

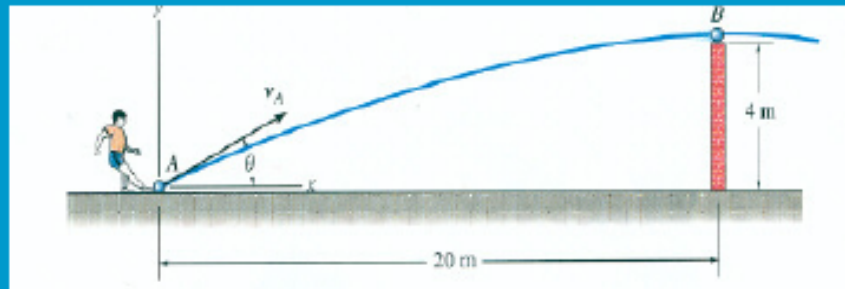
ATIŞ HAREKETLERİ
(EĞRİSEL HAREKET)

ATIŞ HAREKETLERİ (12.6)

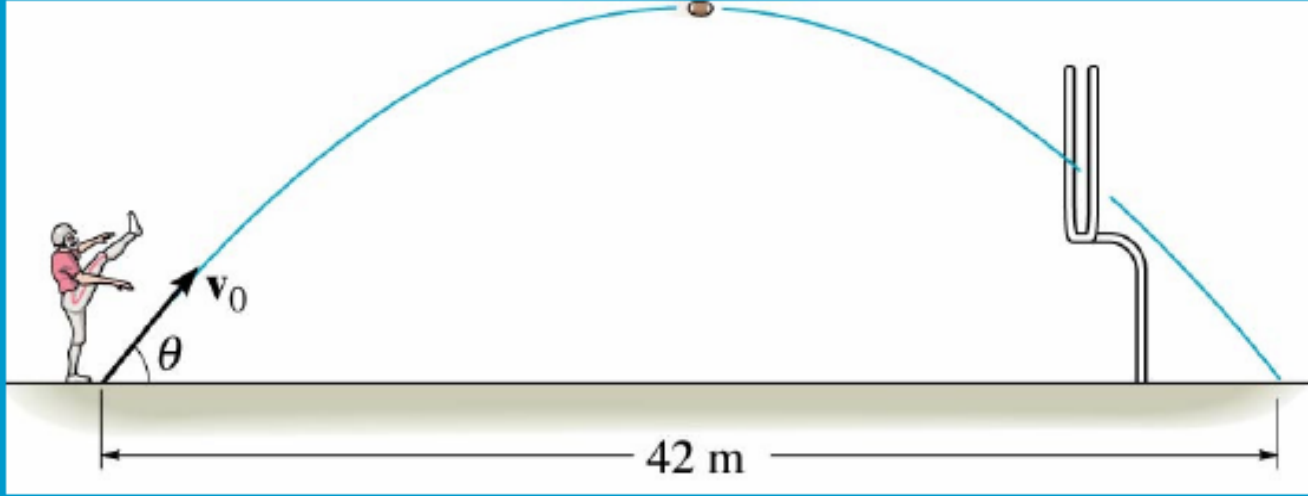
KONU:

Yerçekimi etkisindeki atış hareketlerinin analizlerinin yapılması.

- Uygulamalar
- Atış hareketlerinin kinematik denklemleri
- Problem çözümü
- Quiz



