

Numara:

Ad-Soyad:

Bölüm/Grup:

12.05.2007

1	2	3	4

NOT: TEK ŞIK CEVAPLANDIRILACAKTIR. SÜRE: 75 dk.

YTÜ 2006-2007 Öğretim Yılı Bahar Dönemi
0251322 kodlu Matematik II Dersi 2. Yıl içi Sınavı

- 1) a) e^x fonksiyonunun McLaurin-serisini kullanarak $f(x) = xe^{-2x}$ fonksiyonunun McLaurin serisini yazınız. Elde ettiğiniz seriden yararlanarak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$ toplamını bulunuz.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ idi. 0 halde}$$

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n \cdot 2^n}{n!}$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!} \text{ dir.}$$

$$x=1 \text{ için } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n!} = 1 \cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 2^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

1. YOL

$$a_{n+1} = \frac{2n+3}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 2^n}{2n+1}$$

$-\frac{1}{2} < 1$ yok.

2. YOL

$$b_n = \frac{1}{2^n} \text{ yakınsak geometrik serisiyle mukayese edersek,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2 \cdot 2^n} \cdot 2^n$$

Sonuç sıfır ve b_n yakınsak olduğundan a_n de yakınsak

2) a) $(x,y) \neq (0,0)$ için $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ veriliyor. $f(x,y)$

fonksiyonu orjinde sürekli olacak şekilde $f(0,0)$ tanımlanabilir mi?
Nedenleriyle birlikte araştırınız.

$y=kx$ diye Lim.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=kx)}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - k^2 x^2}{k^2 x^2 + x^2} = \frac{-k^2 + 1}{k^2 + 1} \text{ dir.}$$

Bu limit farklı k değerlerine göre değişeceğinden mevcut değildir. Böylece f orjinde sürekli olacak biçimde $f(0,0)$ tanımlanamaz.

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$ limitini mevcut olmadığını gösteriniz.

$y=kx$ diye Lim

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=kx)}} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2} \text{ dir.}$$

Limitin değeri farklı k değerlerine göre değişeceğinden mevcut değildir.

3) a) $f(2u - v, u + 2v)$ fonksiyonu kendi değişkenlerine göre $f_{xx} + f_{yy} = 0$ Laplace denklemini sağlamaktadır.

Fonksiyonun, u ve v değişkenlerine göre de $f_{uu} + f_{vv} = 0$ Laplace denklemini sağladığını gösteriniz.

$$\begin{aligned} f_u &= f_x \cdot 2 + f_y \cdot 1 \\ f_{uu} &= (f_{xx} \cdot 2 + f_{xy} \cdot 1) \cdot 2 + (f_{yx} \cdot 2 + f_{yy} \cdot 1) \cdot 1 \\ &= 4f_{xx} + 4f_{xy} + f_{yy} \end{aligned}$$

$$f_v = f_x \cdot (-1) + f_y \cdot 2$$

$$\begin{aligned} f_{vx} &= (f_{xx} \cdot (-1) + f_{xy} \cdot 2) \cdot (-1) + (f_{yx} \cdot (-1) + f_{yy} \cdot 2) \cdot 2 \\ &= f_{xx} - 4f_{xy} + 4f_{yy} \end{aligned}$$

$$f_{uu} + f_{vx} = 5f_{xx} + 5f_{yy} = 5(f_{xx} + f_{yy}) = 0$$

b) f, x ve y nin türevlenebilir iki fonksiyonu olmak üzere

$$z = f(x^2 - y^2) \text{ denklemi veriliyor. } y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x^2 - y^2) \cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(x^2 - y^2) \cdot (-2y)$$

$$\begin{aligned} y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} &= 2xy f'(x^2 - y^2) - 2xy f'(x^2 - y^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 4) a) $f(x, y) = x^2 y^3$ fonksiyonunun $(3, 1, 0.9)$ noktasında bir yaklaşık değerini hesaplayınız. $(3, 1)$ noktasında Lineerleşme uygun.
dur.

$$L(x, y) = f(3, 1) + f_1(3, 1)(x-3) + f_2(3, 1)(y-1)$$

$$= 9 + f_1(3, 1)(x-3) + f_2(3, 1)(y-1)$$

$$f_1(x, y) = 2xy^3 \quad f_2(x, y) = 3x^2 y^2 \quad f(3, 1) = 9$$

$$f_1(3, 1) = 6 \quad f_2(3, 1) = 27$$

$$\Rightarrow L(x, y) = 9 + 6(x-3) + 27(y-1)$$

$$\begin{aligned} L(3.1, 0.9) &\approx f(3.1, 0.9) = 9 + 6[(3.1)-3] + 27(0.9-1) \\ &= 9 + 0.6 - 2.7 \\ &= 6.9 \end{aligned}$$

- b) $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 x$ fonksiyonunun $(1, -1, 1)$ noktasındaki normal doğrusunun ve teğet düzlemini denklemini bulunuz.

$$\nabla f(x, y, z) = (2xy + z^2)\vec{i} + (x^2 + 2yz)\vec{j} + (y^2 + 2zx)\vec{k}$$

$$\nabla f(1, -1, 1) = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} = \vec{n}$$

Teğet Düzleminin denk:

$$(1, -1, 1) \rightarrow (x, y, z) : \vec{a} = (x-1)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + (z-1)\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow -(x-1) - (y+1) + 3(z-1) = 0$$

$$\boxed{x + y - 3z = -3}$$

Normal doğrusunun denk:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

ve
ek,
n
2
1

nsa
rk

YTÜ
0251312 MATEMATİK II
FİNAL SINAVI

13 Ağustos 2007

Adı-Soyadı :
Numara/Üniversite :
İmza :

1	2	3	4	5	Toplam

Sınav süresi 60 dk. SADECE 4 SORU
CEVAPLANDIRILACAKTIR.. BAŞARILAR...

