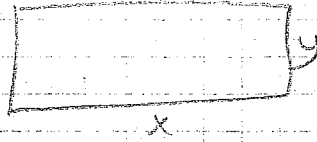


Mat-2
Çok değişkenli fonksiyonlar

5/11/2015

u değişkeni x, y, z değişkenlerine bağlı olarak veriliyorsa, u değişkeni $x, y, z, \dots$ değişkenlerinin bir fonksiyonudur. ve $u = f(x, y, z, \dots)$ formunda çok değişkenli fonksiyon olur.

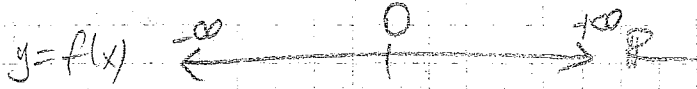
Örn:



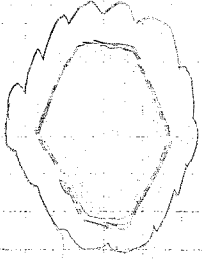
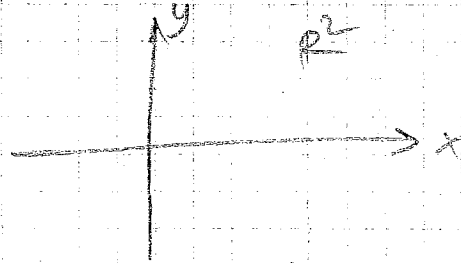
$$A = x \cdot y$$

$$f(x, y) = x \cdot y$$

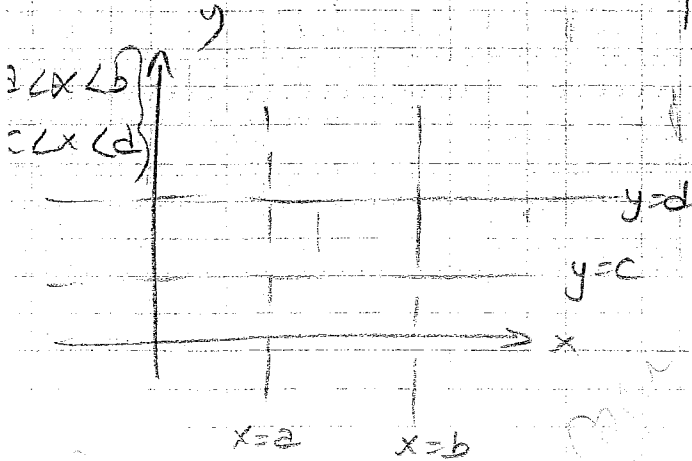
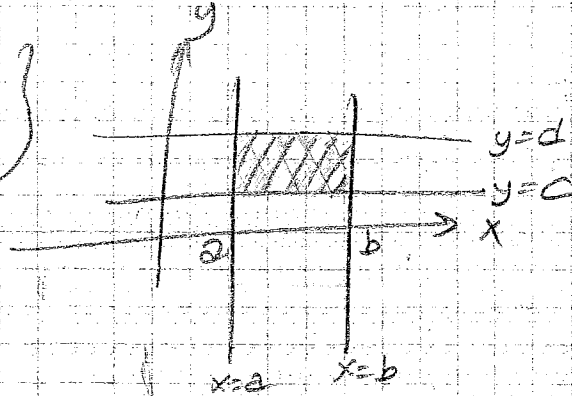
A305.com



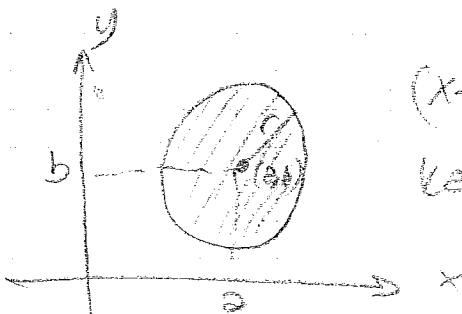
$$y = f(x, y)$$



Örn: $a \leq x \leq b$
 $c \leq y \leq d$



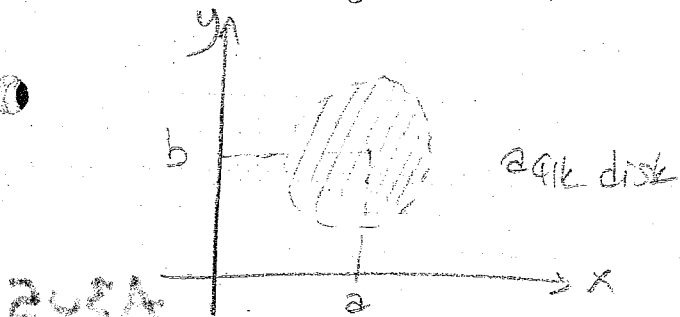
Örn:



