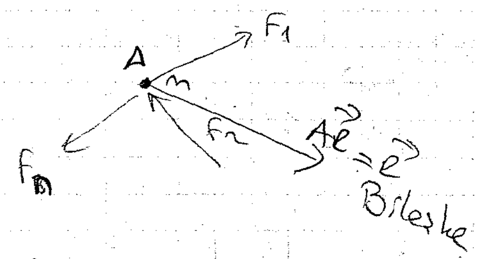
STATİĞİN TEMEL PRENSİBİ

Sıfıra eşdeğer kuvvet sist; $\vec{R} = 0$ $\vec{M_0}(s) = 0$

Herhangi bir kuvvet sisteminin etkisi altında bulunan bir maddesel nokta veya katı cismin dengede kalabilmesi için gerek ve yeter şart kuvvet sist. sıfıra eşdeğer olmasıdır. Bu durumda her denge problemi bir kuvvet problemidir.

Bir maddesel Noktanın Dengesi

Birçok durumlarda bir cismin boyutları ihmal edilip kütlesi ihmal edilmiyorsa bu cisim kütleli bir geo. nokta olarak düşünülür. Bu sonsuz küçük kütle madde parçasına maddesel nokta denir.



$$A\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \neq 0$$

moment yok

$$\vec{M_A}(s) = 0$$

$$R = \Sigma F = ma$$

$$R = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$\neq 0$ dengede değil

$= 0$ dengede

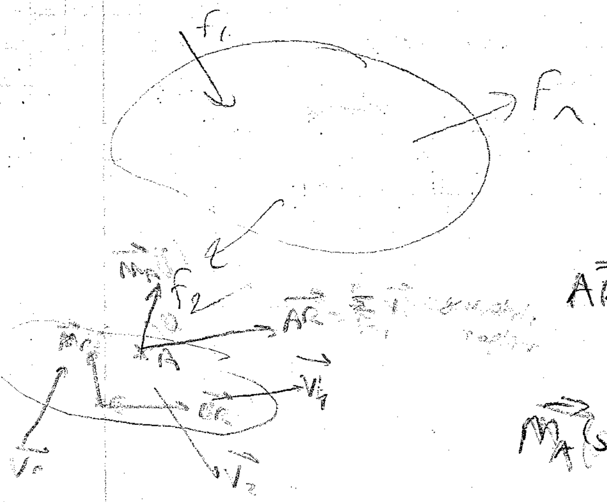
$\vec{R} = \Sigma F_x \vec{i} + \Sigma F_y \vec{j} + \Sigma F_z \vec{k}$

Vektör poligonu kapalı ise $\vec{R} = 0$ ve maddesel nokta dengededir.

Newton'un I. Hareket Kanunu

Maddesel noktaya etkiyen bileşke kuvvet sıfırsa, Maddesel nokta hareket etmez, (hareketli ise aynı hareketine devam eder.) Bileşke momentten söz edilemez. Eğer bir maddesel noktaya etkiyen bileşke kuvvet 0 değilse maddesel nokta bu bileşke kuvvetin şiddetiyle orantılı ve bileşke kuvvetin doğrultu ve yönünde bir ivme kazanır.

Rijit Katı Cismin Dengesi



$$\sum_{i=1}^{n} F_i = A\vec{R} = 0$$

$$\vec{M}_A(s) = 0$$

sıfıra eşdeğer kuvvet sis. rijit cisim dengede

$$A\vec{R} = \underbrace{\sum F_x}_{0} \vec{i} + \underbrace{\sum F_y}_{0} \vec{j} + \underbrace{\sum F_z}_{0} \vec{k} = 0$$

$$\vec{M}_A(s) = \sum M_{ax} \vec{i} + \sum M_{ay} \vec{j} + \sum M_{az} \vec{k} = 0$$

6 denklem, 6 bilinmeyen (en genel hal)

Kuvvet: Bir cismin diğer cisme uyguladığı çekme (itme) etkisidir. Cisimlerden birinin uyguladığı kuvvet etki, ötekinin cismin bu kuvvete karşı gösterdiği direnç ise tepkidir. Newton'un 3. hareket kanununa göre etki tepkiye eşit modülde ve zıt yöndedir.

Aktif Kuvvetler:

Ağırlık kuvvetleri gibi dış kuvvetlerdir.

Reaktif Kuvvetler:

Mesnetle veya bağları ortadan kaldırıp onların yerine alınan tepki kuvvetleridir.

Dış kuvvet: A cismine yabancı B cisminin yaptığı etki

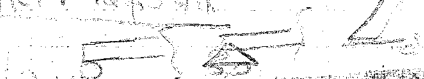
İç kuvvet: A cisminin bir parçasının diğer bir parçasına etkidiği kuvvettir.

• rijit cisme etkiyen dış kuvvetler sıfıra eşdeğer [illegible] olduruyorsa [illegible] dengede [illegible] elemanlarını sıfıra eşitlerse [illegible] rijit cismin [illegible] yeter [illegible] edecektir.

Bağlar: Genelde her türlü harekete tamamıyla serbest olmayan cisimlerin denge şartlarını incelemek zorunda kalırız. Cisimlerin herhangi bir doğrultuda hareketini önleyen engele bağ denir. Mesnet noktalarında oluşan etkilere eşit ve zıt yönlü tepkiler v... Bunlara bağ kuvvetleri denir.

Mafsal; bir bağlantı elemanıdır. Özelliklerine göre bazı hareket serbestliği sağlar. Mafsallı bir çubu... mafsala bir kuvvet uygular. Bu kuvvet mafsal tepkisi... dengelenir.

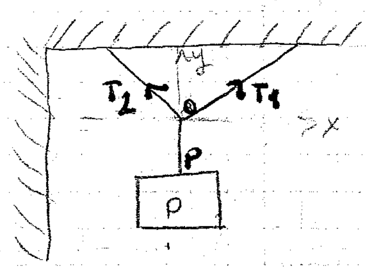
Kayıcı Mafsal



I. Düzlemde Kuvvet Sisteminin Dengesi

(Düzlem Statik)

1. Düzlemsel ve tesir arzipleri bir noktada kesişen kuvvetler sisteminin dengesi:

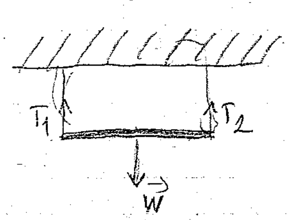


$$\vec{OR} = \underbrace{\sum X_i \vec{i}}_{0} + \underbrace{\sum Y_j \vec{j}}_{0} = \vec{0}$$

$$\vec{m}_0(s) = 0$$

2 denklem, 2 bilinmeyen

2. Düzlemsel ve paralel kuvvetlerin oluşturduğu kuvvet sisteminin dengesi:



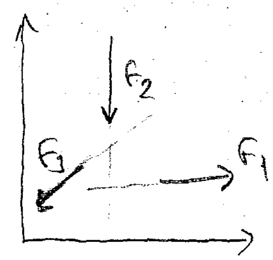
$$\vec{OR} = \underbrace{\sum Y_j \vec{j}}_{0} = 0$$

$$\vec{m}_0(s) = \underbrace{\sum m_{0z} \vec{k}}_{0} = 0$$

2 denklem
2 bilinmeyen

W

3. Düzlemde, fakat tesir çizgileri bir noktada kesişmeyen veya paralel olmayan kuvvet sistemlerinin dengesi:



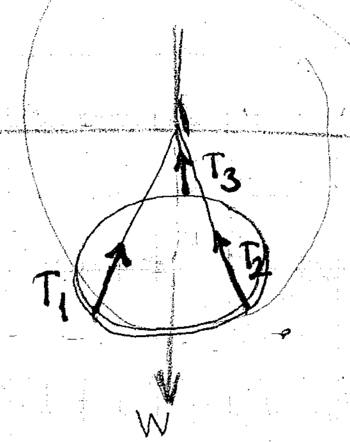
$$\vec{OR} = \underbrace{\sum X_i \vec{i}}_{0} + \underbrace{\sum Y_j \vec{j}}_{0} = 0$$

$$\vec{M_O}(s) = \underbrace{\sum M_{Oz}}_{0} \vec{k} = 0$$

3 denklem
3 bilinmeyen

II. Uzayda Kuvvet Sistemlerinin Dengesi
(Uzay Statik)

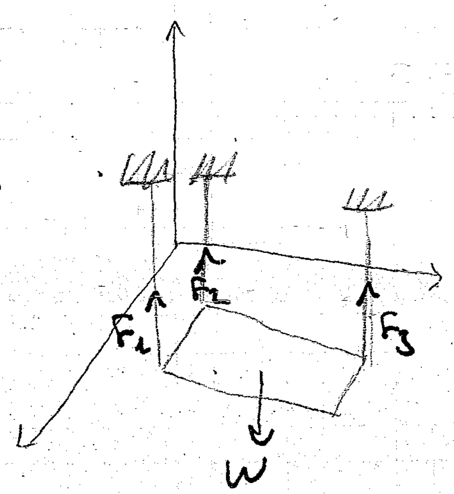
1. Aynı düzlemde olmayan fakat tesir çizgileri bir noktada kesişen kuvvet sistemlerinin dengesi!



$$\vec{OR} = \underbrace{\sum X_i \vec{i}}_{0} + \underbrace{\sum Y_j \vec{j}}_{0} + \underbrace{\sum Z \vec{k}}_{0} = 0$$

3 denklem
3 bilinmeyen

2. Aynı düzlemde olmayan fakat tesir çizgileri paralel kuvvet sistemi dengesi!

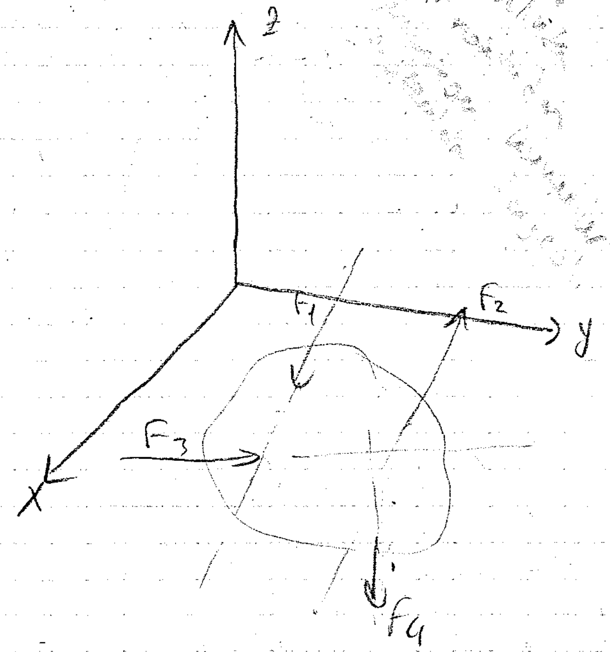


$$\vec{OR} = \underbrace{\sum Z}_{0} \vec{k} = 0$$

$$\vec{M_O}(s) = \underbrace{\sum M_{Ox}}_{0} \vec{i} + \underbrace{\sum M_{Oy}}_{0} \vec{j} = 0$$

3 denklem
3 bilinmeyen

3. Düzlemsel olmayan en genel haldeki kuvvetlerin dengesi:



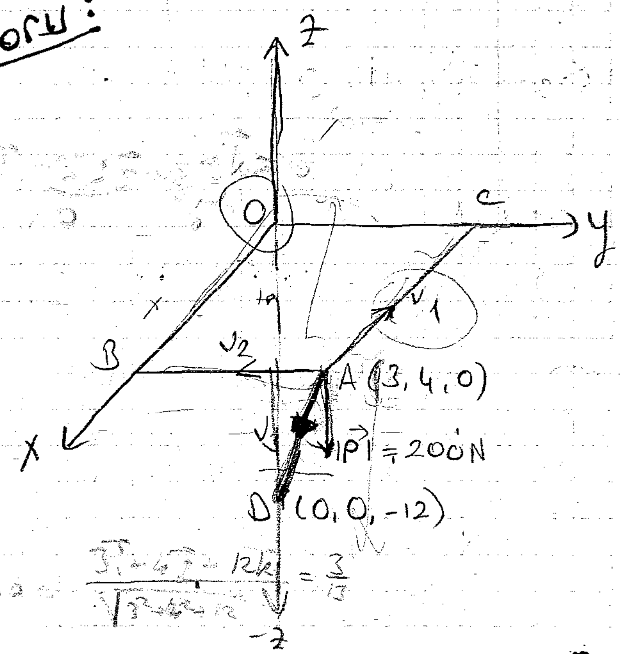
$$\vec{R} = \underbrace{\Sigma X}_{0}\vec{i} + \underbrace{\Sigma Y}_{0}\vec{j} + \underbrace{\Sigma Z}_{0}\vec{k} = 0$$

$$\vec{M}_O(s) = \underbrace{\Sigma M_{Ox}}_{0}\vec{i} + \underbrace{\Sigma M_{Oy}}_{0}\vec{j} + \underbrace{\Sigma M_{Oz}}_{0}\vec{k} = 0$$

6 denklem

6 bilinmeyen

Soru:



Verilen vektör sist. O'a eşdeğer olabilmesi için v_1, v_2 ve v_3'lerin modüllerini bulun.