1. $\ln \frac{1-x}{1+x}$ fonksiyonunu $x=0$ civarında Taylor serisine açınız ve elde edilen serinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\ln \frac{1-x}{1+x} = \ln|1-x| - \ln|1+x|$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2(n+1)-1}}{x^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} \cdot x^2}{x^{2n-1}} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

$$= x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$2. f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonsiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

$$f(0,0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right\} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right\} = 0$$

$$y = mx : \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = 0$$

$$y^2 = x : \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^6}{y^6} = 1$$

Limit mevcut olmadığı için
Fonksiyon $(0,0)$ 'da sürekli değildir.

3. $f(x,y) = xy^{2x}$ fonksiyonunun $-1 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq y \leq 1$ ile belirli dikdörtgen bölge üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

$$f_1(x,y) = y - 2 = 0$$

$$y = 2$$

$$f_2(x,y) = x = 0$$

$$(0,2), R = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

disındadır.

$x = -1$ üzerinde $f(-1,y) = 2 - y$ dir ve

$0 \leq y \leq 1$ için 2 max. değeri alır ve 1 min.

$x = 1$ üzerinde $f(1,y) = y - 2$ dir ve

$0 \leq y \leq 1$ -1 max. değeri alır.

ve -2 min. " "

$y = 0$ üzerinde $f(x,0) = -2x$ dir ve

$-1 \leq x \leq 1$ için 2 max. değeri alır

ve -2 min. " "

$$x, 1 - 2 \cdot x$$

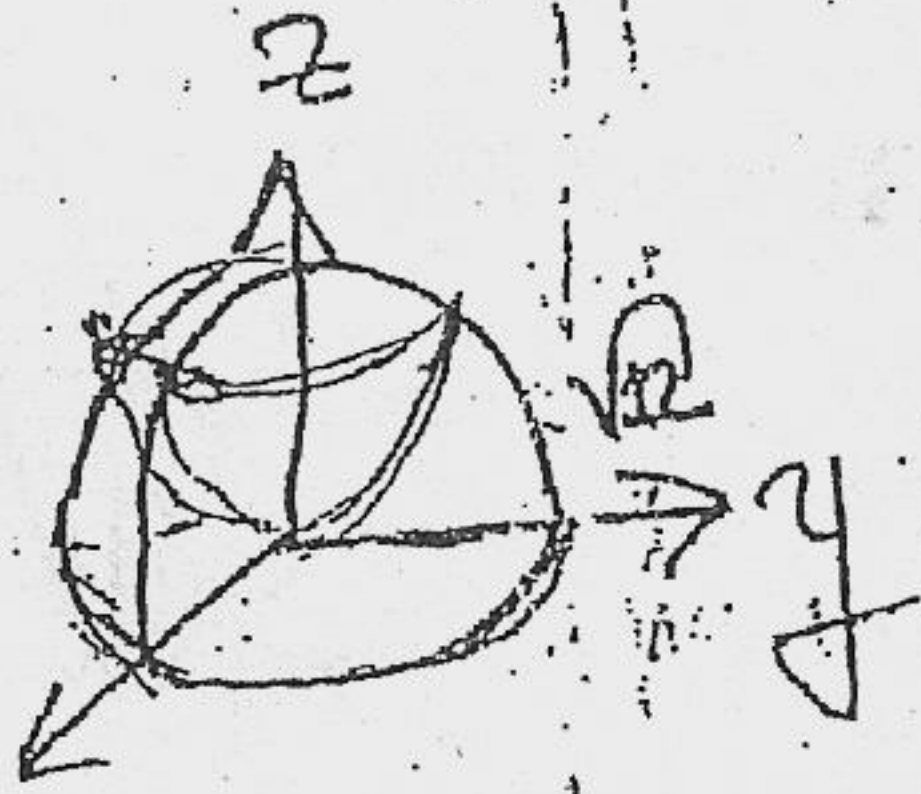
$y = 1$ üzerinde $f(x,1) = -x$ dir ve

$-1 \leq x \leq 1$ için 1 max. değeri alır

ve -1 min. değeri alır.

$$f(x,1) = -x$$

4. $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ küresinin içinde ve $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin üstünde kalan cismin hacmini bulunuz. (Şekil çiziniz)



$$V = \iiint_R dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{r^2}^{\sqrt{12-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$$

(silindirik koordinatlarla)

$$-4 + r^2 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = 16$$

$$r^2 = 3$$

$$r = \pm\sqrt{3}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (r\sqrt{12-r^2} - r^3) \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} (12-r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} d\theta$$

$$= \left(8\sqrt{3} - \frac{27}{4} \right) \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \left(8\sqrt{3} - \frac{27}{4} \right) \text{ birim}^3$$