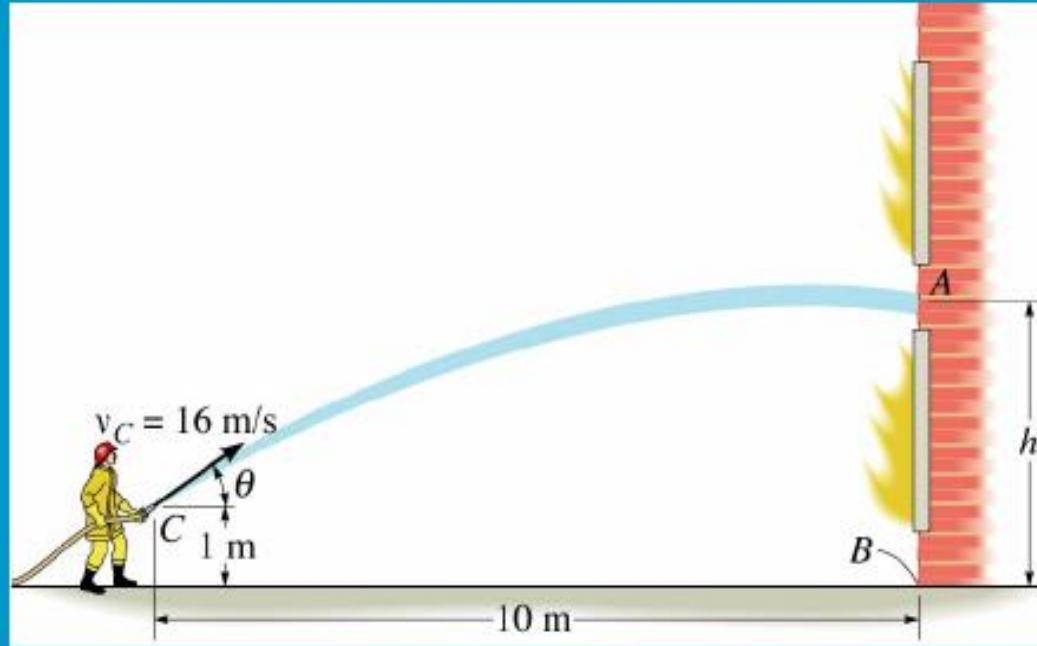
Uygulamalar



Şekildeki oyuncunun topu kaleden atabilmesi için hangi açıyla ve ilk hızla vurması gereklidir.

Eğer vurma şiddeti biliniyorsa, topun en uzak mesafeye gitmesi için vuruş açısı ne olmalıdır.