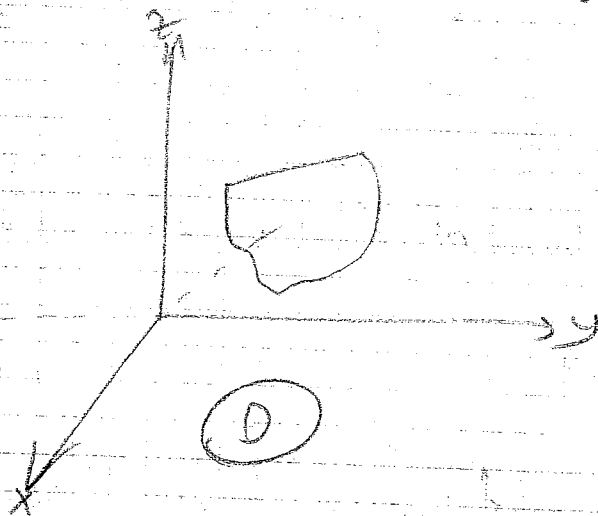
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$$

Kapalı disk

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r$$



$z = f(x, y)$ düzlemin bir D bölgesinde tanımlı olsun



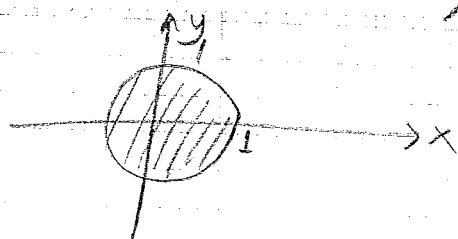
$\Rightarrow$ çık bölgesi

Örn 3 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ fonksiyonu için tanım bölgesini belirleyelim

$$f(x, y) = z$$

$$1-x^2-y^2 \geq 0$$

$|D|: x^2+y^2 \leq 1$ Tanım bölgesi



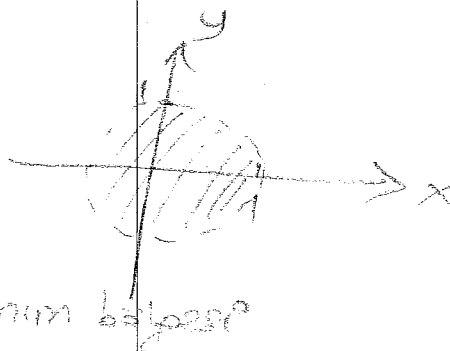
Örn 3

$$z = \ln(1-x^2-y^2)$$

> 0 olmalı

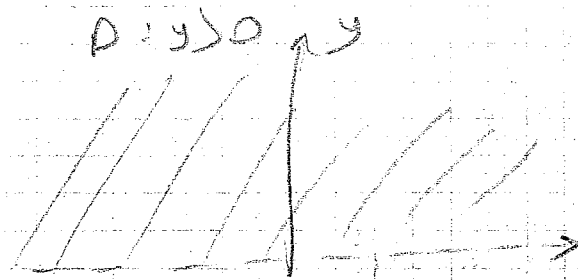
$$1-x^2-y^2 > 0$$

$$x^2+y^2 < 1 \Rightarrow \text{tanım bölgesi}$$



Öm 3 $z = x/y$
 $z = f(x,y)$

$x \in \mathbb{R}, y > 0$



Limit:

$z = f(x,y)$ fonksiyonunun tanım bölgesinde sabit bir noktada

$M_0(a,b)$ olan, $M(x,y)$ noktası $M_0(a,b)$ 'ye yaklaşma

durumunda $f(x,y)$ fonk'u belli bir c sayısına yaklaşıyorsa,

yani $|x-a| < \delta$ ve $|y-b| < \delta$ olduğunda $|f(x,y) - c| < \epsilon$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon)$ sayı varsa $(x,y) \rightarrow (a,b)$

yaklaşırken $f(x,y) \rightarrow c$ yaklaşıyordur veya fonksiyonun limiti c dir, dır.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} (f(x,y)) = c$$

$$x \rightarrow a$$

$$y \rightarrow b$$

Teorem: $u = f(x,y)$ ve $v = p(x,y)$ fonksiyonları, d_k olan bir D bölgesinde tanımlı olsunlar.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x,y) = c_1 \text{ ve } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} p(x,y) = c_2 \text{ olsun}$$

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} [f(x,y) + p(x,y)] = c_1 + c_2$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} [f(x,y) \cdot p(x,y)] = c_1 \cdot c_2$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \left[\frac{f(x,y)}{p(x,y)} \right]$$

$$= \frac{c_1}{c_2}, c_2 \neq 0$$

Süreklilik:

1. $z = f(x, y)$ fonk'nun tanım bölgesinde bulunan bir nokta $M(a, b)$ olsun. Eğer $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = f(a, b)$ ise $f(x, y)$ fonk'u

$M(a, b)$ noktasında süreklidir.

$$z = f(x, y)$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)] = 0$$

ise, $z = f(x, y)$ fonk'u süreklidir.

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)] = 0 \text{ ise,}$$

fonsiyon $M(a, b)$ nok. da süreklidir.

Örn: $z = x + y$ fonk'u xy düzleminde her noktada süreklidir.

$$z = f(x, y) = x + y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [(x + \Delta x + y + \Delta y) - (x + y)]$$

$$\cancel{x} + \Delta x + \cancel{y} + \Delta y - \cancel{x} - \cancel{y}$$

$$= 0$$

Kısmi Türevler:

2. $u = f(x, y, z, \dots)$ fonk'u bir D bölgesinde sürekli olsun. Bu fonsiyonda değişkenlerden biri hariç diğerleri sabit tutuluyorsa fonsiyon tek değişkenli bir fonsiyonu olur. Ve bu durumda türetilirse

çok değişkenli fonksiyonun 0. derecesine göre kısmi türevi elde edilir. Çok değişkenli fkt. de değişken sayısı kadar kısmi türevi mevcuttur.

$z = f(x, y)$ fonksiyonu bir düzlem bölgesinde sürekli olsun. y değişkeni sabit olursa $z = f(x, y_0)$ x 'in bir fonksiyonu olur.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

x değişkeni sabit tutulursa, $z = f(x, y)$ y değişkeninin bir fonksiyonudur.

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y+\Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

$z = x^2 - 3xy + 3y^2$ kısmi türevini bulalım.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 6y$$

$u = f(x, y, z)$ fonksiyonunu göz önüne alırsak

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ve $\frac{\partial f}{\partial z}$ kısmi türevleri vardır.

Yüksek Mertebeden Kısmi Türevler

$z = f(x, y)$ fonk.ının $\frac{\partial f}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevleri x ve y için birer fonk. olup, bunların tekrar x ve y ye göre kısmi türevleri bulunabilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$$

Belirli bir fonk.ın n . mertebeden kısmi türevlerinin sayısı 2^n dir.

$$u = f(x, y, z)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x \partial y}$$

Örn:

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

2. mertebeden kısmi türevler = ?

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \times$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} // \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2x \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Schwarz Teoremi

$z = f(x,y)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun f'_x, f'_y, f''_{xy} ve f''_{yx} türevleri bir $M(x,y)$ noktasında sürekli ise,
 $f''_{xy} = f''_{yx}$ dir.