5. $C: 4x^2 + y^2 = 4$ elipsi etrafında saat yönünün tersine olmak üzere,

$$\oint_C (e^x \sin y + 3y) dx + (e^x \cos y + 2x - 2y) dy = ?$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = (e^x \sin y + 3y) \vec{i} + (e^x \cos y + 2x - 2y) \vec{j}$$

$$\phi(x, y) = e^x \sin y + 2xy - y^2$$

$$I = \oint_C \nabla \phi \cdot d\vec{r} + \oint_C y \, dx$$

$$\text{komutenti} = 0$$

$$x = \cos t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$I = \oint_C y \, dx$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} \sin t \, dt$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt$$

Soru 1	Soru 2	Soru 3	Soru 4	Toplam

09.06.2007

Öğr. No ve Grubu:

Adı-Soyadı:

Not: HER SORU İÇİN TEK ŞIK CEVAPLANDIRILACAK AKSİ HALDE SORU DEĞERLENDİRİLMEMEYECİKTİR. (Süre:70 dk.)

1- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{n^2}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ fonksiyonunun en hızlı şekilde arttığı yönü ve bu yöndeki türevinin $(1,1,1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| < 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2x-5)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(2x-5)^n} \right| = |2x-5|$

$|2x-5| < 1 \rightarrow 2 < x < 3$

$x=2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
 $p=2 > 1$ Mutlak yakınsak

$x=3$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $p=2 > 1$ yakınsak

$2 < x < 3$

b) Fonksiyonun en hızlı arttığı ∇f vektörünün yönüdür.

$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$

Fonksiyonun bu yöndeki türevinin $(1,1,1)$ deki değeri ise

$\vec{u} = \nabla f / |\nabla f|$ olmak üzere

$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| |\vec{u}| \cos 0^\circ$

$|D_{\vec{u}} f| = |\nabla f| \left| \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right| = |\nabla f|$

$= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2\sqrt{3}$

$\nabla f = 0$
Tegallikler

$u = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$

max. dir. ∇f

$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{df}{dz} \frac{dz}{ds} = \nabla f \cdot \vec{u}$

$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u}$

2- a) $a \neq 0$ bir sabit olmak üzere, $w = f(s)$, $s = y + ax$ veriliyor.

Buna göre $\frac{\partial w}{\partial x} - a \frac{\partial w}{\partial y} = ?$

b) $\frac{z}{x} = f\left(\frac{y}{z}\right)$ olmak üzere $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

$$w = f(s)$$

$$s = y + ax$$

$$w = f(s(x,y))$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{df}{ds} a$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df}{ds} \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{df}{ds} \cdot 1$$

$$\frac{w}{\partial x} - a \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df}{ds} a - a \frac{df}{ds} = 0$$

$$\frac{z}{x} = f\left(\frac{y}{z}\right)$$

$$F = \frac{z}{x} - f\left(\frac{y}{z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z} = - \frac{-\frac{z}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{y}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_y}{F_z} = - \frac{-\frac{1}{z} f'\left(\frac{y}{z}\right)}{\frac{1}{x} + \frac{y}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right)}$$

$$x \frac{\frac{z}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{y}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right)} + y \frac{\frac{1}{z} f'\left(\frac{y}{z}\right)}{\frac{1}{x} + \frac{y}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right)}$$