$\{v_1, v_2, v_3, P\} = 0$

$\vec{v_1} = -v_1\vec{i} = -v_1\vec{i}$

$\vec{v_2} = -v_2\vec{j} = -v_2\vec{j}$

$\vec{P} = -200\vec{k}$

$\vec{V_3} = |V_3| \, \vec{e}_{DA} = V_3 \frac{3}{13}\vec{i} + V_3\frac{4}{13}\vec{j} + V_3\frac{12}{13}\vec{k}$

$\vec{V_3} = |V_3| \cdot \vec{e}_{DA} =$

$e_{DA} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}} = \frac{3}{13}$

	X	Y	Z
V_1	$-V_1$	0	0
V_2	0	$-V_2$	0
V_3	$\frac{3}{13}V_3$	$\frac{4}{13}V_3$	$\frac{12}{13}V_3$
P	0	0	-200
Σ	0	0	0

$\frac{3}{13}v_3 - v_1 = 0$

$\frac{4}{13}v_3 - v_2 = 0$

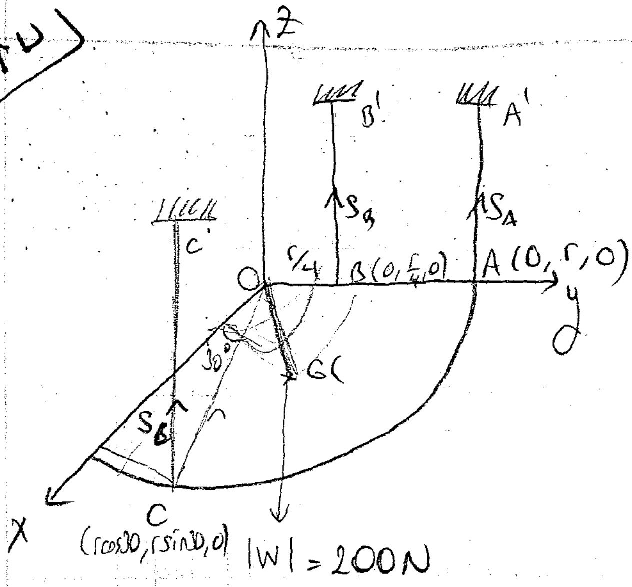
$\frac{12}{13}v_3 - 200 = 0$

$V_3 = 216.6$ N

$V_2 = 66.6$ N

$V_1 = 50$ N

Soru)



200 N ağırlıklı 1/4 daire parçası şeklindeki levha üç düşey çubukla asılı olup yatay konumda dengededir. Çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.

$\{\vec{S_A}, \vec{S_B}, \vec{S_C}, \vec{\omega}\} = 0$
? ? ?

$|W| = 200N$

$|OG| = \frac{2}{3} r \frac{\sin 45}{\pi/4} = 0.6r$

$G(0{,}42r, 0{,}42r, 0)$

Soru 8

	x	y	z	X	Y	Z	m_{Ox}	m_{Oy}	m_{Oz}
$\vec{S_C}$	$\frac{r\sqrt{3}}{2}$	$r/2$	0	0	0	S_C	$S_C \frac{r}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} r S_C$	0
$\vec{S_B}$	0	$r/4$	0	0	0	S_B	$S_B \frac{r}{4}$	0	0
$\vec{S_A}$	0	r	0	0	0	S_A	$S_A r$	0	0
ω	0.42r	0.42r	0	0	0	-200	-84r	84r	0
Σ	///	///	///	0	0	0	0	0	0

$S_C + S_B + S_A = 200$

$\frac{S_C \cancel{r}}{2} + \frac{S_B \cancel{r}}{4} + S_A \cancel{r} = 84\cancel{r}$

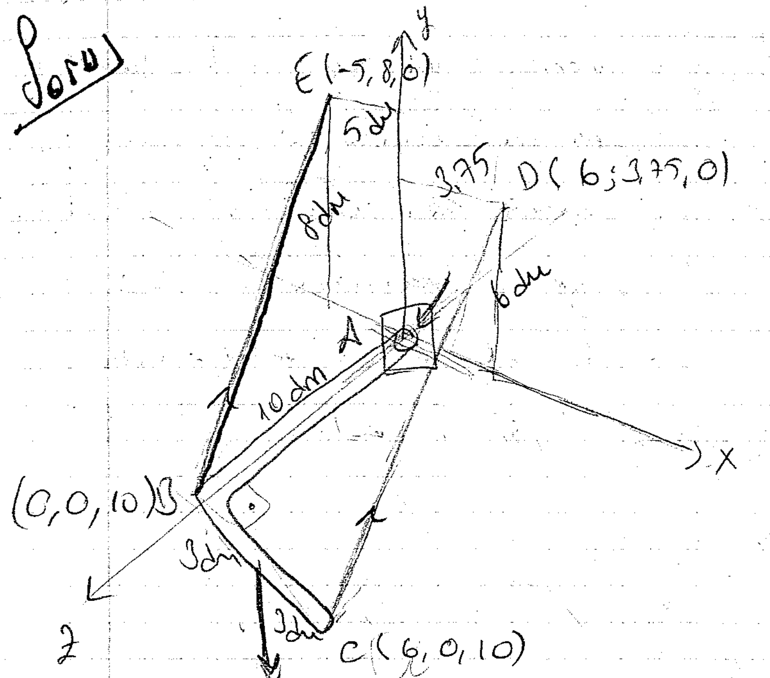
$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cancel{r} S_C = -84\cancel{r}$

$S_C = 97\ N$

$S_B = 90N$

$S_A = 13\ N$

Soru)



$|W| = 49\,N$

A BC ağırlıksız çubuğu xoy düzlemine A'da küresel mafsalla desteklenmiş. DE ve CE kablolarıyla bağlanmıştır. A'daki mafsal tepkisini ve kablolardaki kuvvetleri bulunuz.

$\{\vec{S}_{BE}, \vec{S}_{CD}, \vec{W}, \vec{R}_A\} = 0$

S_{BE} ? S_{CD} ? X_A ? Y_A ? Z_A ?

5 bilinmeyen
En genel hal.

$$\vec{S}_{BE} = S_{BE} \cdot e_{BE} = S_{BE}\left(\frac{-5}{\sqrt{189}}\vec{i} + \frac{8}{\sqrt{189}}\vec{j} - \frac{10}{\sqrt{189}}\vec{k}\right)$$

$$\vec{S}_{CD} = S_{CD} \cdot e_{CD} = S_{CD}\left(\frac{-2.25}{11.87}\vec{i} + \frac{6}{11.87}\vec{j} - \frac{10}{11.87}\vec{k}\right)$$

	x	y	z	X	Y	Z	M_{ox}	M_{oy}	M_{oz}
W	3	0	10	0	-49	0	490	0	-147
S_{BE}	0	0	10	-0.3635 BE	0.5825 BE	-0.7275 BE	-5.85 BE	-3.65 BE	0
S_{CD}	6	0	10	-0.1895 CD	0.55 CD	-0.845 CD	-5.055 CD	3.155 CD	3.0325 CD
R_A	0	0	0	X_A	Y_A	Z_A	0	0	0
Σ	///	///	///	0	0	0	0	0	0

Evde ödev.

$3.0328\,CD - 147 = 0$

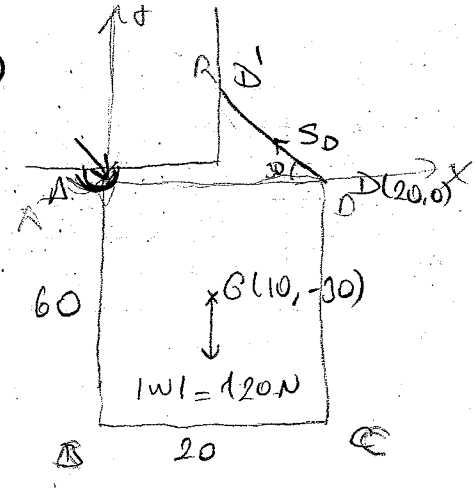
$3.3z + 5.07y + 1.89y$

$S_{CD} = 48.48\,N$
$S_{BE} = 42.42\,N$

$X_A = 24.52$
$Y_A = 0.07$
$Z_A = 71.56$
$R_A = 77.6$

kontrol et

Soru)



Homojen yapılı dikdörtgen ABCD levhası A köşesinden mafsallıdır. D köşesinden D' çubuğuyla desteklenmiş ve AD kenarı dengede kalmıştır. DD' çubuğundaki eksenel kuvvetini A'daki mafsal tepkisini bulunuz.

$$\{R_A,\ S_D,\ W\} = 0$$

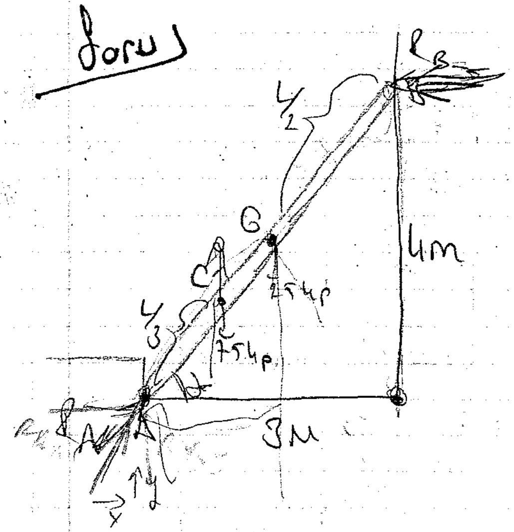
$R_A \to X_A\ ?,\ Y_A\ ?$; $S_D\ ?$

	x	y	X	Y	M_{O_z}
W	10	-30	0	-120	-1200
S_D	20	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2} S_{DD'}$	$\frac{1}{2} S_{DD'}$	$10\ S_{DD'}$
R_A	0	0	X_A	Y_A	0
Σ			0	0	0

$S_{DD'} = 120N$

$X_A = 60\sqrt{3}N$, $Y_A = 60N$ $\Big\}$ $R_A \cong 120N$

Soru)



Ağırlığı 75 kp olan bir adam şekilde gösterildiği gibi 25 kp ağırlıklı bir merdivenin 1/3'üne çıkmıştır. B'deki tepkiyi ve A'daki kaymayı önleyen eşikteki tepkiyi hesaplayınız.