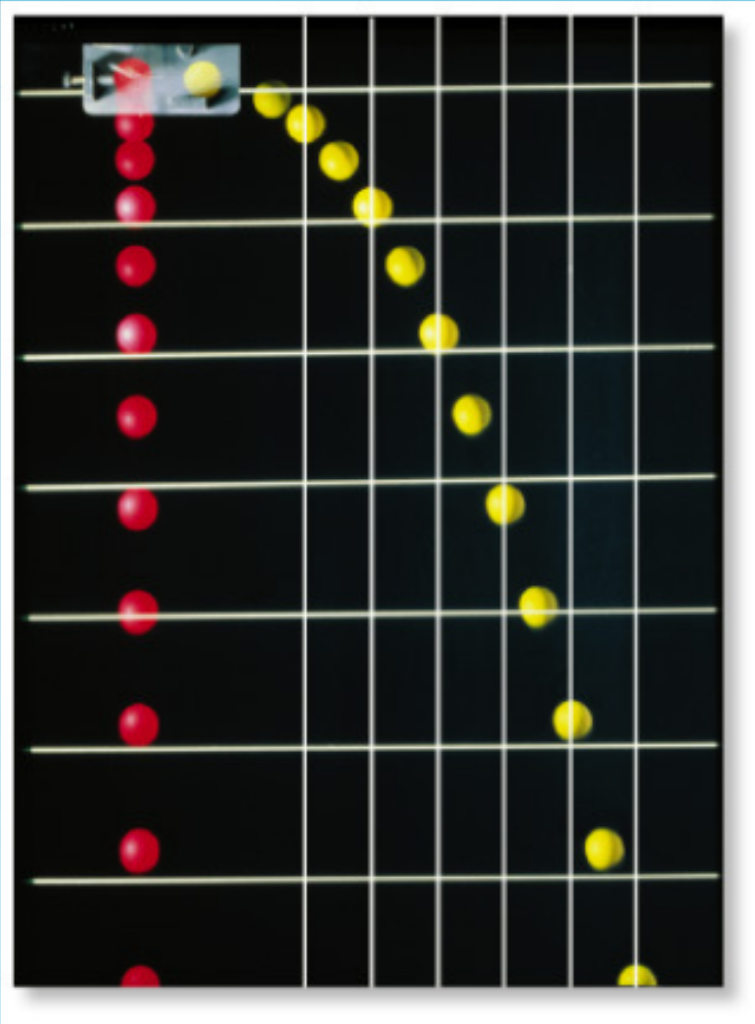
Uygulamalar



İtfaiyeci duvarda suyun en yüksek noktaya fırlatabilmesi için gerekli olan θ açısını bilmek istiyor.

ATIŞ HAREKETİ

Atış hareketinin iki bileşeni vardır; yatay yöndeki hareket (ivme sıfır), düşey yöndeki hareket (sabit ivme=yerçekimi ivmesi)



Yandaki şekilde iki ayrı cisim aynı noktadan harekete başlamaktadır. Kırmızı cisim serbest bırakılmıştır. Sarı cismin ise yatay yönde bir ilk hızı vardır. Düşey yönde cisimlerin hareketi incelendiğinde aynı zaman aralığında her ikisinin de aynı yükseklikte olduğu görülmektedir. Başlangıçta her ikisinin de düşey yöndeki hızı sıfır iken herhangi bir anda düşey hızları aynıdır. Yatay yönde kırmızı cisimde bir hareket yok. Sarı cisimde ivme yok sabit ilk hızla yatay yönde hareket etmektedir.



SERBEST DÜŞME



O ile B arasında

$V_0=0$ (Serbest Düşme)

$$h = \frac{1}{2} * g * t^2$$

$$V_B = g * t$$

$$V_B = (2gh)^{\frac{1}{2}}$$

A ile B arasında

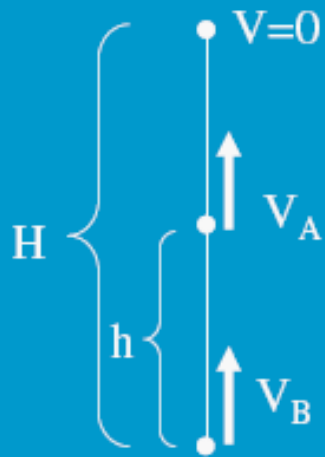
$V_0 \neq 0$ (Aşağıya doğru düşey atış)