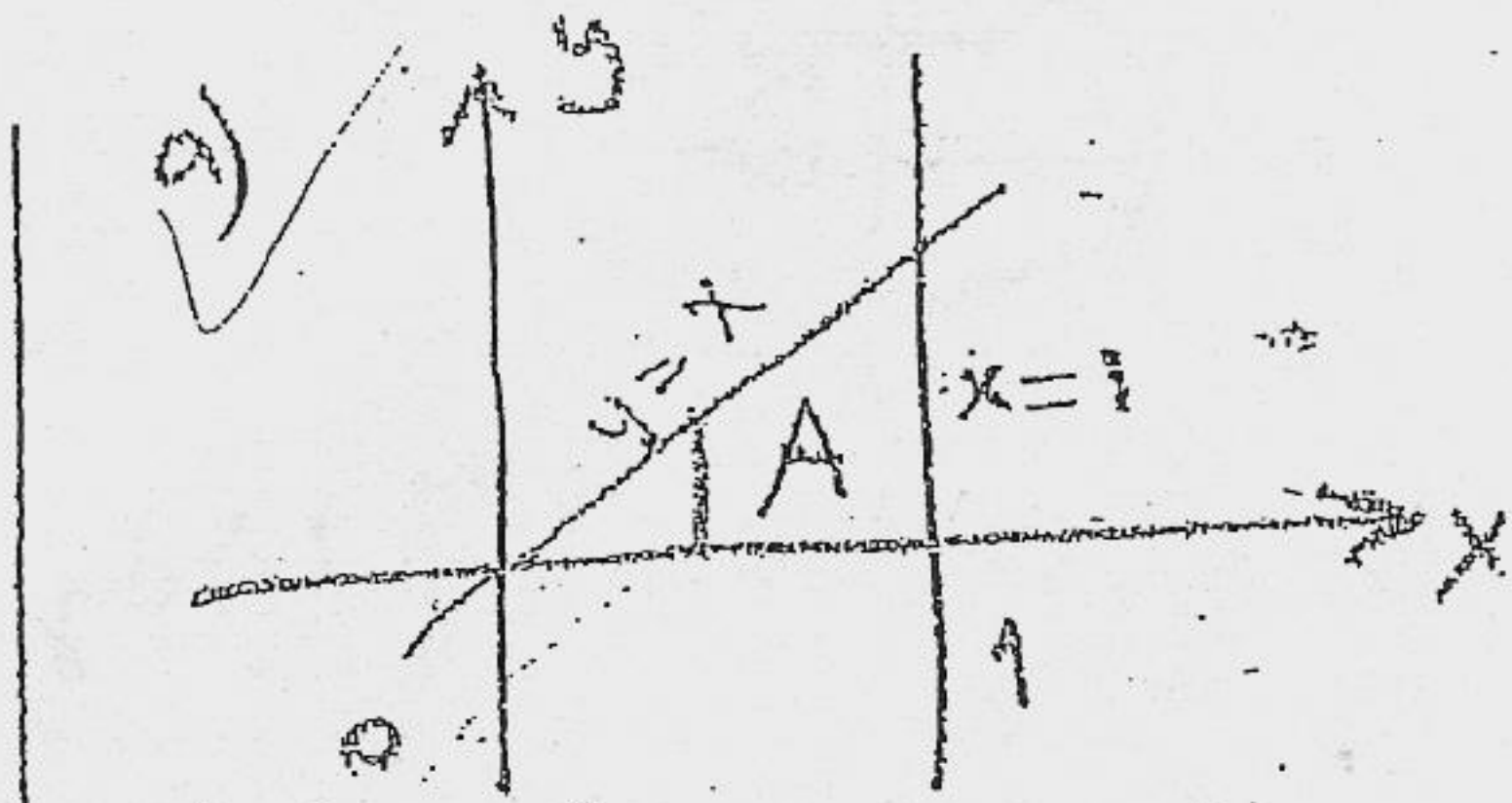
$$= \frac{\frac{z}{x} + \frac{y}{z} f'\left(\frac{y}{z}\right)}{\frac{1}{x} + \frac{y}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right)}$$

$$= \frac{z \left(\frac{1}{x} + \frac{y}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right) \right)}{\frac{1}{x} + \frac{y}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right)} = z$$

3- a) A bölgesi xy - düzlemi x - eksen, $y = x$, $x = 1$ ---

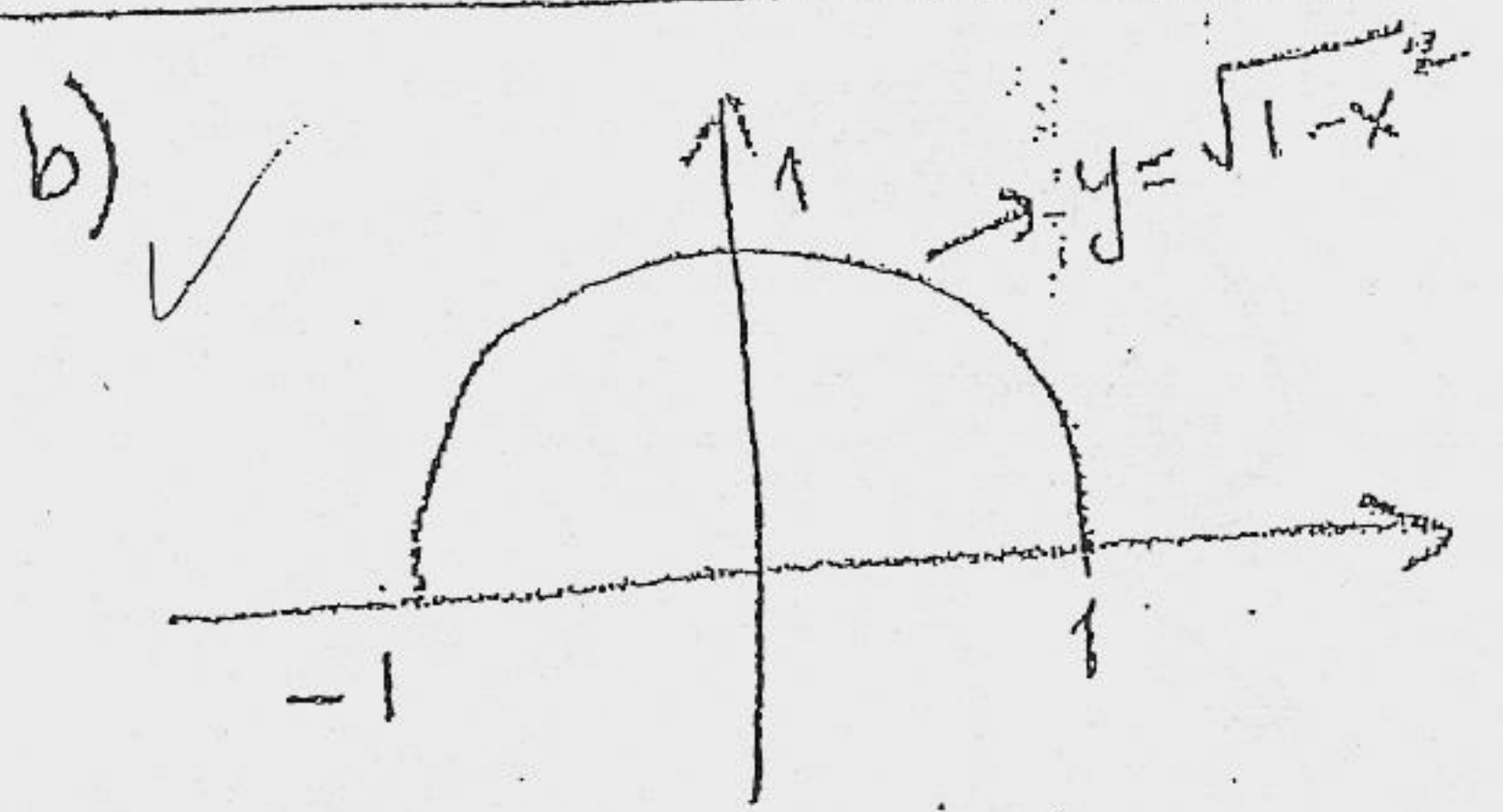
sınırlı bir bölge olmak üzere $\iint_A \frac{\sin x}{x} dA$ integralini hesaplayınız.