* $z = x^2y$ fonksiyonunun 2. mertebeden türevleri

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$$

↓
sabit
bir sayı

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$u = x^3 y^2 z$$

Schwarz
Teoremi

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y^2 z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = 6x^2 y$$

Toplam Diferansiyel :

$z = f(x, y)$ fonk. nun $\frac{\partial f}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevleri mevcut ve sürekli olmak üzere,

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \text{ fonksiyonun toplam diferansiyelidir.}$$

$u = f(x, y, z)$ olmak üzere toplam diferansiyeli :

$$* u = f(x, y, z)$$

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \text{ olarak yazılır.}$$

$$* z = f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow dz = 2x dx + 2y dy \Rightarrow \text{Toplam diferansiyel.}$$

$$dz = 2x dx + 2y dy$$

Tam Diferansiyel Olma şartı :

x ve y değişkenlerinin fonksiyonları $f(x, y)$ ve $g(x, y)$ olmak üzere $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ toplam diferansiyeli $z = f(x, y)$ fonk. nun toplam dif. 'i ise, tam diferansiyeldir, demir.

Her ikisi bir toplam diferansiyel tan. diferansiyel ise,

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \text{ dir.}$$

Böylelikle, $p(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ ve $q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ dir.

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad \text{Tam Dif. Şartı.}$$

$(\cos x + 3x^2y)dx + (x^3 - y^2)dy$ ifadesi

tan diferansiyel midir?

$p(x,y)$

$q(x,y)$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 3x^2$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 3x^2$$

Tam dif.

evet

Yüksek Mertebeden Toplam Diferansiyeller:

$$z = f(x,y), \quad dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Toplam diferansiyelde aynı değişkenler bir fonksiyon olduğunda ekler diferansiyeli alındığında $z = f(x,y)$ fonk. sisteminin 2. mertebeden toplam diferansiyeli elde edilir.

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dy$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

$$d^3 z = d(d^2 z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dy^2 dx + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} dx^2 dy + 2 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f$$

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f$$

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f$$

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f$$

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f$$

Burada parantezin n. kuvveti binom açılımı gibi açılıyor ve $\frac{\partial}{\partial x}$ ve $\frac{\partial}{\partial y}$ nin üstleri ise $f(x,y)$ fonksiyonunun

x ve y'ye göre türev mertebelerini gösterir.

Örnek $z = x^3 + 4x^2y - y^2 \Rightarrow d^2 z = ?$

$$dz = (3x^2 + 8xy) dx + (4x^2 - 2y) dy$$

$$d^2 z = (6x + 8y) dx^2 + (8x) dx dy$$

$$+ (8x) dx dy - 2 dy^2 = (6x + 8y) dx^2 + 16x dx dy - 2 dy^2$$

Toplam Diferansiyelin Yaklaşık Hesaba Uygulanması

$$dz \approx \Delta z$$

$$dx \approx \Delta x$$

$$dy \approx \Delta y$$

Öm 9 $\sqrt{(298)^2 + (403)^2}$ değeri yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x=3 \\ y=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta x = 0,02 \\ \Delta y = 0,03 \end{array}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \Delta z + f(x,y)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx dz + f(x,y)$$

$$\Delta z \approx \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot (-0,02) + \frac{4}{5} \cdot (0,03) = 0,012$$

$$f(3+\Delta x, 4+\Delta y) = f(2,98, 4,03) \approx 5,012 + 5x$$

5,012 bulunur.

= Birlikte fonksiyonlar ve Türevleri =

1. $z = f(x, y)$ fonksiyonunda $x = x(t)$ ve $y = y(t)$ ise,
0 zaman $z = f(x(t), y(t)) = F(t)$ olur.

Örn 3 $z = x^3 - yx^2$ fonk. mada

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \cos 2t \\ y = \sin t \end{array} \right\} \text{ ise,}$$

$$z = 27 \cos^3 2t - 9 \cos^2 2t \cdot \sin t$$

2. $z = f(x, y)$ fonksiyonunda

$$\left. \begin{array}{l} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \end{array} \right\} \text{ ise,}$$

$z = f(x, y) = f(x(s, t), y(s, t)) = G(s, t)$ fonksiyona
dönüştür.