$$h_{AB} = V_A * t + \frac{1}{2} * g * t^2$$

$$V_B = V_A + g * t$$

$$(V_B)^2 = (V_A)^2 + 2gh$$

YUKARIYA DOĞRU DÜŞEY ATIŞ



B ile A arasında

$$h_{BA} = V_B * t - \frac{1}{2}g * t^2$$

$$V_A = V_B - g * t$$

$$(V_A)^2 = (V_B)^2 - 2gh$$

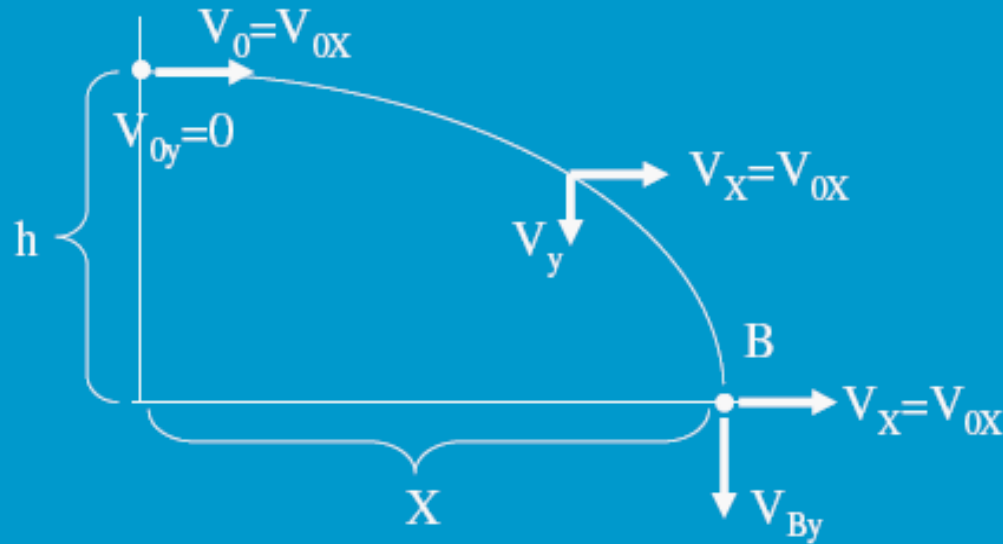
B ile O arasında

$$H = V_B * t - \frac{1}{2} * g * (t_1)^2$$

$$V_B = g * (t_1)$$

$$V_B = (2gH)^{\frac{1}{2}}$$

YATAY ATIŞ



O ile B arasındaki düşey hareket denklemi

$$h = \cancel{V_{0y}} * t + \frac{1}{2} * g * t^2$$

$$h = \frac{1}{2} * g * t^2$$

$$V_{By} = \cancel{V_{0y}} + g * t = g * t$$

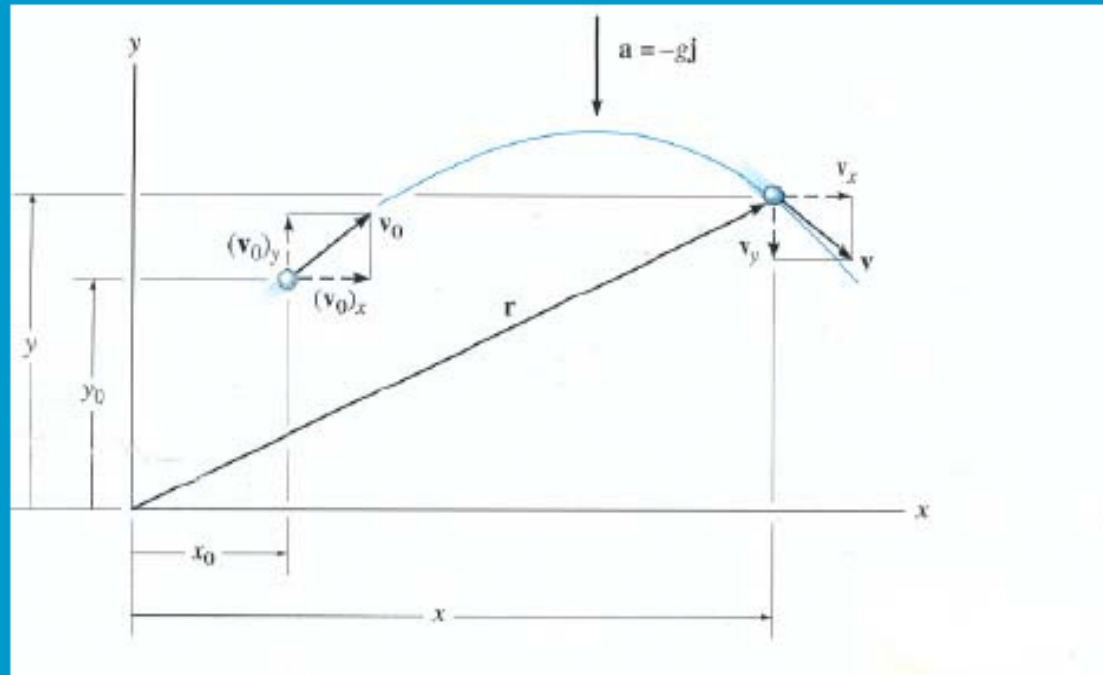
$$(V_{By})^2 = (\cancel{V_{0y}})^2 + 2gh$$

$$V_{By} = (2gh)^{\frac{1}{2}}$$

O ile B arasındaki yatay hareket

$$X = V_{0x} * (t)$$

Eğik Atış Hareketi için Kinematik Denklemler



Yatay yönde ivme $a_x = 0$, sabit hızla hareket etmekte ($v_x = v_{0x}$) ve yatay yönde cismin aldığı yol:

$$x = x_0 + (v_{0x})(t)$$

Yatay yöndeki ivme değeri a_x neden sıfır alınacak (havadaki hareket)?