b) A bölgesi, x - eksen ve $y = \sqrt{1-x^2}$ eğrisi ile sınırlı bir bölge olmak üzere $\iint_A e^{x^2+y^2} dA$ integralini hesaplayınız.



$$\begin{aligned} \iint_A \frac{\sin x}{x} dA &= \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy dx \\ &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \cdot y \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \cdot x dx \\ &= \left(-\cos x \right) \Big|_0^1 = 1 - \cos 1 \end{aligned}$$

✓



Kutupsal ile çözelim:

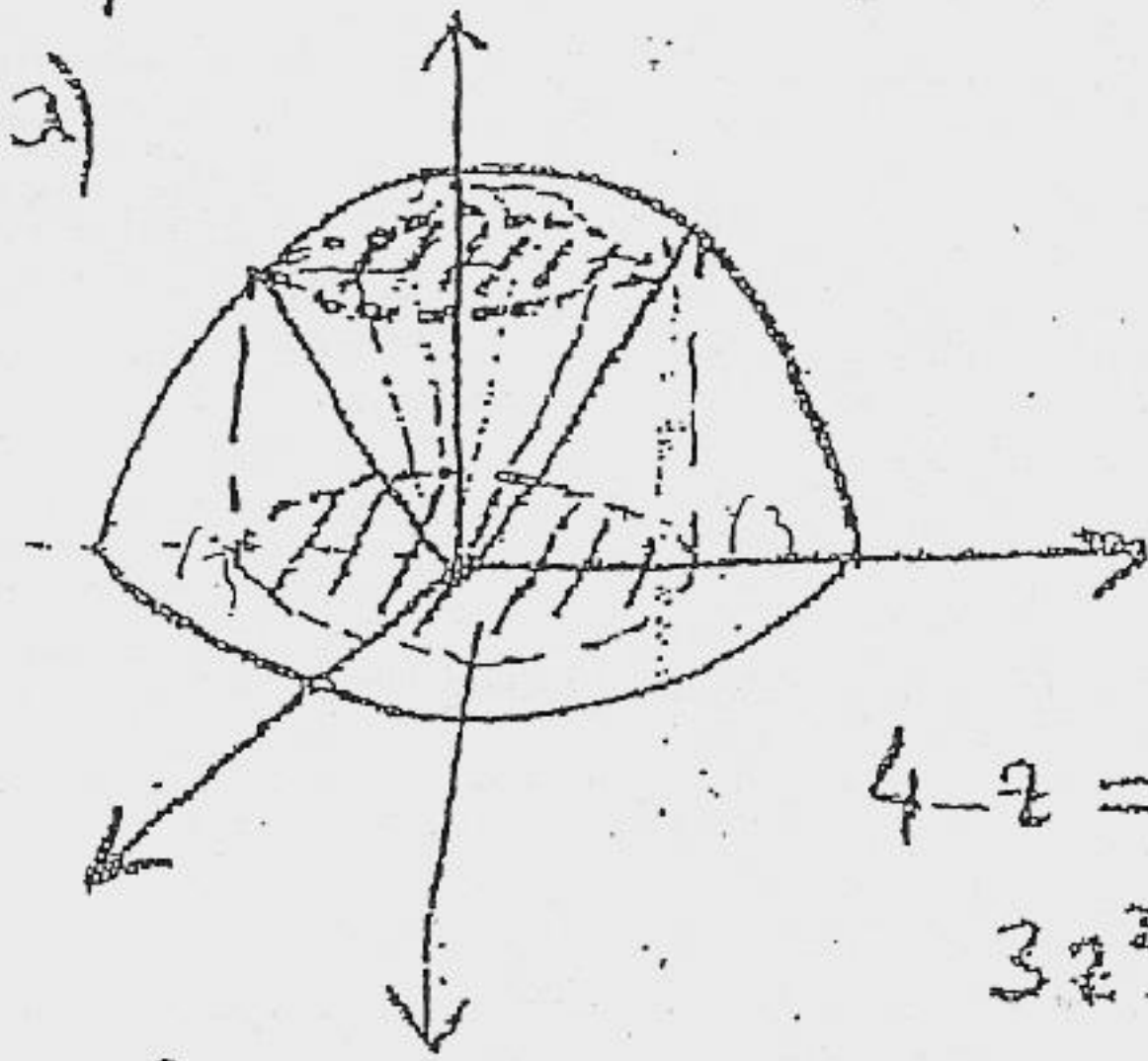
$$\begin{aligned} \iint_A e^{x^2+y^2} dA &= \int_0^{\pi} \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(e^{r^2} \right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{e-1}{2} \cdot (\theta) \Big|_0^{\pi} \\ &= \left(\frac{e-1}{2} \right) \pi \end{aligned}$$