$(W_1, W_2, R_B, R_A) = 0$

? ? ?

$$\Sigma X = 0 \rightarrow X_A - R_B = 0 \rightarrow X_A = R_B$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow Y_A - 75 - 25 = 0 \rightarrow Y_A = 100\,kp$$

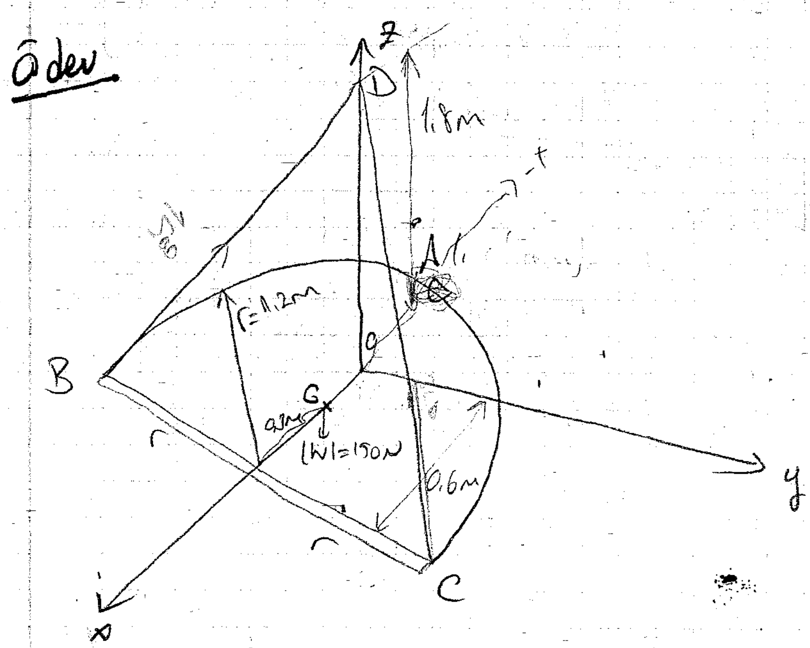
$$\Sigma M = 0 \rightarrow -75 \cdot \frac{L}{3}\cos\alpha - 25\frac{L}{2}\cos\alpha + R_B 4 = 0$$

$$-75\frac{4}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} - 25\frac{\cancel{L}}{2}\frac{3}{\cancel{L}} + R_B 4 = 0$$

$$-75 - \frac{75}{2} + R_B \cdot 4 = 0$$

$R_B = 28{,}125\,kp$
$X_A = 28{,}125\,kp$
$Y_A = 100\,kp$
$R_A = 103{,}88\,k$

Ödev



BD ve CD kablolarıyla A küresel mafsalıyla mesnetlenmiş olan yarım daire şeklindeki levhanın 150N ağırlığı şekilde gösterilen yerde etki etmektedir. Bu durumda levhadaki bağ tepkilerini ve mafsaldaki tepkiyi bul?

$\{\vec{S}_{BD}, \vec{S}_{CD}, \vec{W}, \vec{R}_A\}$

? ? X_A Y_A Z_A

? ? ?

5 bilinmeyen

En genel hal

$$\vec{S}_{BD} = S_{BD} \cdot e_{BD} = S_{BD}\left(-\frac{0.6}{\sqrt{5.04}}i + \frac{1.2}{\sqrt{5.04}}j + \frac{1.8}{\sqrt{5.04}}k\right)$$

$$\vec{S}_{CD} = S_{CD} \cdot e_{CD} = S_{CD}\left(-\frac{0.6}{\sqrt{5.04}}i - \frac{1.2}{\sqrt{5.04}}j + \frac{1.8}{\sqrt{5.04}}k\right)$$

Çözüm Hatalı!

	x	y	z	X	Y	Z	M_{ox}	M_{oy}	M_{oz}
ω	0.3	0	0	0	0	-150	0	45	0
S_{BD}	0.6	-1.2	0	-0.267 BD	0.534 BD	0.801 BD	-0.9612 BD	-0.4806 BD	-0
S_{CD}	0.6	1.2	0	-0.267 CD	-0.534 CD	0.801 CD	0.9612 CD	-0.4806 CD	0
R_A	-0.6	0	0	X_A	Y_A	Z_A	0	$0.6 Z_A$	$-0.6 Y_A$
Σ				0	0	0	0	0	0

$0.9612 BD = 0.9612 CD$

$BD = CD$

$-0.6 Y_A = 0$

$Y_A = 0$

$Z_A = 75$

$1.602\, BD + Z_A = 150$

$0.6 Z_A = 45$

$Z_A = 75$

$$\boxed{CD = BD = \frac{75}{1.602} = 46.816\,N}$$

$X_A = 0.534\, BD$

$X_A = 24.999$

$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$

$= \sqrt{5625 + 624.95}$

$$\boxed{R_A = 79.056\,N}$$

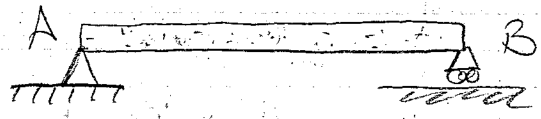
wb

$S_{BD} = 20.3N$

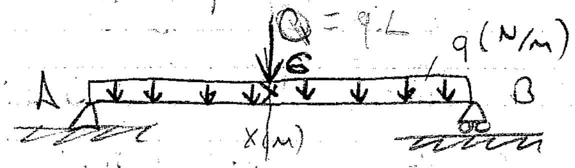
$S_{CD} = 20.3N$

$R_A = 53.7$ $\{$ R_{Ax} 38N, $R_{Ay} = 0$, $R_{Az} = 38N$

Düzlemsel Paralel Yayılı Kuvvet



Q = Toplam yayılı yük

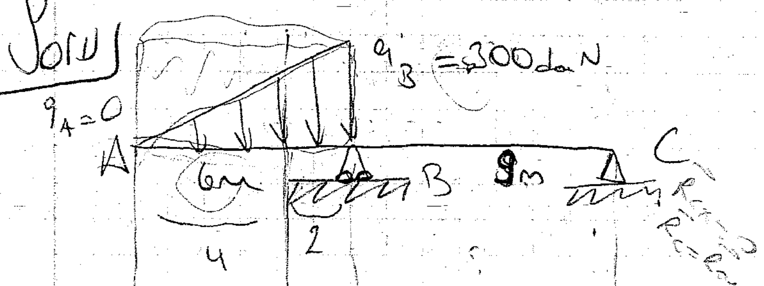


yük diyagramı

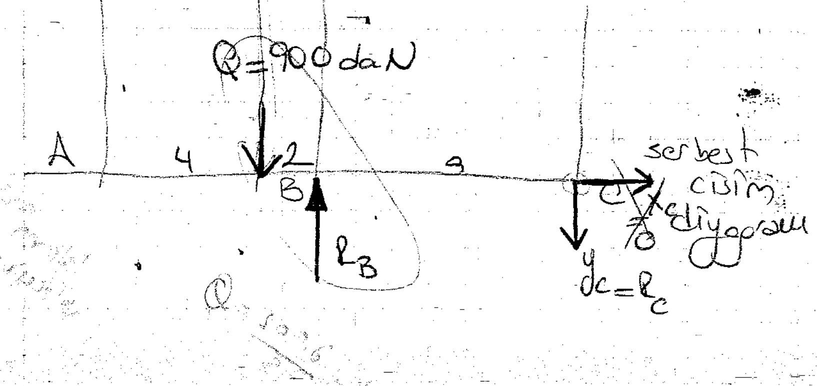
(Baraj duvarının yüzeyine gelen su basıncı) kum yığını ağırlığı gibi bir cismin yüzeyinin her maddesel noktalarına uygulanmış ağırlıklar yayılı kuvvetlerle hesaplanır ve daima yük diyagramıyla temsil edilirler. Yük diyagramıyla yayılı yükün kesit yüzey alanının ölçüsü Bileşkenin cebirsel ölçüsünü verir. Ve bileşke aynı sınırlı yüzeyin G ağırlık merkezinin ~~doğrultusunda~~ doğrultusundan geçer.

$$Q = \int_a^b q\,dx$$

Soru



Şekilde gösterildiği gibi yüklenen AC kirişinin B ve C desteklerindeki tepkileri hesaplayınız (kirişin kendi ağırlığı ihmal ediliyor)



$Q = 300 \cdot \frac{6}{2} = 900$ daN

$\Sigma Y = 0$ denge denk.

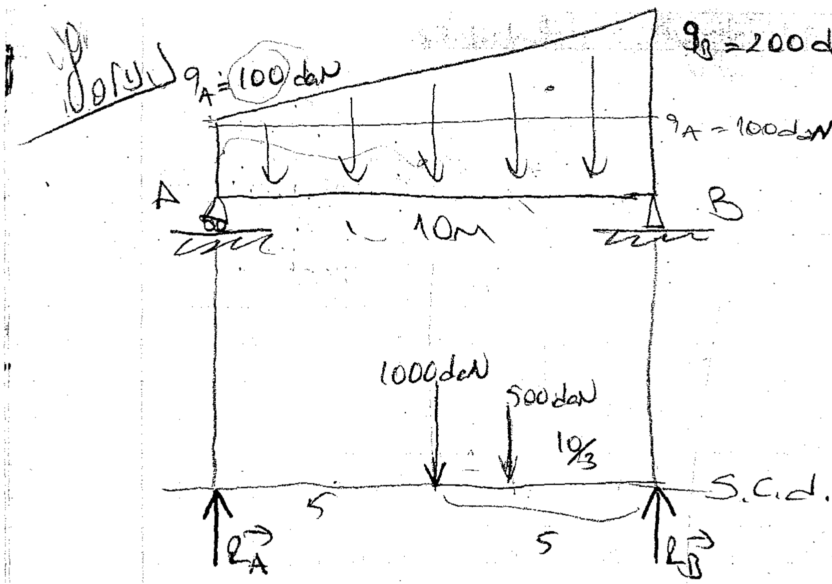
$R_B - R_C = 900$

$\Sigma M_B = 0 \quad Q \cdot 2 = R_C \cdot 9$

$R_C = 200$

$R_B = 1100$

Soru)



Şekildeki AB kirişinin A ve B mesnetlerindeki tepkileri hesaplayınız?

$Q_1 = 100 \cdot 10 = 1000$ daN

$Q_2 = \frac{10}{2} \cdot 100 = 500$ daN

$\Sigma Y = 0$

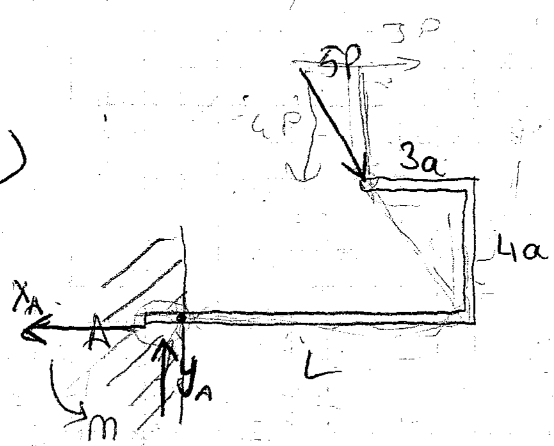
$R_A + R_B = 1500$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 1000 \cdot 5 + 500 \cdot \frac{20}{3} = R_B \cdot 10$

$R_B = 833.3$ daN

$R_A = 666.7$ daN

Soru)



Şekildeki sistemin A ankastre mesnetindeki tepkileri bulunuz.
(kirişin ağırlığı ihmal ediliyor)

$\{ R_A, 5P \} = 0$

$X_A \; Y_A \; m$ — ? ? ? — 3 bilinmeyen
düzlem statiği

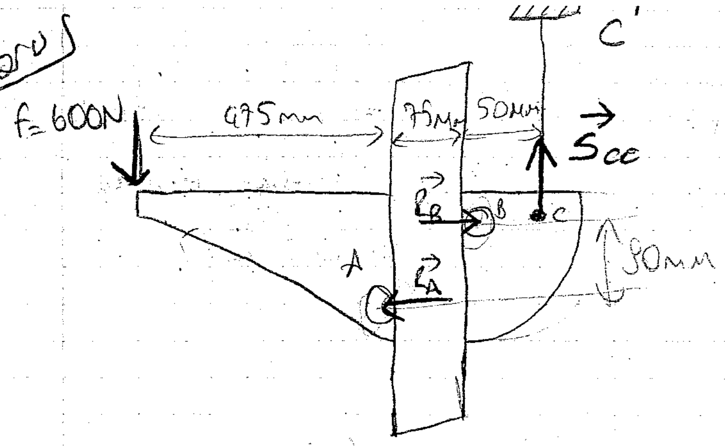
$\Sigma X = 0 \Rightarrow X_A = 3P$

$\Sigma Y = 0 \Rightarrow Y_A = 4P$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow m - 3P\,4a - 4P(L-3a) = 0$