Türevleri 3

3. $\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\}$ olmak üzere $z = f(x, y)$ fonk. nun türevi:
 $z = f(x(t), y(t))$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$u = f(x, y, z)$$

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$z = f(x, y)$$

$$x = x(s, t)$$

$$y = y(s, t)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \end{array} \right\} \Rightarrow z = f(x(s, t), y(s, t))$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Örn³ $z = e^x \cos y$

$$e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t \quad y = t \Rightarrow \frac{dz}{dt} = ?$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$= e^x \cos y \cdot \frac{1}{t} - e^x \sin y$$

$$= \cos t - t \sin t$$

Kapalı fonksiyonların tınevleri:

$y = f(x)$ fonk nın kapalı fonk u

$f(x, y) = 0$ zeldindedir

$$\frac{dy}{dx} = ?$$

$$f(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$= 0$$

$$\# \quad x^2 + y^2 - xy + 6x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

y' x'e bağlı

gibi düşün.

$$2x + 2y \cdot y' - y - y' \cdot x + 6 = 0$$

$$y' = \frac{y - 2x - 6}{2y - x} //$$

$F(x, y, z) \Rightarrow$ Kapalı fonk. nın Türevi;

$$(z = f(x, y))$$

$$\# \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\# \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Örn 3

$$F(x, y, z) = \sin(xz) - e^{yz} - z = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{z \cos(xz)}{x \cos(xz) - ye^{yz} - 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{z e^{yz}}{x \cos(xz) - ye^{yz} - 1}$$

Bütün Eşitlerde Tarfı

Bir parametreye bağlı eğri ailesi:

$$Xcost + ycost = d$$

Billemi başlangıç noktasından d uzaklıkta bir doğru gösterir. f'nin değeri mes. halinde birçok değeri elde edilir. Bu şekilde elde edilen

bütün eğriye bir eğri ailesi ve f'ye de parametre denir. ve

$$f(x,y,z)=0 \text{ şeklinde gösterilir}$$

Bir parametreye bağlı eğri ailesinin tarfı:

Bir eğri ailesinin bütün üyelerinin geçtiği olduğu bir eğriye veya bir grup eğriye eğri ailesinin tarfı denir.

-parametrik denklemler

$$\left. \begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t) \end{array} \right\} \text{den eğri, } f(x,y,z)=0$$

eğri ailesinin her üyesine geçer olsun.

$$\left. \begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t) \end{array} \right\} \text{eğrisinin herhangi bir noktasındaki eğimi}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \text{ dir.}$$

$f(x,y,z)=0$ eğrisinin herhangi bir noktasındaki eğimi

$$f'_x(x,y,z) + f'_y(x,y,z) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{f'_x(x,y,z)}{f'_y(x,y,z)} \text{ dir.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} \text{ ile } f(x, y, z) = 0$$

griinin teget olmaları halinde değme noktalarının gmmeleri" eşit olur.

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = - \frac{f'_x(x, y, z)}{f'_y(x, y, z)}$$

$$\Rightarrow f'_x(x, y, z) \frac{dx}{dt} + f'_y(x, y, z) \frac{dy}{dt} = 0$$

$f(x, y, z) = 0$ bileşik bir fmk'dur.

$$f'_x(x, y, z) \frac{dx}{dt} + f'_y(x, y, z) \frac{dy}{dt} + f'_z(x, y, z) = 0$$

$$\Rightarrow f'_z(x, y, z) = 0 \text{ elde edilir.}$$

0 halde değme noktasının koordinatları

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ f'_x(x, y, z) = 0 \\ f'_y(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{denk. ni} \\ \text{seçer.} \end{array}$$

Bu denklemler zafin parametrik denklemleridir.

Örn 3 Başlangıç noktasından 3 birim uzakta ki dğruların zafinin denklemini bulunuz.

$$x \cos t + y \sin t = 3$$

$$f(x, y, t) = x \cos t + y \sin t - 3 = 0$$

$$f'_t(x, y, t) = -x \sin t + y \cos t = 0$$

zafin
parametrik
denklemler

$$x \cos t + y \sin t = 3$$

$$-x \sin t + y \cos t = 0$$

$$x = 3 \cos t$$

$$y = 3 \sin t$$

tarfin parametrik
denklemi

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

tarfin
kare denkleminin

Değişken Değiştirme:

bir değişkenle değişkenleri

$$y = f(x) \Rightarrow y = f(t(x))$$

$$x = x(t)$$

$$t = t(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x'(t)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x'(t)} \right) \cdot \frac{1}{x'(t)} \\ &= \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x'(t)} \right)' \cdot \frac{1}{x'(t)} \end{aligned}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \left[\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x'(t)} \right)' \cdot \frac{1}{x'(t)} \right]' \cdot \frac{1}{x'(t)}$$