$e^{r^2} \cdot r dr$
 $\frac{1}{2} \frac{d}{dr} e^{r^2}$

4- a) $x^2 + y^2 = 4 - z$ ile $3z^2 = x^2 + y^2$ yüzeylerinin sınırladığı cismin hacmini üç katlı integral ile silindirik koordinat dönüşümünü kullanarak hesaplayınız.

b) C eğrisi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ olmak üzere $\oint_C (3y + \sin 5x) dx + (e^{2y} + 2x) dy$

eğrisel integralini Green Teoremini kullanarak hesaplayınız.



$$4 - z = 3z^2$$

$$3z^2 + z - 4 = 0$$

$$z = 1$$

$$D: x^2 + y^2 = 3$$

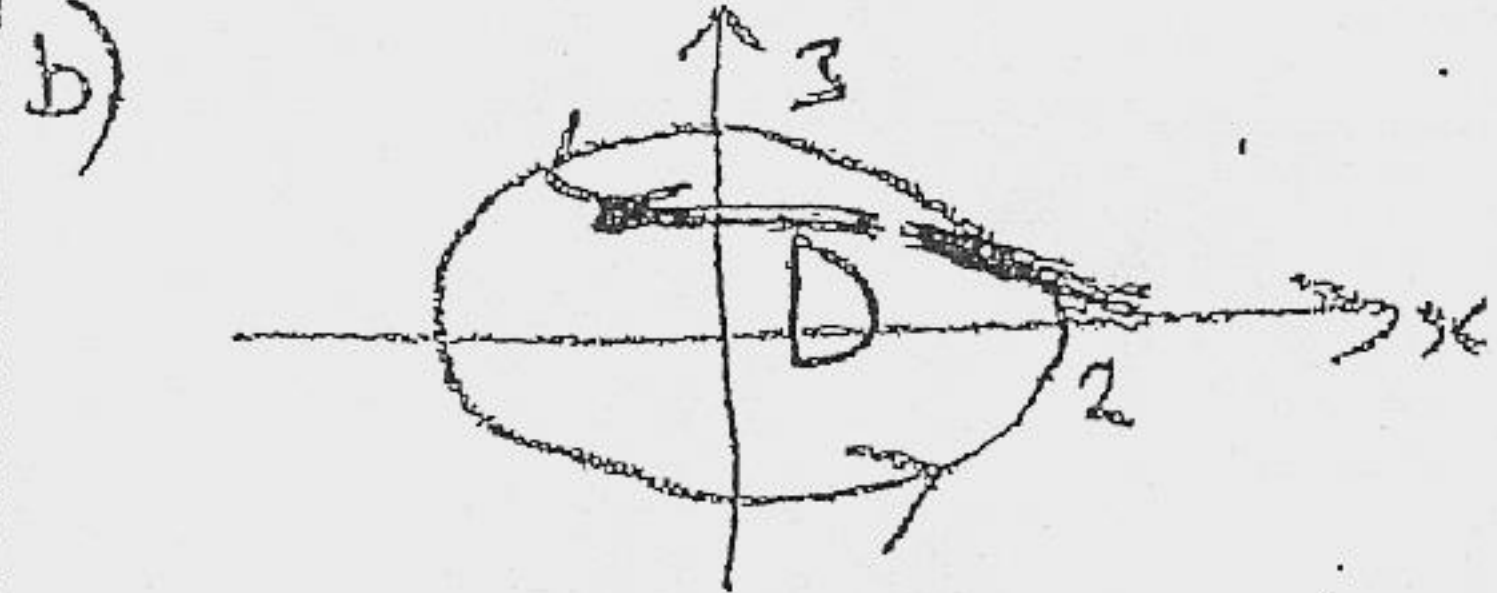
$$\iiint_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{4-r^2} r dz dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} r \left(4 - r^2 - \frac{r}{\sqrt{3}} \right) dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3\sqrt{3}} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} d\theta$$

$$= \left(6 - \frac{9}{4} - 1 \right) 2\pi$$

$$= \frac{11}{2} \pi$$



$$\oint_C (3y + \sin 5x) dx + (e^{2y} + 2x) dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (e^{2y} + 2x) - \frac{\partial}{\partial y} (3y + \sin 5x) \right) dx dy$$

$$= \iint_D (2 - 3) dx dy = - \iint_D dx dy$$

$$= - (\text{ellipsin alanı})$$

$$= - \pi \cdot 2 \cdot 3 = -6\pi$$

Numara:
Ad-Soyad:
Bölüm/Grup:

09.06.2007

1	2	3	4

NOT: TEK SIK CEVAPLANDIRILACAKTIR. SÜRE: 70 dk.