$m = 4PL$

Soru



Hareketli bir kol, C'ye bağlanmış bir kablo ve A ve B'deki sürtünmesiz tekerlekler yardımıyla dengede duruyor. Şekildeki yüklere hali için A ve B'deki tepki kuvv. ile C'deki kablo kuvvetini bulunuz.

$$\left\{ \underset{?}{\vec{S}_{cc'}},\ \underset{?}{\vec{R}_A},\ \underset{?}{\vec{R}_B},\ \vec{F} \right\} = 0$$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow R_B - R_A = 0$$

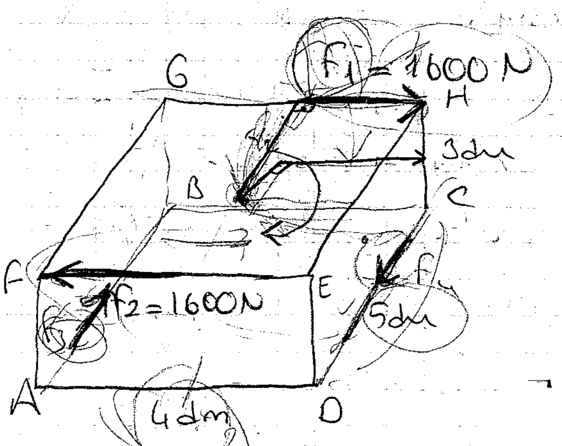
$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow \vec{S}_{cc'} - 600 = 0$$

$$\underline{\vec{S}_{cc'} = 600N}$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow R_A \cdot 90 = 600 \cdot 600$$

$$\underline{R_A = R_B = 4000\,N}$$

Soru



Şekilde verilen kuvvetlerin yerine buna eşdeğer ve AB, CD doğrularında etki eden yeni bir kuvvet çifti oluşturunuz.

$$F_3 = F_4 = 2000$$

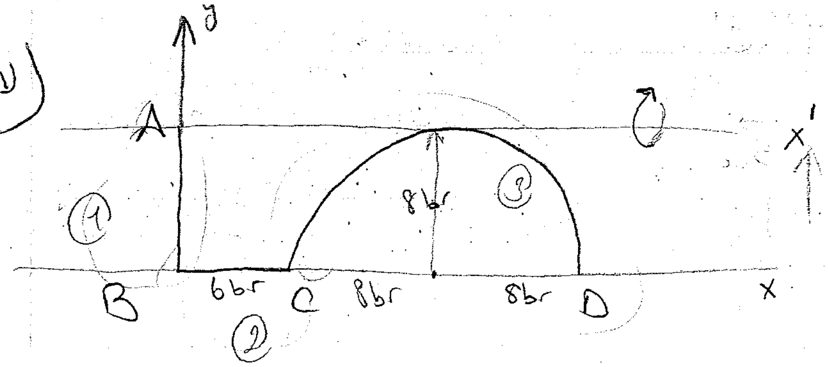
$$3200 \cdot \frac{5}{2} = 8000\,N$$

$$\cancel{x} \cdot 1600 \cdot \frac{5}{\cancel{2}} = 8000$$

$$2x \cdot 2 = 8000$$

$$x = 2000$$

Soru)



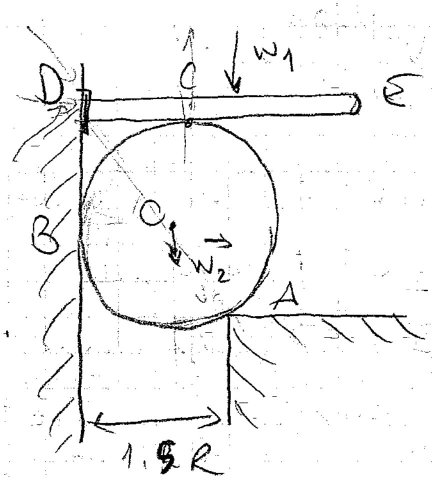
Şekildeki ABCD telinin x' ekseni etrafında 180° döndürülmesiyle oluşacak yüzeyin alanını hesaplayınız.

	x	y	L	Lx	Ly
AB	0	4	8	0	32
BC	3	0	6	18	0
CD	14	5.09	25.1	351.8	127.92
Σ			39.1	369.8	159.92

$$|OG_y| = \frac{R \sin 90}{\pi/2} = 5.09$$

$$X_G = \xi = 9.45 \quad Y_G = \eta = 4.09$$

Elemanlara Ayırma

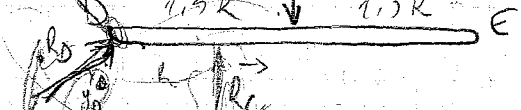


W_2 ağırlıklı bir küre, A köşesiyle ve B noktasıyla düşey duvara dayalıdır. B-küreyi, B ucundan mafsallı W_1 ağırlıklı DE çubuğa dayanmaktadır. $W_1 = W_2 = 200$ N olduğuna göre A ve B'deki tepkileri bulunuz.

DE = 3R

$W_1 = W_2 = 200N$

Çubuk için s.c.d.



$X_D = 0$

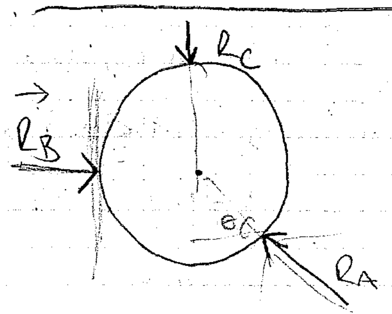
$\sum Y_D = 0 \rightarrow Y_D + R_C - W_1 = 0$

$\sum M_D = 0 \rightarrow R_C \cdot R - W_1 \frac{3R}{2} = 0$

$R_C = 300$

$Y_D = -100$

küre için s.c.d.



$\Sigma x = 0$

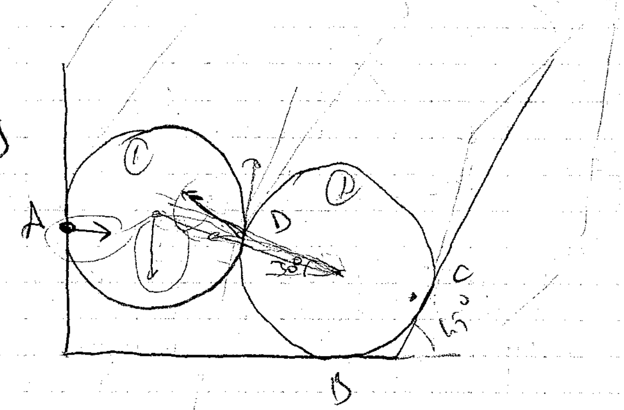
$R_B - R_A \cos\theta = 0$

$\Sigma y = 0$

$-R_C - W_2 + R_A \sin\theta = 0$

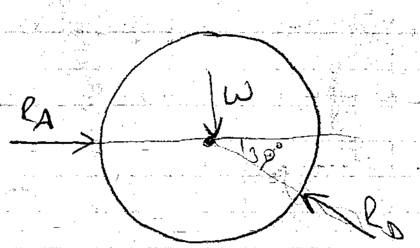
$R_A = 1000\,N$

Soru



Her biri W ağırlığında
iki çelik bor
iki kanal arasına kon
sürt. ihmal edilerek d
olması durumunda A, B, C, D'de
tepki kuvvetler bul

1. Boru için s.c.d.



$\Sigma x = 0$

$R_A - R_D \cos 30 = 0$

$R_A = R_D \frac{\sqrt{3}}{2}$

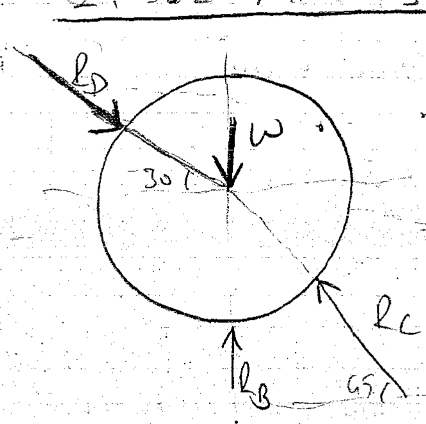
$\Sigma y = 0$

$R_D \sin 30 = W$

$R_D = 2W$

$R_A = \sqrt{3}\,W$

2. Boru için s.c.d.



$\Sigma x = 0$

$R_D \cos 30 - R_C \cos 45 = 0$

$R_D \frac{\sqrt{3}}{2} = R_C \frac{\sqrt{2}}{2}$

$R_C = \sqrt{6}\,W$

$\Sigma y = 0$

$-R_D \sin 30 - W + R_B + R_C \cos 45 = 0$

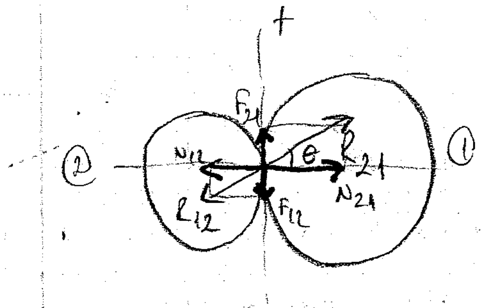
$R_B + R_C \frac{\sqrt{2}}{2} = R_D \frac{1}{2} + W$

$R_B = 0{,}26\,W$

SÜRTÜNME

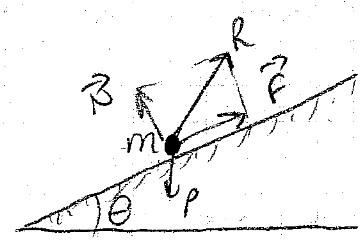
İki yüzey birbiriyle temasta ise biri ötekine göre hareket etmek isteyince sürtünme kuvv. denilen teğetsel kuvvetler her zaman ortaya çıkar, Sürtünme gaz ve katı (aerodinamik sürt.) sıvı-katı (sıvı sürt.) iç enerji transferlerinde organ içinde iç sürt. oluşabilir,

Kuru Sürtünme (Coulomb sürtünmesi)



F_{21} = sürt. kuvveti

N_{21} = Tepki kuvveti



$R = -P$

$N = R\cos\theta \quad F = R\sin\theta$

$\frac{F}{N} = \tan\theta$

$\theta \le \varphi_0$

$\boxed{\mu_0 = \tan\varphi_0}$

$\frac{F}{N} \le \mu_0$

$|F| \le \mu_0 N$

$\boxed{\varphi_0 \le \frac{\pi}{2}}$ Tutunma sürtünmesinin sınır açısı

Eleman boyunca uygulanan çeşitli yükleri taşıyabilecek şekilde projelenmiş yapı elemanlarına kiriş denir.

kirişler

statikçe belirli kirişler (denge denk. yeterli)

statikçe belirsiz kirişler (denge denk. + deformasyon)

~~mesnetteki momente burulma momenti~~

X : Normal kesme kuvveti ✓

Y : Kesme kuvveti

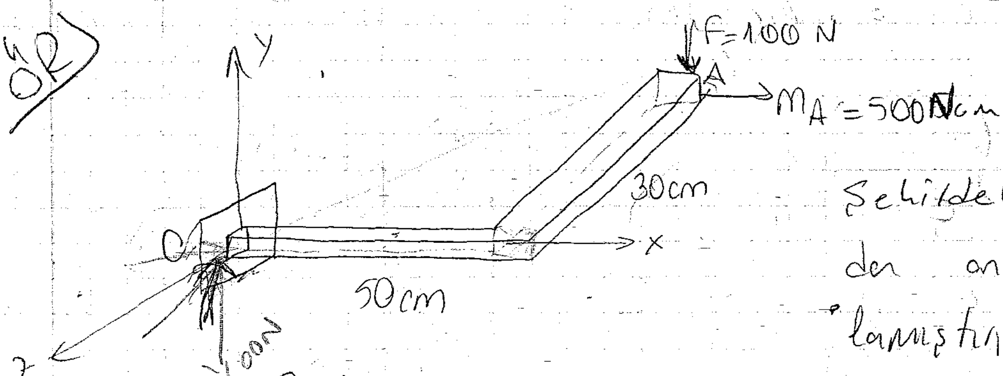
M_{ox} = Burulma Momenti

M_{oy} – M_{oz} = Eğilme Momenti

$M_{oy}^2 + M_{oz}^2$

$-2x + 4$

ÖR)