Öm:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + y = 0 \text{ denkleme } x = e^t \text{ değeriyle denkleme}$$

memi ypiare $\ln x = t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t} \right) \cdot \frac{1}{e^t}$$

$$= \left[\frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{1}{e^t} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t} \right] \cdot \frac{1}{e^t}$$

$$= e^{-2t} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right]$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right] + 2e^t \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t} + y = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0}$$

$x \leftrightarrow y$, x bağımlı değeriyle y bağımlı değeriyle yerini değiştirilirse $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \right)$$

$$= \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \right) \cdot \frac{dx}{dy} \Rightarrow \left[\frac{-\frac{d^2 x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy} \right)^2} \right] \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{d^2 x}{dy^2}$$

Öm:

$$x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 3x \frac{dy}{dx} = 0$$

denk. ini y 'yi bağımsız değişken kabul ederek dönüştürünüz.

$$x^3 \left(\frac{-d^2 x / dy^2}{(dx/dy)^3} \right) + \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy} \right)^3} - \frac{3x}{\frac{dx}{dy}} = 0$$

$$-x^3 \frac{d^2 x}{dy^2} - 3x \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + 1 = 0$$

$$x^3 \frac{d^2 x}{dy^2} + 3x \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 - 1 = 0$$

z iki bağımsız değişken z

$z = f(x,y)$ iki değişkenli fonksiyonda $x = x(u,v)$
uygulanırsa $y = y(u,v)$ } değişken dönüşümü

$$\left. \begin{array}{l} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{array} \right\} \Rightarrow z = f(x,y) \\ = f(x(u,v); y(u,v)) \\ = f(u(x,y); v(x,y))$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$x = x(u, v) \quad \text{ve} \quad y = y(u, v)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{\partial x}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ 0 &= \frac{\partial y}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial y}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial x}{\partial v} \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & 1 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\Delta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\Delta}$$

$$x = x(u, v) \quad \text{ve} \quad y = y(v, v)$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$1 = \frac{\partial y}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial y}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial x}{\partial v} \\ 1 & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\Delta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\Delta}$$

Elde edilen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ ve $\frac{\partial v}{\partial y}$ lineerleri yerlerine yazılır.

lineerleri $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$

Ömek: $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$

$$\left. \begin{aligned} x &= u^2 + v^2 \\ y &= u^2 + v^3 \end{aligned} \right\} \text{dönüştürme yapılmaz.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$x = u^3 + v^2 \quad \text{ve} \quad y = u^2 + v^3$$

$$1 = 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3u^2 & 2v \\ 2u & 3v^2 \end{vmatrix} = 9u^2v^2 - 4uv$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2v \\ 0 & 3v^2 \end{vmatrix} = 3v^2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3u^2 & 1 \\ 2u & 0 \end{vmatrix} = -2u$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3v^2}{9u^2v^2 - 4uv}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2u}{9u^2v^2 - 4uv}$$

gje jore tveir

$$x = u^3 + v^2 \quad \text{og} \quad y = u^2 + v^3$$

$$\begin{cases} 0 = 3u^2 \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2v \\ 1 & 3v^2 \end{vmatrix} = -2v$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3u^2 & 0 \\ 2u & 1 \end{vmatrix} = 3u^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2v}{3u^2v^2 - 4uv}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{3u^2}{3u^2v^2 - 4uv}$$

$$(u^3 + v^2)^2 \left(\frac{3v^2}{3u^2v^2 - 4uv} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{2u}{3u^2v^2 - 4uv} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + (u^2 + v^3)$$

$$\left(\frac{-2v}{3u^2v^2 - 4uv} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{3u^2}{3u^2v^2 - 4uv} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + z = 0$$

$$\frac{(u^3 + v^2)^2}{3u^2v^2 - 4uv} \left(3v^2 \frac{\partial z}{\partial u} - 2u \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{u^2 + v^3}{3u^2v^2 - 4uv} \left(-2v \frac{\partial z}{\partial u} + 3u^2 \frac{\partial z}{\partial v} \right) + z =$$