YTÜ 2006-2007 Öğretim Yılı Bahar Dönemi
0251322 kodlu Matematik II Dersi Genel Sınavı

- 1) a) $\int \ln(1-\sqrt{x}) dx = ?$
b) $f(z+x) + zy(z+x) = 0$ kapalı denklemi ile verilmiş
 $x = h(z, y)$ fonksiyonunun

$$z \frac{\partial x}{\partial z} - y \frac{\partial x}{\partial y} + z = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

$$a) \int \ln(1-\sqrt{x}) dx = x \ln(1-\sqrt{x}) + \int \frac{x}{2\sqrt{x}-2x^2} dx$$

$$\ln(1-\sqrt{x}) = u$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$$

$$dx = dv \Rightarrow x = v$$

$$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t}$$

$$\frac{1}{2t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= x \ln(1-\sqrt{x}) - \frac{t^2}{2} - t - \ln(1-t) + C$$

$$= x \ln(1-\sqrt{x}) - \frac{x}{2} - \sqrt{x} - \ln(1-\sqrt{x}) + C$$

2) a) $F(x, y, z) = ye^{\sin x} + x \ln 2z^3$ fonksiyonunun $P_1(0, -1, 1)$ noktasını

$P_2(2, 1, 0)$ noktasına birleştiren $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörü doğrultusundaki türevinin P_1 noktasındaki değerini bulunuz.

b) $f(x, y) = 2x^3 + (x - y)^2 - 6y$ fonksiyonunun kritik noktalarını sınıflandırınız.

$$a) \overrightarrow{P_1P_2} = (2-0)\vec{i} + (1-(-1))\vec{j} + (0-1)\vec{k} \\ = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \quad \checkmark \quad (5)$$

$$\nabla F = (y \cos x e^{\sin x} + \ln 2z^3)\vec{i} + e^{\sin x}\vec{j} + x \cdot \frac{6z^2}{2z^3}\vec{j}$$

$$= (y \cos x e^{\sin x} + \ln 2z^3)\vec{i} + e^{\sin x}\vec{j} + \frac{3x}{z}\vec{j} \quad (5)$$

$$\nabla F|_{P_1} = (-1 + \ln 2)\vec{i} + \vec{j} \quad (5)$$

$$D_{\overrightarrow{P_1P_2}} F|_{P_1} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \cdot \nabla F = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{4+4+1}} \cdot [(-1 + \ln 2)\vec{i} + \vec{j}] \\ = \frac{-2 + 2 \ln 2 + 2}{3} = \frac{2}{3} \ln 2 \quad (5)$$

$$b) \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 2(x - y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2(x - y) - 6 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 4$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 2$$

$$A(1, 4) \quad B(-1, 2)$$

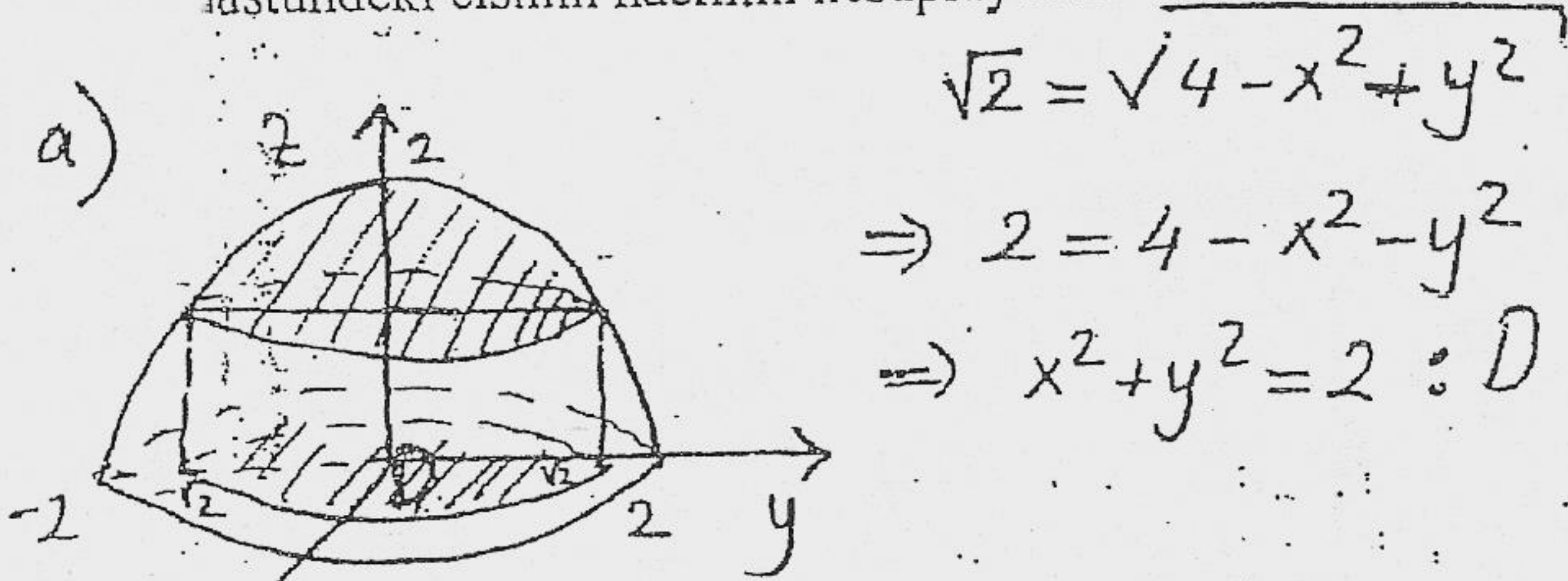
$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$(5)$$

3) a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ve $z \geq \sqrt{2}$ yüzeyleri arasında kalan cismin hacmini bulunuz.