Şekildeki cisim O noktasından ankastre mesnetle bağlanmıştır. Cismin A noktasına F kuvvetiyle M_A momenti etki ettiğine göre O'daki mesnet tepkisini ve bu noktadan geçen ex'e dik düzlemdeki zorlanmaları hesaplayınız.

$$\text{denge}\begin{cases}\vec{OR} = 0\\ m_0(S) = 0\end{cases}$$

$\vec{R_0} + \vec{F} = 0$, $\vec{R_0} = -\vec{F} = 100\vec{j}$ (mafsaldaki tepki)

$\vec{M_0} + \vec{M_A} + \vec{OA} \wedge \vec{F} = m_0(S) = 0$

$\vec{M_0} + 500\vec{i} + (50\vec{i} - 30\vec{k}) \wedge (-100\vec{j}) = 0$

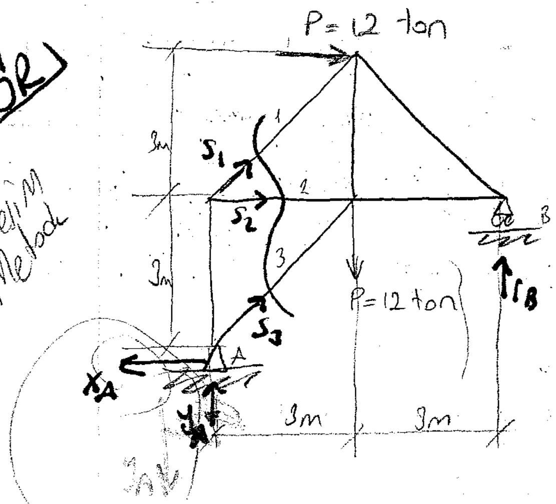
$\vec{M_0} = 2500\vec{i} + 5000\vec{k}$ (mafsalda olsa mom. tepkisi)

$+3000\vec{j} + 500\vec{i}$

Normal kuvvet : 0
Kesme kuvveti : 100 N
Burulma mom = 2500 Ncm
Eğilme mom = 5000 Ncm

ÖR)

Kesim Metodu



S_1, S_2, S_3 çubuk kuvvetlerini bulunuz

$\Sigma x = 0 \rightarrow P - x_A = 0$

$P = x_A = 12$ ton

$\Sigma y = 0 \rightarrow y_A + r_B - P = 0$

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -P3 - P6 + r_B 6 = 0$

$r_B = y_B = 18$ ton

$x_A = 12$ ton , $y_A = 6$ ton

$\Sigma x = 0$

$S_1 \cos 45 + S_2 + S_3 \cos 45 - x_A = 0$

$\Sigma y = 0$

$S_1 \sin 45 + S_3 \sin 45 - y_A = 0$

$\Sigma M_I = 0 \rightarrow -S_3 1{,}5\sqrt{2} + x_A 3 = 0$

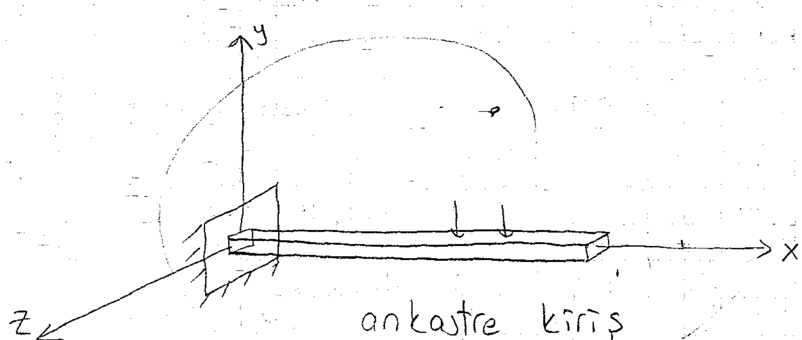
$S_1 = -6\sqrt{2}$ ton

$S_2 = 6$ ton

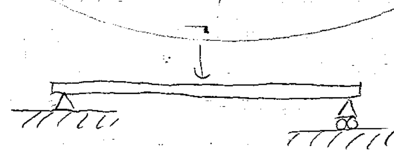
$S_3 = 12\sqrt{2}$ ton

Kirişler

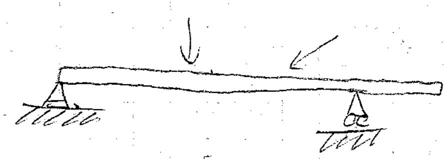
Kesme Kuvveti Eğilme Momenti



ankastre kiriş



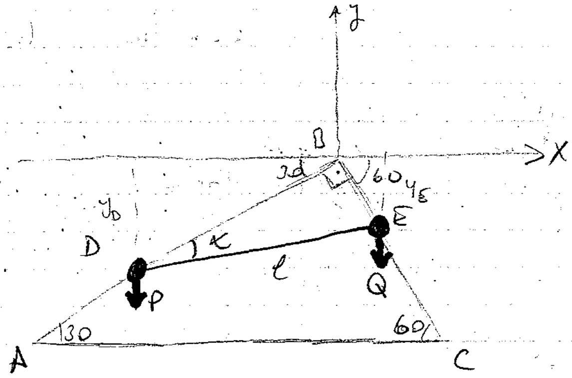
basit kiriş



çıkmalı kiriş

(90)

ÖR)



Ağırlıkları P ve Q olan iki kare AB ve BC telleri üzerinde sürtünmesiz olarak kayabilmektedir. Birbirlerine eğilebilen fakat uzamayan DC ipi bağlanmıştır. İpin AB ile yaptığı α açısı ile tanımlanan denge konumunu belirtiniz.

$DB = l\cos\alpha$

$\vec{P} = P\vec{j}$

$\vec{Q} = Q\vec{j}$

$y_D = l\cos\alpha \sin 30 \vec{j}$

$dy_D = -\frac{l}{2}\sin\alpha\, d\alpha\, \vec{j}$

$y_E = l\sin\alpha \sin 60 \vec{j}$

$dy_E = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l\cos\alpha\, d\alpha\, \vec{j}$

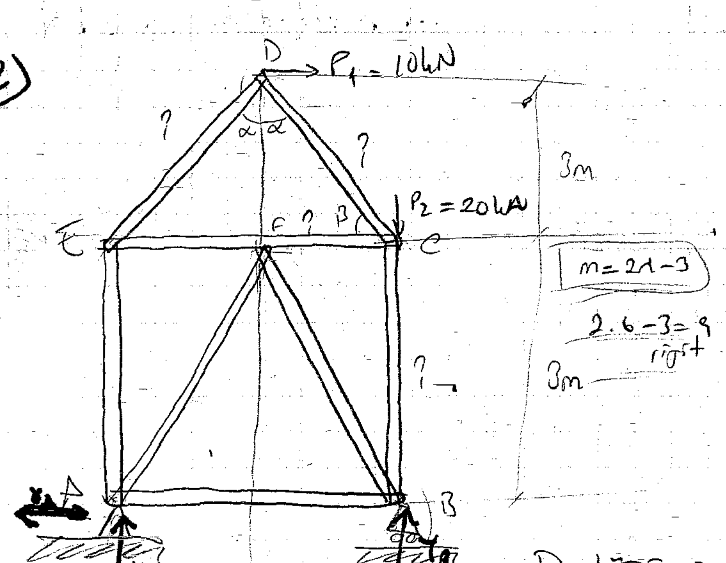
$d\tau = \vec{P}\cdot \vec{dy_D} + \vec{Q}\, \vec{dy_E} = 0$

$-\frac{Pl}{2}\sin\alpha\, d\alpha + \frac{Q\sqrt{3}}{2}\, l\cos\alpha\, d\alpha = 0$

$-\frac{P}{2}\sin\alpha + \frac{Q\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = 0$

$\frac{P}{2}\tan\alpha = \frac{Q\sqrt{3}}{2}$

Kafes Sistemi ÖR)



Şekilde verilmiş düzlem kafes sistemde mesnet tepkilerini ve ED, DC, CF, CB çubuk kuvvetlerini düğüm metoduyla bulunuz.

$\Sigma x = 0$

$P_1 - x_A = 0 \rightarrow P_1 = x_A = 10\,kN \leftarrow$

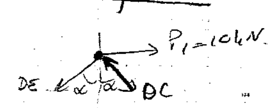
$\Sigma y = 0$

$y_A + y_B = 20\,kN$

$\Sigma M_B = 0$

$10\cdot 6 = y_A \cdot 8$, $y_A = 7.5 \downarrow$, $y_B = 27.5 \uparrow$

D düğümü



$\Sigma y = 0 \rightarrow DE\cos\alpha = -DC\cos\alpha$

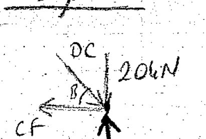
$DE = -DC$

$\Sigma x = 0 \Rightarrow -DE\sin\alpha + DC\sin\alpha + 10 = 0$

$DE = -DC = 6.25\,kN$ (çeki)

$DC = 6.25\,kN$ (bası)

C düğümü



$\Sigma x = 0 \rightarrow CF = DC\cos\beta$

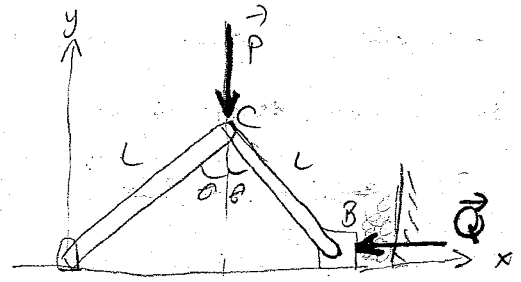
$CF = 5\,kN$ (çeki)

$\Sigma y = 0 \rightarrow -20 - CB - DC\sin\beta = 0$

$CB = 23.75$ (bası)

yönler neden aşağı - Zan

ÖR)



Mafsallar ve B bloğunun yatayla temasının sürtünmesiz olduğu kabul edilerek C'den düşey P kuv. uyg. verilen konumda B bloğunun sıkıştıracağı cisme uyg. yatay Q kuv. hesaplayınız. (çubuk ağırlıkları önemsiz)

$\vec{P} = -P\vec{j}$ $\qquad$ $OC = l\sin\theta\,\vec{i} + l\cos\theta\,\vec{j}$

$\vec{Q} = -Q\vec{i}$ $\qquad$ $d(OC) = l\cos\theta\,d\theta\,\vec{i} - l\sin\theta\,d\theta\,\vec{j}$

$OB = 2l\sin\theta\,\vec{i}$

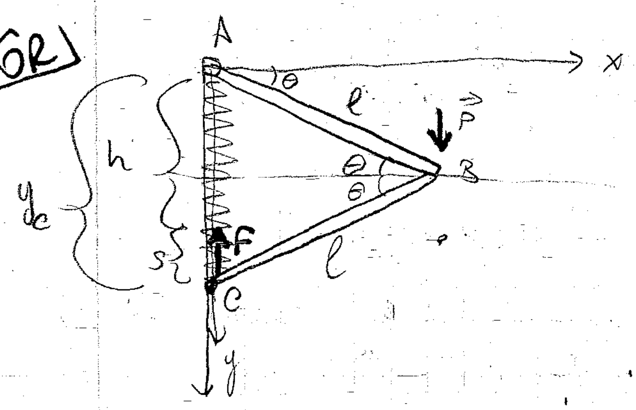
$d(OB) = 2l\cos\theta\,d\theta\,\vec{i}$

$$d\tau = P \cdot d(OC) + Q\,d(OB) = 0$$

$$= PL\sin\theta - Q\,2l\cos\theta = 0$$

$$Q = \frac{P}{2}\tan\theta$$

ÖR)



Mekanizmanın denge konumuna karşılık olan θ açısını ~~ve yaydaki kuvveti~~ kuv. için gerekli bağıntıları bulunuz. Yayın şekil değiştirmemiş h ve yay katsayısı k dır. Mekanizmanın ağırlığını ihmal ediniz.