Düşey Hareket için kinematik denklemler

Yukarıya doğru uzanan y eksenini pozitif yön olarak kabul edilirse $a_y = -g$, bu ifade kullanılarak sabit ivme ile denklemler yazılırsa:

$$v_y = v_{oy} - g(t)$$

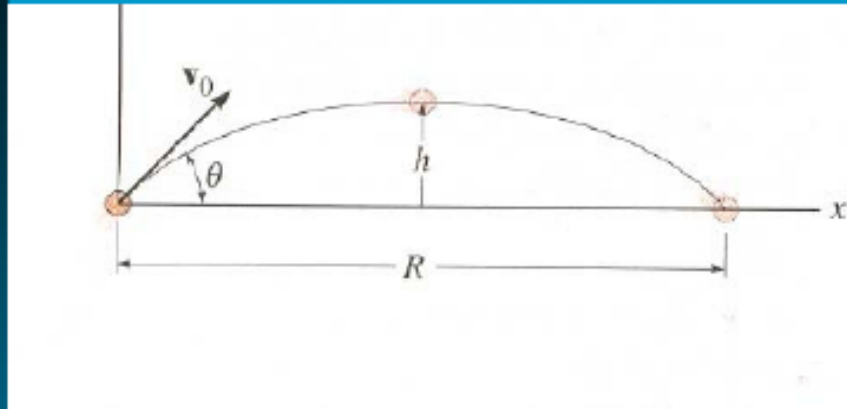
$$y = y_o + (v_{oy})(t) - \frac{1}{2}g(t)^2$$

$$v_y^2 = v_{oy}^2 - 2g(y - y_o)$$

Bu denklemler tüm atış hareketleri için kullanılacaktır



Örnek 1



Verilenler: v_0 ve θ

İstenenler: Düşey yöndeki yükseklik y 'yi yatay yöndeki mesafe x cinsinden yazınız.

Plan: Denklemleri zamandan bağımsız olarak yazalım.

Çözüm: Yatay yönde $v_x = v_0 \cos \theta$ ve $v_y = v_0 \sin \theta$

$$x = (v_0 \cos \theta)t \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

$$y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2} g(t)^2$$

$$y = (v_0 \sin \theta) \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right) - \left(\frac{g}{2} \right) \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2$$



Example 1 (continued):

Denklem sadeleştirilerek yazılırsa:

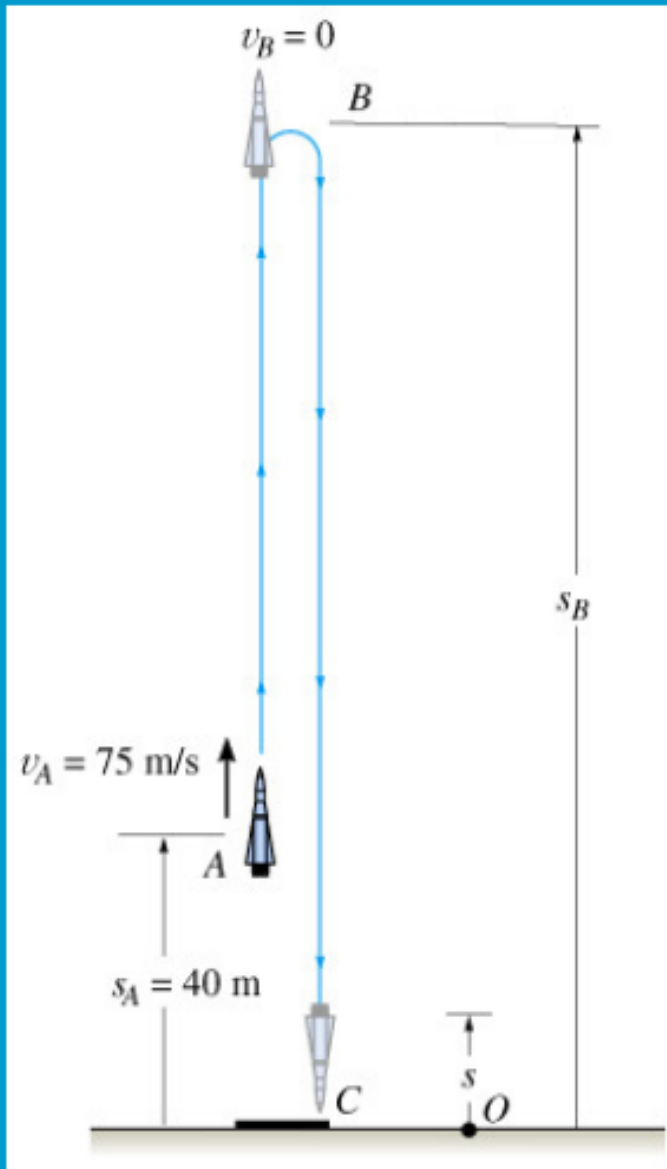
$$y = (x \tan\theta) - \left(\frac{g x^2}{2v_o^2} \right) (1 + \tan^2\theta)$$

Yukarıdaki denklem yörünge denklemi olarak adlandırılır. Bu denklem atış hareketi yapan cismin yörüngesini ifade eder.

Bu denklem matematiksel olarak hangi şekli ifade etmektedir?