Ödun 3

$$\begin{cases} x = e^u + \sin v \\ y = 2 \arctan u + v^2 \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

Ters dönüşüm

$$\left. \begin{array}{l} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{array} \right\} \text{verilenler}$$

$$x = x(u, v) \text{ ve } y = y(u, v) \text{ yi göremeden } \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\text{ve } \frac{\partial y}{\partial v} \text{ formlerini hesapla}$$

$$u = u(x, y) \text{ ve } v = v(x, y)$$

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)$$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Delta_1' = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Delta_2' = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 1 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\Delta_1'}{\Delta'} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\Delta'}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\Delta_2'}{\Delta'} = \frac{-\frac{\partial v}{\partial x}}{\Delta'}$$

$$u = u(x, y) \text{ ve } v = v(x, y)$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)$$

$$1 = \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)$$

$$\Delta_3' = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ 1 & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\Delta_3'}{\Delta'} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\Delta'}$$

$$\Delta_4' = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\Delta_4'}{\Delta'} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\Delta'}$$

Fonksiyonel Determinant 3

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

determinantına

x ve y fonksiyonlarının u ve v'ye göre fonksiyonel determinantı veya

Jakobiyeni (Jacobian) denir.

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

determinantına da

$$= \frac{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)}$$

u ve v fonksiyonun x ve y'ye göre fonksiyonel

determinantı veya Jakobiyeni denir.

Fonksiyonel determinantın özellikleri:

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x,y,z) \\ v &= f_2(x,y,z) \\ w &= f_3(x,y,z) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Fonksiyonel determinanın özellikleri

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y, z) \\ v &= f_2(x, y, z) \\ w &= f_3(x, y, z) \end{aligned} \right\} \text{ve} \quad \left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(\alpha, \beta, \delta) \\ y &= \varphi_2(\alpha, \beta, \delta) \\ z &= \varphi_3(\alpha, \beta, \delta) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{olmak} \\ &\text{gerek,} \quad \frac{D(u, v, w)}{D(\alpha, \beta, \delta)} \\ &= \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \delta)} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

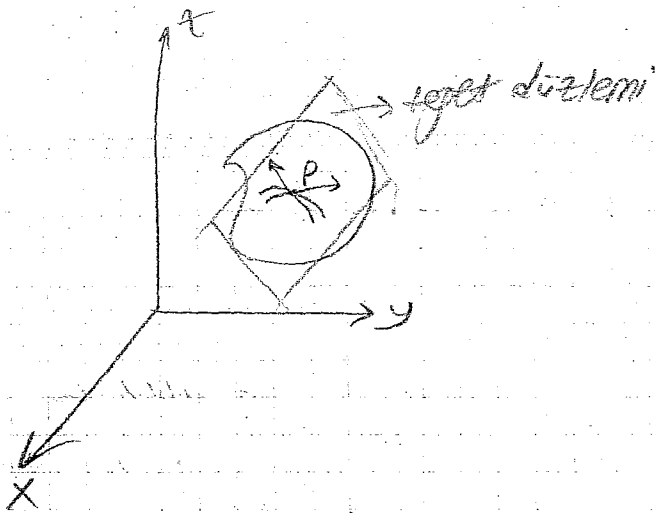
$$2) \quad \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = 1$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y, z) \\ v &= f_2(x, y, z) \\ w &= f_3(x, y, z) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{fonksiyonları arasında} \\ &\text{bir bağıntının olabilmesi için} \\ &\text{gerek yeterli koşul} \quad \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = 0 \\ &\text{olmasıdır.} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

ör $u = x^2y$ ve $v = \sqrt{x^2y} - e^{x^2y}$ fonksiyonları arasında bir bağıntı old. gösteriniz.

$$\begin{aligned}
 \frac{D(u, v)}{D(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2xy & x^2 \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2y}} - 2xe^{x^2y} & x^2 - x^2e^{x^2y} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{2x^2y}{2\sqrt{x^2y}} - 2x^2e^{x^2y} - \frac{x^2y}{\sqrt{x^2y}} + 2x^2ye^{x^2y} = 0
 \end{aligned}$$

Kısmi Türevlerin Uygulanması



Teo: $F(x, y, z) = 0$
yüzeyinin herhangi bir
 $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından
geçen bütün tegetleri aynı
bir düzlemdir. Bu düzleme
teget düzlemi denir.

isp: $F(x, y, z) = 0$ yüzeyinin herhangi bir $P(x_0, y_0, z_0)$
noktasından geçen eğrinin parametrik denk.