$F = k \cdot s$, $\quad s = (y_c - h)$ $\qquad$ $y_B = l\sin\theta$ $\qquad$ $dy_B = l\cos\theta\,d\theta$

$y_c = 2l\sin\theta$ $\qquad$ $dy_c = 2l\cos\theta\,d\theta$

$F = k\,(2l\sin\theta - h)$

$$d\tau = P \cdot dy_B - F\,dy_c = 0$$

$$= PL\cos\theta\,d\theta - k(2l\sin\theta - h)\,2l\cos\theta\,d\theta = 0$$

$$= PL - 4kl^2\sin\theta + 2klh = 0$$

$$= P - 4kl\sin\theta + 2kh = 0$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{P + 2kh}{4kl}}$$

$F = k \cdot \left[2l\left(\frac{P+2kh}{4kl}\right) - h\right]$

$F = k\left(\frac{P}{2k} + \cancel{h} - \cancel{h}\right) = \frac{P}{2}$

$$\boxed{F = P/2}$$

46

(96)

Bir maddesel nokta bağları sonucunda her türlü harekete serbest olamaz. Bir yüzey veya bir eğri üstünde hareket etme zorundadır, C'den C''ne gelmişse dt sürede CC' yer değiştirmesi gerçek yerdeğiştirme denir. Maddesel noktanın t anında dt süresinde bağlara uymadan C'den C''ne geldiğini düşünelim. Bu keyfi her doğrultuda düşünülebilen sonsuz küçük yer değiştirmeye virtüel yer değiştirme denir.

Virtüel yer dep:

$$\vec{CC'} = \delta\vec{r} = \delta x\,\vec{i} + \delta y\,\vec{j} + \delta z\,\vec{k}$$

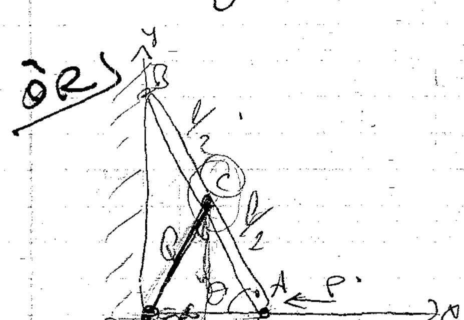
Bazen gerçek y.d. ile virtüel y.d. çakışır. Bu y.d.'lere bağlamalara uyan virtüel y.d. denir.

<u>Virtüel iş!</u> $\delta\tau = \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = 0$ $\delta\tau = \vec{M}\,\delta\theta = 0$ (96)

Virtüel iş teoremi:

Dengede olan bir maddesel noktaya etkiyen iç kuvvet sisteminin virtüel işler toplamı 0'dır. Katı cisim için de katı cisimler sistemi dengedeyse bağlamalara uyan bir virtüel y.d.'de aktif kuvvetlerin virtüel işler toplamı 0'dır.

ÖR)



Ağırlığı Q, uzunluğu l olan ince bir AB prizmatik çubuğu düşey düzlem üzerinde bulunmaktadır. Çubuğun yatayla yaptığı θ açısı iken dengede olabilmesi için A'ya uygulanacak yatay P kuv. nedir

$\vec{P} = -P\vec{i}$ $\theta \to d\theta$

$\vec{Q} = -Q\vec{j}$ $r_A \to dr_A$

$r_c \to dr_c$

$\vec{r}_C = \frac{l}{2}\cos\theta\,\vec{i} + \frac{l}{2}\sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{r}_A = l\cos\theta$

$dr_A = -l\sin\theta\,d\theta\,\vec{i}$

$dr_c = -\frac{l}{2}\sin\theta\,d\theta\,\vec{i} + \frac{l}{2}\cos\theta\,d\theta\,\vec{j}$

$\tau = P\cdot dr_A + Q\,dr_C = 0$

$= (-P\vec{i})(-l\sin\theta\,d\theta\,\vec{i}) + (-Q\vec{j})(\underbrace{-\frac{l}{2}\sin\theta\,d\theta\,\vec{i}}_{\text{gerek yok}} + \frac{l}{2}\cos\theta\,d\theta\,\vec{j})$

$= (Pl\sin\theta - Q\frac{l}{2}\cos\theta)\,d\theta = 0$

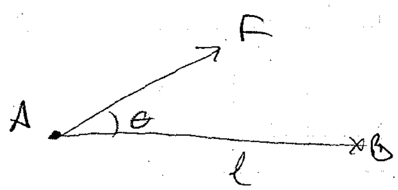
$$\boxed{P = \frac{Q}{2}\cot\theta}$$

Virtüel İş Metodu
(hayali)

Serbestlik Derecesi :

Üç serbestlik derecesi
iki " "
Tek " "

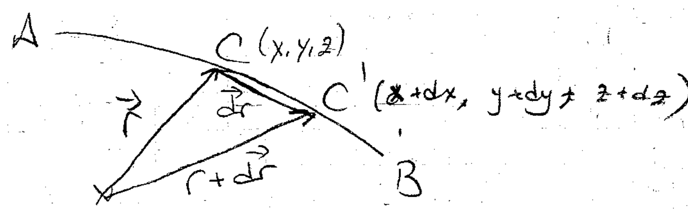
* Maddesel nokta veya levha cisim dengede ise hareketsizse serbestlik der. 0 olur. Bazen aranan sonuca denge denk. yazmak yerine kuvvetin etki ettiği noktada yapılan işi inceleyerek varmak daha uygun olur. Bir F kuvvetinin uyg. noktası hareket ederse kuvvet iş yapmış olur.



τ ; iş $\Longrightarrow$ İş; Kuvvetle yolun kuvvet üzerindeki izdüşümü çarpımı. Bir noktaya uygulanmış kuvvet sisteminin bileşkesinin yaptığı iş, bileşenlerin yaptığı işler toplamına eşittir.

$\tau = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \cos\theta \, L$

Bir Eğri boyunca Yer değiştirme



$\vec{r}$; yer vekt.

$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

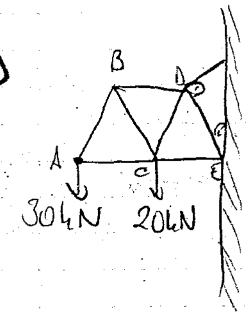
$CC' = d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

$d\tau = \vec{F} \cdot d\vec{r} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$

$\int_A^B d\tau = \tau_B - \tau_A$

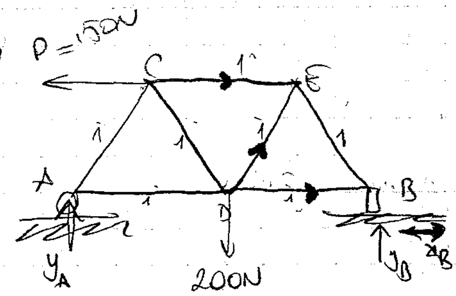
* AB yolu boyunca yapılan iş, A'dan B'ye giderken alınan yola bağlı değil A ve B'nin yerine bağlıdır.

ÖR)



$n = 5$
$m = 7$

ÖR/



CE'ye mesnet tepki ?

$m = 2n - 3$
$7 = 7$ ✓ dengede

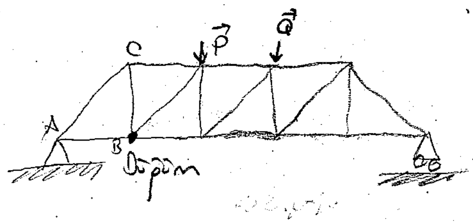
$\Sigma X = 0$
$P - X_B = 0$
$P_B = X_B = 150$

$\Sigma Y = 0$
$Y_A + Y_B = 200$

Düğüm Metodu

* Denge denklemleri

KAFES SİSTEMLERİ



Düzlem

$$\underbrace{\underbrace{m}_{\text{çubuk}} = 2\underbrace{n}_{\text{düğüm}} - 3}_{\text{dengede}}$$

Uzay

$m = 3n - 6$

⊛ $m < 2n-3$ rijit olmayan sistem

⊛ $m > 2n-3$ aşırı rijit (hiperstatik)

→ Birbirlerine sürtünmesiz mafsallarla bağlı doğru eksenli çubuklardan oluşan, çok parçalı taşıyıcı sistemlerde yükler mafsallara geliyorsa buna kafes sistemi denir.

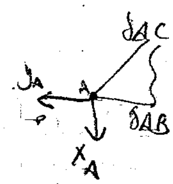
Çözüm Yöntemleri

① Grafik Yön. ② Analitik Yön.

→ Düğüm metodu
→ Ritter Kesim Metodu

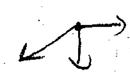
① Mafsal tepkilerini içindeki çubuklar görmeden düzlem statikle tepkiler gözecelsin. (Düğüm)
⊛ Düğümler belirle
⊛ Her düğüm için denge denk. yaz.

Ⓐ

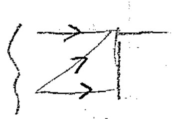


$\Sigma X = 0$
$\Sigma Y = 0$

Ⓑ

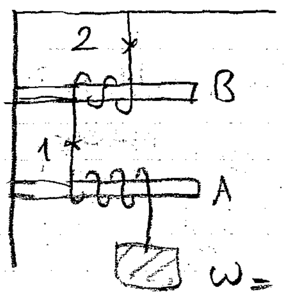


Kesim ⊛ Sadece parçanın belli yerindeki kuvveti bulmaya yarar. (3 çubuk olabilir)



$\Sigma X = 0$
$\Sigma Y = 0$
$\Sigma M_A = 0$
↳ A'ya göre moment

örnek:

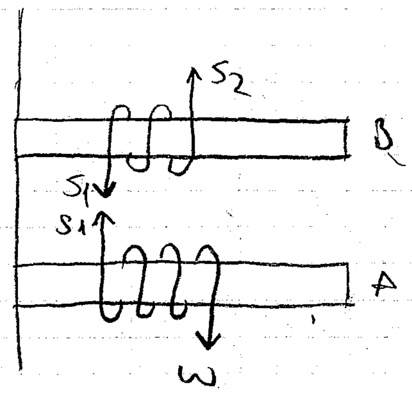


$\mu_B = 0.12$

$\mu_A = 0.10$

$W = 2000\,N$

… 1 ile 2 ile işaretli halat kesitlerinde oluşan çekme kuvvetlerini hesaplayınız? Halat A tabure etrafında 3, B tabure etrafında 2 kez sarılıdır.