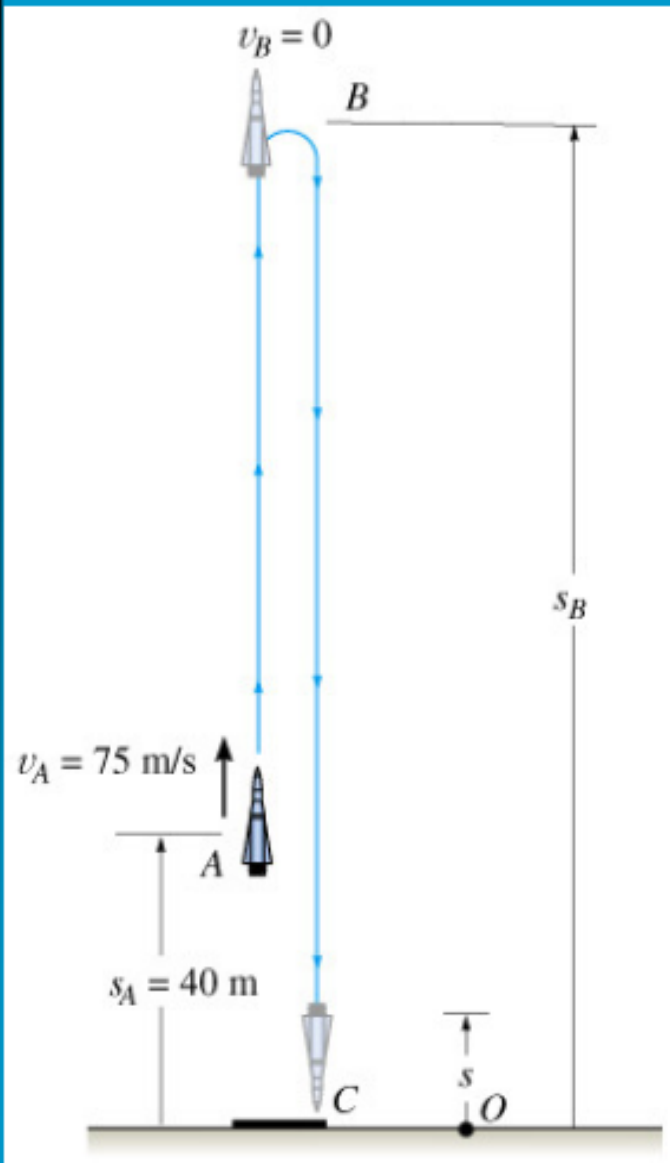


Örnek



C noktasındaki fırlatma rampasından fırlatılan roketin yerden 40 metre yükseklikteki A noktasındaki hızı 75 m/sn olarak ölçülmüştür. Bu noktada roketin motorları durduğuna göre roketin çıkacağı en yüksek noktanın yerden yüksekliğini ve tekrar yere düştüğü andaki hızını bulunuz.





A ile B noktaları arasındaki hareket için zamansız hız formülü yazılırsa

$$v_B^2 = v_A^2 + 2a_c(s_B - s_A)$$

$$0 = (75 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(s_B - 40 \text{ m})$$

$$s_B = 327 \text{ m}$$

B noktasında cismin hızı sıfırdır. Bu noktadan sonra cisim serbest düşme hareketi yapacaktır.

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad 327 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot t^2 \quad t = 8.165 \text{ sn}$$