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\} \text{ olsun.}$$

Parametrik denklemlerle verilen bir yüzey üzerinde bulunduğandan
yüzeyin denklemini sağlar.

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \text{ dir.}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

elde edilir.

Bu bağıntı, bileşenleri

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \text{ ve } \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \text{ den}$$

iki vektörün skaler çarpımının 0 olduğunu
gösterir.

$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$ vektörü hız vektörüdür.

$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$ normal vektördür.

yüzeyin $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen herhangi bir eğri için bu durum gösterilebilir. Her bir eğri için $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen aynı normal vektör aynı düzlem üzerinde bulunur. Bu düzleme yüzeyin $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen düzlemi denir.

Hız Düzleminin Denklemi

$$\vec{PM} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$$

$$\vec{PN} = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{PM} \cdot \vec{PN} = 0$$

$P(x_0, y_0, z_0)$ noktasında
Tangent düzlem
denir.

$$(x-x_0) \frac{\partial F}{\partial x} \bigg|_P + (y-y_0) \frac{\partial F}{\partial y} \bigg|_P + (z-z_0) \frac{\partial F}{\partial z} \bigg|_P = 0$$

$\frac{\partial F}{\partial x} \bigg|_P$ F'nin x'e göre kısmi türevinin $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasında değeri.

Bir yüzeyin Normali

$$\vec{PA} = \lambda \vec{PN}$$

$$\vec{PA} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$$

$$(x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} = \lambda \left[\frac{\partial F}{\partial x} \bigg|_P \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \bigg|_P \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \bigg|_P \vec{k} \right]$$

$$(x-x_0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_P, \quad (y-y_0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_P \quad \text{ve} \quad (z-z_0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_P \quad \text{dir.}$$

$$* \quad \frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_P} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_P} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_P}$$

$P(x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki
normalin denklemi

örneğin $z = x^2 + y^2$ yüzeyinin $P(1, -2, 5)$ noktasındaki ^{teğet} teğet düzleminin
ve normalinin denklemini bulalım.

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_P = 2x \Big|_P = 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_P = 2y \Big|_P = -4$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_P = -1$$

$$(x-1) \cdot 2 + (y+2) \cdot (-4) - (z-5) = 0$$

$$2x - 4y - z = 5$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$$

normalin
denklemi

Taylor formülü:

Bir D böl. de sürekli ve her noktadan kısmi türevler
mercent den 2. derejeli $z = f(x, y)$ fonk. için örne alalım.

$(x, y) = (x_0, y_0)$ noktası civarındaki Taylor açılımı:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x_0, y_0) + \dots$$

Mac Larm formülü 3

$z = f(x, y)$ fonksiyonunun $L(x, y) = (0, 0)$ noktasındaki

Taylor açılımıdır,

$$f(x, y) = f(0, 0) + \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right] f(0, 0) + \frac{1}{2!} \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(0, 0) + \\ + \frac{1}{n!} \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(0, 0) + \dots$$

Örnek 3 $f(x, y) = e^x \sin y$ fonksiyonunun $(0, \pi/2)$ noktasında 2. mertebeden
dönütlerin bulunup diline kadar Taylor açılımını
yazalım.

$$f(x, y) = f(0, \pi/2) + x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0, \pi/2)} + (y - \pi/2) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0, \pi/2)} + \frac{1}{2!} \left[x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(0, \pi/2)} + \right. \\ \left. 2x(y - \pi/2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0, \pi/2)} + (y - \pi/2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(0, \pi/2)} \right] + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^2} = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x \cos y$$

$$f(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2!} \left[x^2 - (y - \pi/2)^2 \right] + \dots$$

Ömr

$f(x,y) = \cos x \cos y$ fonksiyonunun Mac (2)ümün zikiminde
2. mertebeden türevlerinin bulundugu forme koster yonnu



Caner
Vizir