$S_1 > S_2$ ② $W > S_1$ ①

$\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu_B \alpha_B}$ $\frac{W}{S_1} = e^{\mu_A \alpha_A}$

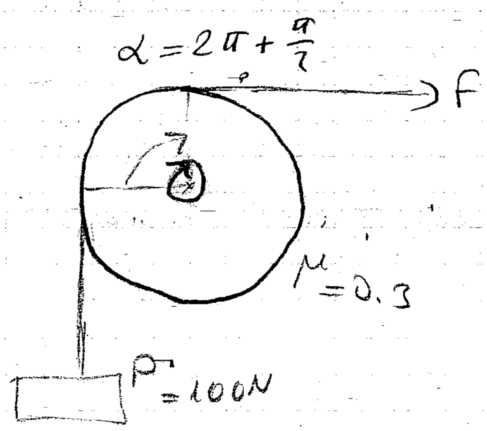
$\alpha_B = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$

$\alpha_A = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$

① $\Rightarrow \frac{2000}{S_1} = e^{0.10 \times 6\pi} \Rightarrow S_1 = 304\,N$

② $\Rightarrow \frac{304}{S_2} = e^{0.12 \times 4\pi} \Rightarrow S_2 = 67\,N.$

Soru)



F'in hangi değerleri için cisim dengededir?

a) $F_1 < P$

$\frac{P}{F_1} = e^{\mu\alpha} \Rightarrow F_1 = \frac{100}{e^{0.3 \times \frac{5\pi}{2}}} \Rightarrow \boxed{F_1 = 4.32}$

b) $F_2 > P$

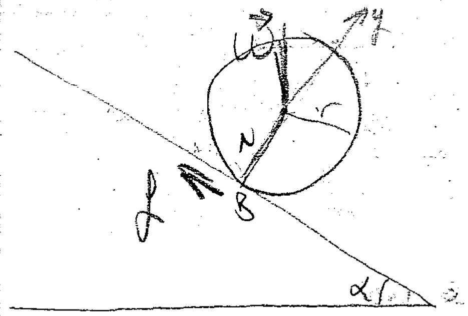
$\frac{F_2}{P} = e^{\mu\alpha} \Rightarrow F_2 = 100 \cdot e^{0.3 \times \frac{5\pi}{2}}$

$F_2 = 2314\,N$

$\boxed{4.32N < F < 2314N}$

denge aralığı

Yuvarlanma Sürtünmesi



$\Sigma x = 0 \Rightarrow f - W\sin\alpha = 0$

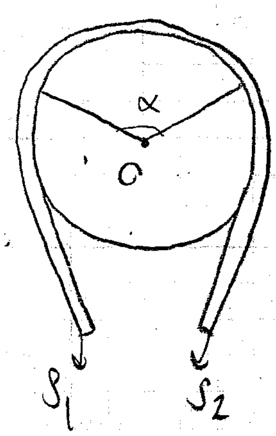
$\Sigma y = 0 \Rightarrow N - W\cos\alpha = 0$

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow W \cdot r\sin\alpha = 0$

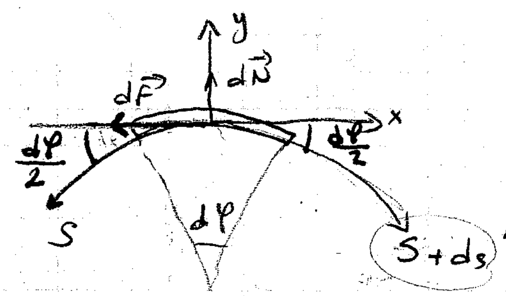
$\Downarrow$

$W \cdot r \cdot \sin\alpha - M_s = 0$

Halat Sürtünmesi



$S_2 > S_1$



$\sin\frac{d\varphi}{2} = \boxed{\frac{d\varphi}{2}}$ → radyan cinsi

$\cos\frac{d\varphi}{2} = 1$

$\boxed{ds = r\,d\varphi}$

$\Sigma x = 0 \Rightarrow (s+ds) - s - dF \Rightarrow \boxed{dF = ds}$

$\Sigma y = 0 \Rightarrow dN - \cancel{2}s\frac{d\varphi}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{dN = s\,d\varphi}$

$f = \mu_0 N$

$dF = \mu_0 dN$

$ds = \mu_0 s\,d\varphi$

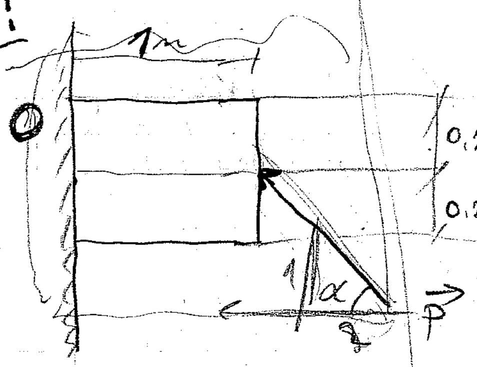
$\frac{ds}{s} = \mu_0\,d\varphi$

$\ln s_2 - \ln s_1 = \mu_0\alpha$

$$\boxed{\frac{S_2}{S_1} = e^{\mu_0\alpha}}$$

Malzeme					

örnek:

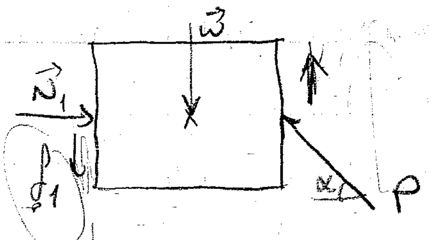


$W = 800\ N$

$\mu = 0.25$

P'nin hangi büyüklüğü için denge bozulmamaktadır?

ⓐ Yukarı doğru kaymanın başlamasını

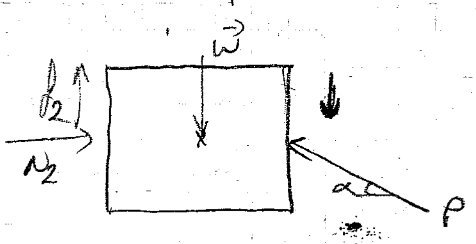


$\Sigma x = 0 \Rightarrow N_1 - P\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_1 = P\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Sigma y = 0 \Rightarrow P\sin\alpha - f_1 - 800 = 0$

$f_1 = \mu N_1 = \frac{1}{4} P \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{P}{2\sqrt{5}}$ $\boxed{P \cong 3580\ N}$

ⓑ Aşağı doğru kaymanın başlaması

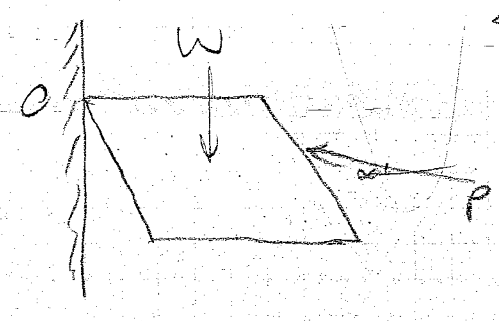


$\Sigma x = 0 \Rightarrow N_2 - P\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_2 = P\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Sigma y = 0 \Rightarrow f_2 - 800 + P\sin\alpha = 0$

$f_2 = \frac{P}{2\sqrt{5}}$ $\boxed{P \cong 1190\ N}$

ⓒ Bloğun devrilmesi

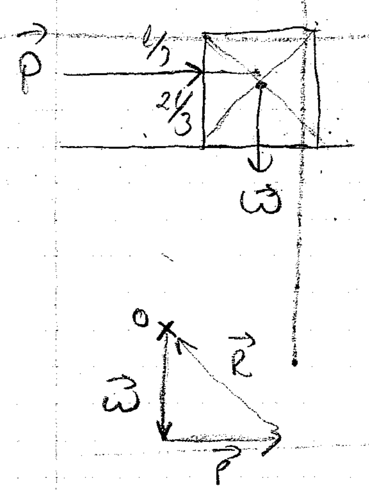


$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow -P\cos\alpha \times 0,25 + P\sin\theta 1 = \frac{-2}{4\sqrt{5}} + \frac{P}{\sqrt{5}}$

$\frac{P}{2\sqrt{5}} = 400$

$\boxed{P \cong 1790}$

$\boxed{1190\,N < P < 1790\,N}$



Tutunma şartını tepesi değme noktası elseri değme normali, tepe açısı da φ_0 olan sürtünme konisi ile açıkl yabiliriz. Eğer mesnet tepkisi koniyi içinde veya sınır olarak yüzeyinde bulunuyorsa cisimler tutar.

⊛ İki kuvvet bir noktada birleşiyor: 3. kuvvet de oradan geçmelidir.

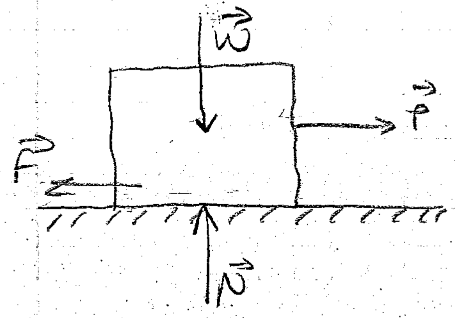
Kuvvet çapında $\vec{R}$ çizilmiştir. Bunun tesir doğrusu 's' yatay düzlemi B'de kesiyor. B oturma yüzeyi üzerinde bulunduğundan küp devrilmiyor. 's' doğrusu sürt. konisinin içine düştüğünden küp kaymıyor, tutunuyor.

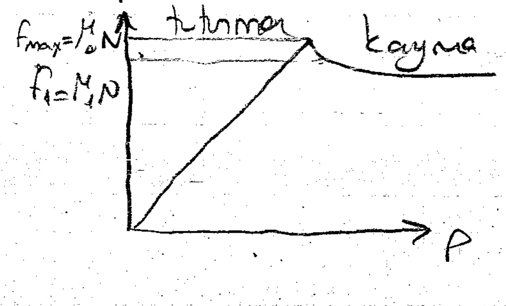
Kayma Sürtünmesi

1. Meydana gelen sürt. kuvveti temas halindeki alanların büyüklüğüne bağlı değildir.
2. Meydana gelen sürt. kuvveti normal basınçla orantılıdır.

$$\mu_1 = \frac{F}{N}$$

3. Küçük hızlar için sürt. kuvveti pratik olarak hızdan bağımsızdır. Kayarak sürtünme kuvveti gerçekte temas eden cisimlerden birinin hızına bağlıdır. Fakat küçük hızlar ile kayma hızına bağlı değilmiş gibi yaklaşık alacağız.





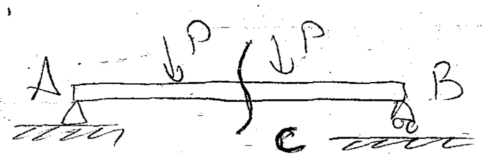
⊛ ~~Sorularda verilmediği sürece fark~~ ihmal et,

$\boxed{\mu_0 = \mu_1 = \mu}$ alacağız.

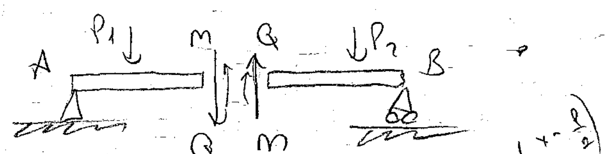
Kesme Kuvveti Diyagramı (KKD)

Eğilme Momenti Diyagramı (EMD)

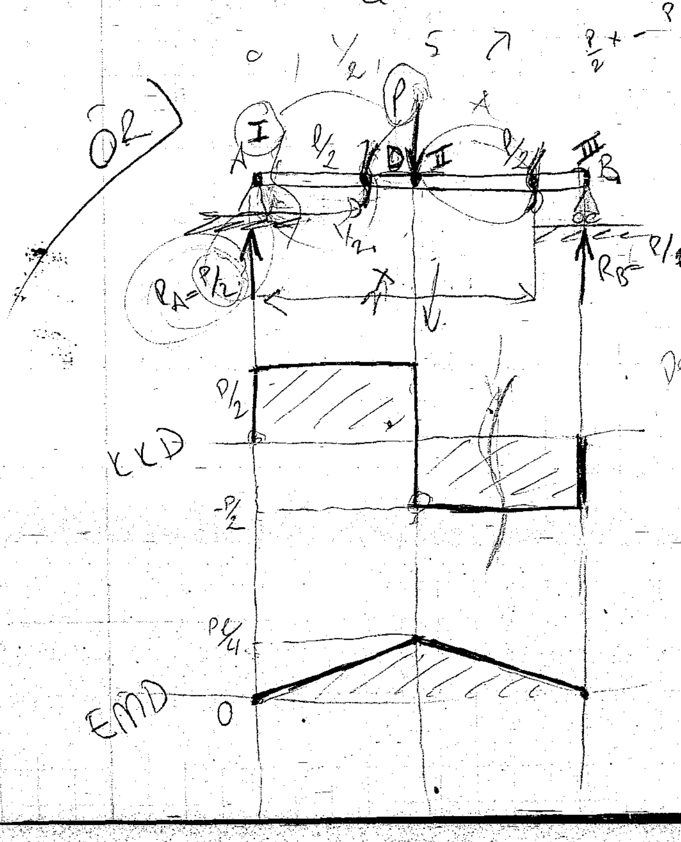
Bir kirişin hesabı esas olarak, uygulanan yüklerden oluşan kesme kuvvetlerinin ve eğilme momentlerinin karşılanmasıyla olur. Çeşitli yükler etkisindeki ve çeşitli biçimlerde mesnetlenmiş kirişlerdeki kesme kuvvetleri ve eğilme momentlerinin bulunması incelenir. Önce bütün kirişi bir serbest cisim seçip denge denklemlerinden mafsal kuvvetleri hesaplanır. Sonra istenilen yerden kiriş kesilip denge denklemleri kesik taraf için yazılıp, oradaki iç kuvvetler ve eğilme momenti bulunur. Kirişin her noktasında kesme kuvveti ve eğilme momenti hesaplanabilir. Ve bir diyagramla gösterilebilir.



$$\left.\begin{aligned}\Sigma X &= 0\\ \Sigma Y &= 0\\ \Sigma M_A &= 0\end{aligned}\right\} \begin{aligned} R_A &\ \_\_\_ \\ R_B &\ \_\_\_ \end{aligned}$$



ÖR)



D noktasına P yükü etkiyen l açıklığındaki AB basit kirişinin KKD ve EMD çiziniz.