4

b) $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin altında ve xy düzleminde $y = x$, $x = 0$ ve $x + y = 2$ doğruları ile sınırlanan üçgen bölgenin üstündeki cismin hacmini hesaplayınız.



$$\sqrt{2} = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow 2 = 4 - x^2 - y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2 : D$$

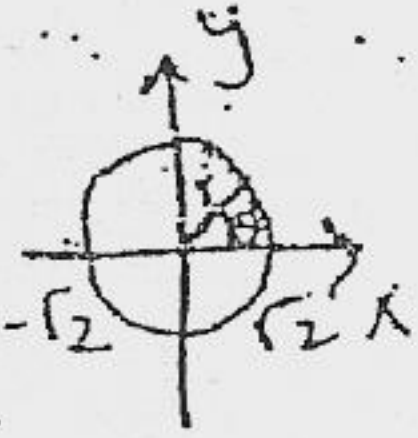
$$V = \iint_D (\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \sqrt{2}) dx dy$$

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho$$

$$4 - \rho^2 = t^2 \Rightarrow \rho d\rho = -t dt$$



$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{4 - \rho^2} - \sqrt{2}) \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - \rho^2} \rho d\rho d\theta - \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} t \cdot (-t dt) d\theta - \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} t^2 dt d\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} (2 - 0) \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta - \sqrt{2} \theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{8}{3} \theta \Big|_0^{2\pi} - \sqrt{2} (2\pi - 0) \Rightarrow V = \frac{16\pi - 2\sqrt{2}\pi}{3}$$

4) a) $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y} dy dx = ?$

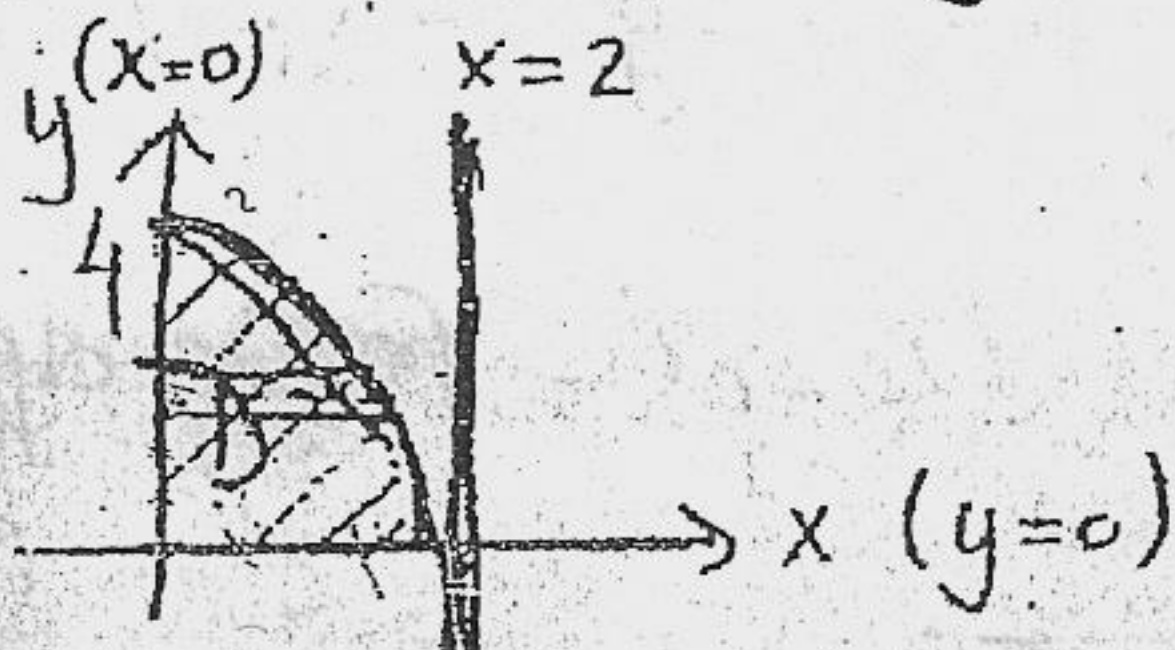
b) R bölgesi $y = x, y = 2x$ ve $x+y=2$ doğrularıyla sınırlı bölge olmak üzere

$$\iint_R xy dA$$

integralini hesaplayınız.

a) $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y} dy dx$

D: $x=0, x=2, y=0, y=4-x^2$



$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x e^{2y}}{4-y} dx dy = \int_0^4 \frac{x^2}{2} \left(\frac{e^{2y}}{4-y} \right) \Big|_0^{\sqrt{4-y}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{(4-y) e^{2y}}{4-y} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2y} \Big|_0^4 \\ &= \frac{e^8 - 1}{4} \end{aligned}$$