Denge denk.

$\Sigma Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = P$

$\Sigma X = 0 \Rightarrow X_A = 0$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow P \cdot \frac{l}{2} = R_B\, l$

$R_B = \frac{P}{2}$

$R_A = \frac{P}{2}$

(X = mesafe)

I noktasında $x = 0$

$Q = P/2 \quad M = 0$

I–II arası $0 < x < l/2$

$Q = P/2 \quad M = Px/2$ ✓

II noktasında : $(x = \ell/2)$

$Q = P/2$ (B.ö) $\quad M = P\ell/4$

$-P/2$ (B.S)

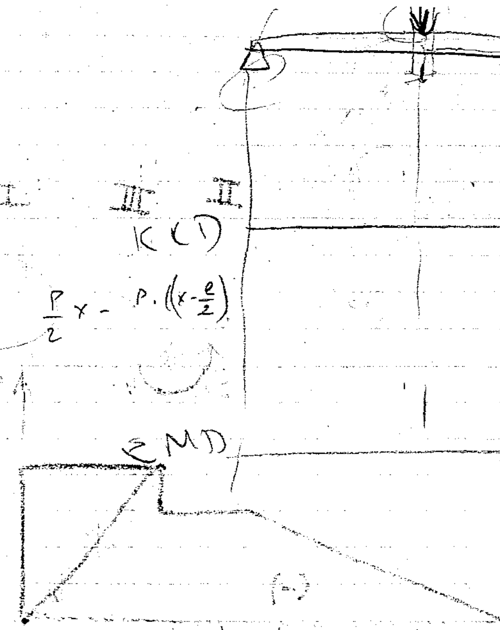
II – III arasında : $\ell/2 < x < \ell$

$Q = -P/2 \qquad M = \frac{P}{2}(\ell - x) \qquad \frac{P}{2}x - P\left(x - \frac{\ell}{2}\right)$

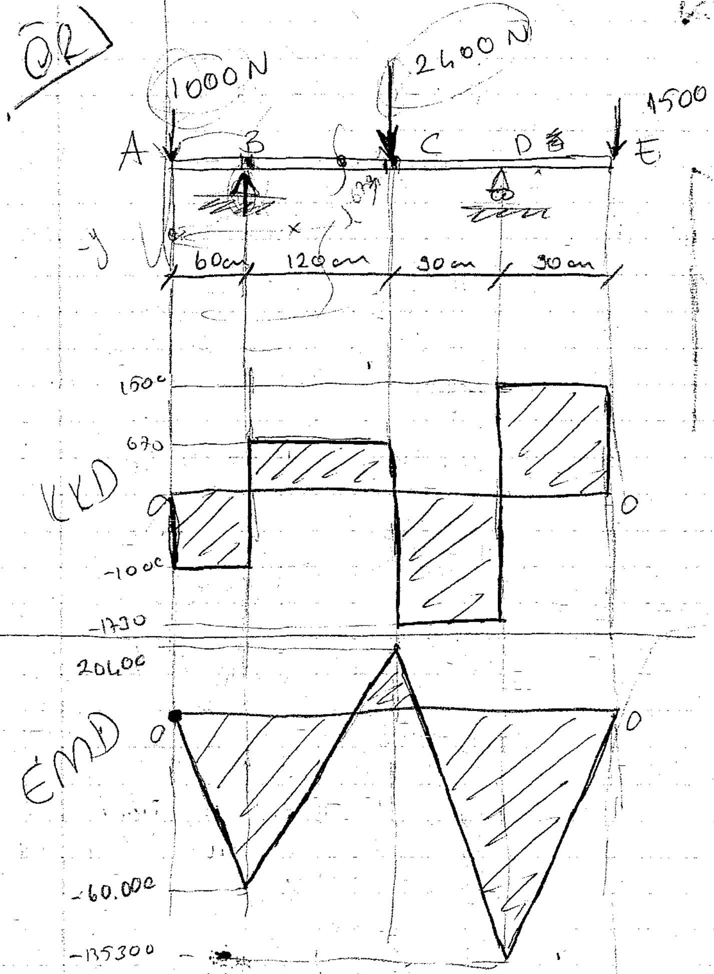
III noktasında : $(x = \ell)$

$Q = -P/2$ (B.ö) $\quad M = 0$

$+Y.\ 0$ (B.S)



ÖR)



Şekilde görüldüğü gibi 3 tekil yükle yüklenmiş çıkmalı kirişi KKD ve EMD çiziniz.

$\Sigma Y = 0 \Rightarrow R_B + R_D = 4900\,N$

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow$

$1000 \cdot 60 + R_D \cdot 210 = 2400 \cdot 120 + 1500 \cdot$

$R_D = 3230\,N$

$R_B \cong 1670\,N$

A noktasında $\quad x = 0$

$Q = -1000\,N \quad M = 0$

A – B arası $\quad 0 < x < 60$

$Q = -1000\,N \quad M = -1000x$

B noktasında $\quad x = 60\,cm$

$Q = -1000\,N$ (B.ö) $\quad M = -60.000\,N$

$Q = 670\,N$ (B.S)

B – C arası $\quad 60 < x < 180$

$Q = 670\,N \quad M = 670x - 100200$

C noktasında $\quad x = 180$

$Q = 670$ (B.ö) $\quad M = 20400$

$Q = -1730$ (B.S)

C – D arası $\quad 180 < x < 270$

$Q = -1730 \quad M = -1730x - 331800$

D noktasında $\quad X = 270$

$Q = -1730$ (B.ö)

$Q = 1500$ (B.S) $\quad M = -135800$

D – E arası $\quad 270 < x < 360$

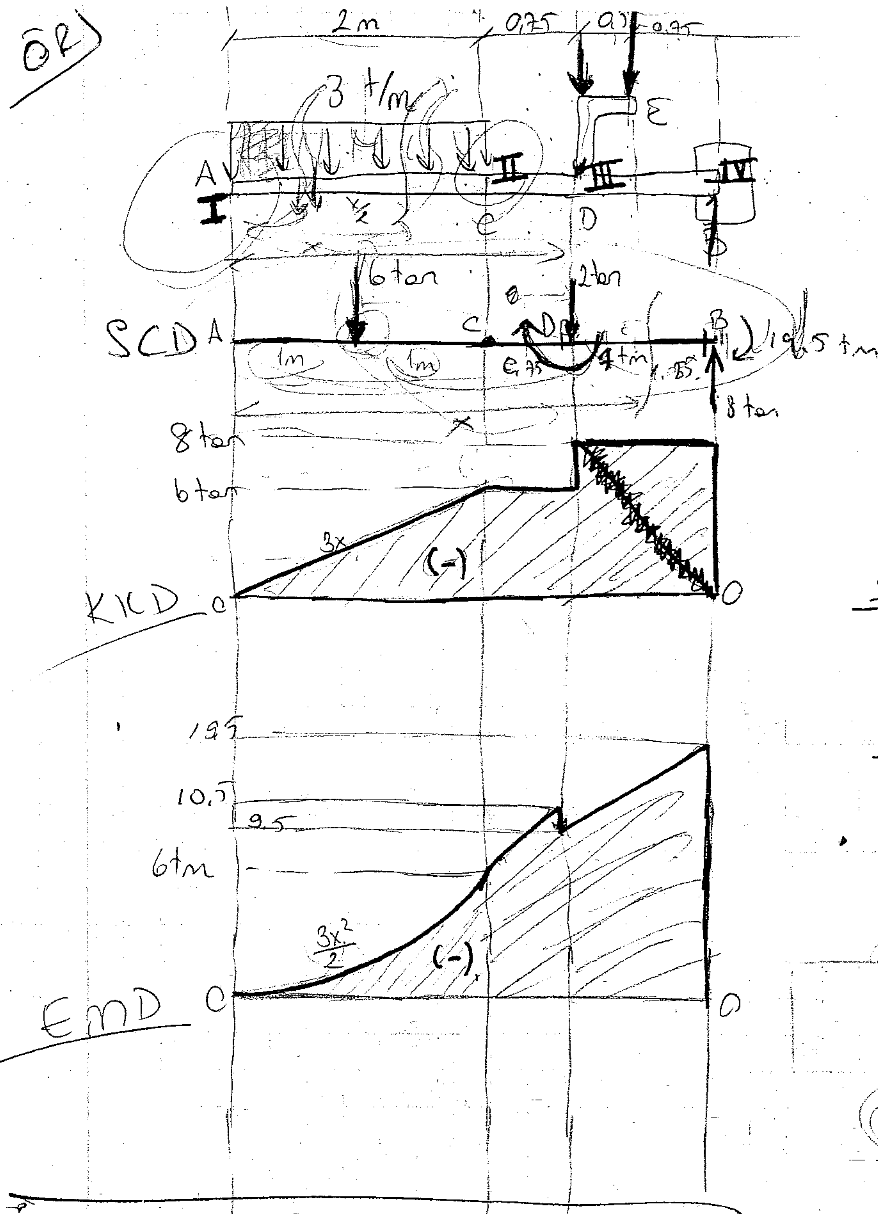
$Q = 1500\,N \quad M = 1500x - 540300$

E noktasında $\quad x = 360$

$Q = 1500$ (B.ö)

$Q = 0$ (B.S) $\quad M = 0$

ÖR)



kuvveti ve eğilme mom. a
(KKD - EMD)

$\Sigma Y = 0$

$2 \cdot 3 + 2 = R_B$

$R_B = 8$ ton

$\Sigma M_B = 0 \rightarrow 6 \cdot 3 + 2 \cdot 0,75 =$

$M = 19,5$

I'de

$x = 0$

$Q = 0 \quad M = 0$

I–II arası

$0 < x < 2$

$Q = 3x \quad M = \frac{3x^2}{2}$

II'de $x = 2$

$Q = 6t \quad M = 6\ tm$

II–III arası

$2 < x < 2,75$

$Q = 6$ ton $\quad M = 6x - 6$

III'de $x = 2,75$

$Q = 6t$ (B.ö) $\quad M = 10,5\ tm$

$Q = 8t$ (B.S) $\quad M = 9,5\ tm$

III–IV arası

$2,75 < x$

$Q = 8$ ton $\quad M = 8x - 12$

IV'de $x = 4$

$Q = 8$ ton (Bö) $\quad M = 19,5$ (B

$Q = 0$ ton (BS) $\quad M = 0$ (B

NOT: Bulunan Q ve M'lerin hepsi (-) bölgededir. B'deki M değeri bir süreksizlik olduğu KKD lineerken, EMD paraboliktir. Tekil yükler arasındaki bölgede KKD sabitken, EMD lineer değişim gösterir.

A305.com

305