$$V = g \cdot t = 9.81 \cdot 8.165 = 80.1 \text{ m/s}$$

B ile C noktaları arasındaki hareket için zamansız hız formülü yazılırsa

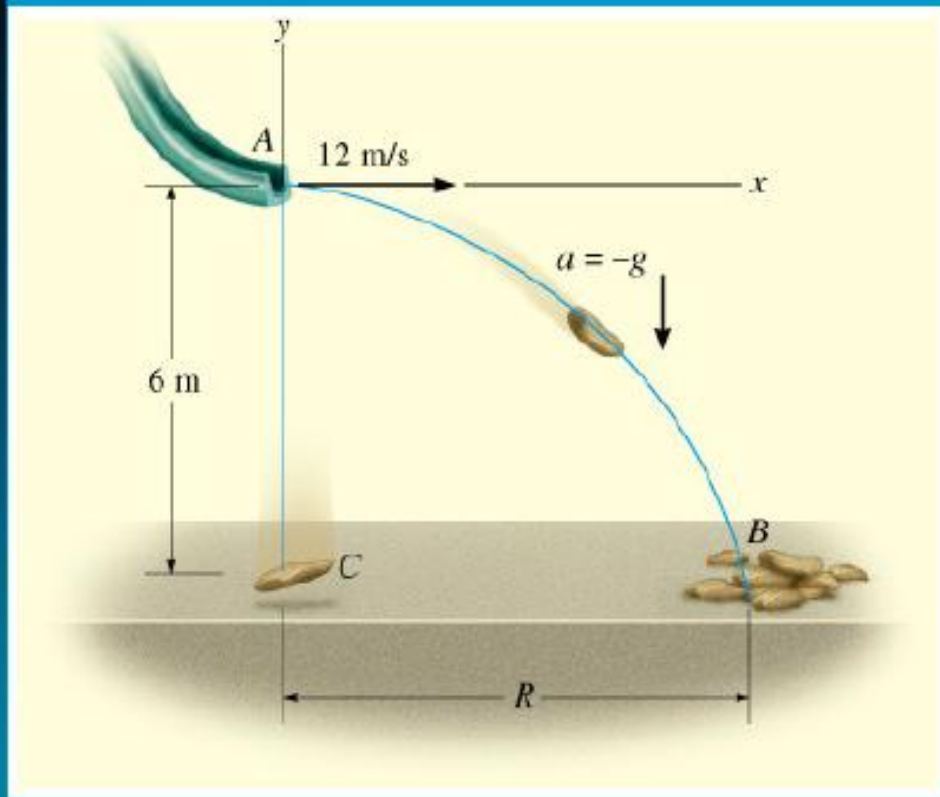
$$v_C^2 = v_B^2 + 2a_c(s_C - s_B)$$

$$= 0 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(0 - 327 \text{ m})$$

$$v_C = -80.1 \text{ m/s} = 80.1 \text{ m/s} \downarrow$$

Örnek

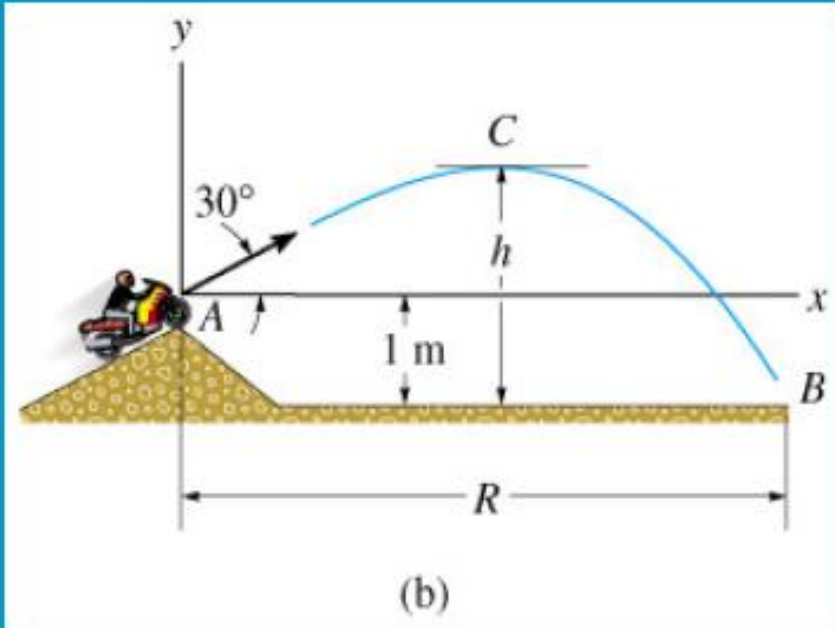
Yandaki depolama tesisine mal getiren düzenekte, yerden 6 metre yükseklikteki A noktasından yatay hızı 12 m/sn olarak fırlatılan cisimlerin havada kalma süresi t ve düşme uzaklığı R 'yi hesaplayınız.



$$\begin{aligned} (+ \uparrow) \quad y &= y_0 + (v_0)_y t_{AB} + \frac{1}{2} a_c t_{AB}^2 \\ -6 \text{ m} &= 0 + 0 + \frac{1}{2} (-9.81 \text{ m/s}^2) t_{AB}^2 \\ t_{AB} &= 1.11 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\pm \rightarrow) \quad x &= x_0 + (v_0)_x t_{AB} \\ R &= 0 + 12 \text{ m/s} (1.11 \text{ s}) \\ R &= 13.3 \text{ m} \end{aligned}$$

Örnek



Şekildeki gibi engellerin üzerinden atlamaya çalışan motosikletlinin A noktasından B noktasına düşünceye kadar havada kalış süresi 1.5 sn 'dir. Buna göre bu motosikletlinin A noktasındaki hızını ve yükselebileceği en büyük yüksekliği (C noktasında) bulunuz.



$$\begin{aligned}
 (+ \uparrow) \quad (s_B)_y &= (s_A)_y + (v_A)_y t_{AB} + \frac{1}{2} a_c t_{AB}^2 \\
 -1 &= 0 + v_A \sin 30^\circ (1.5) + \frac{1}{2} (-9.81) (1.5)^2 \\
 v_A &= 13.38 \text{ m/s} = 13.4 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\pm \rightarrow) \quad (s_B)_x &= (s_A)_x + (v_A)_x t_{AB} \\
 R &= 0 + 13.38 \cos 30^\circ (1.5) \\
 &= 17.4 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (v_C)_y^2 &= (v_A)_y^2 + 2a_c[(s_C)_y - (s_A)_y] \\
 (0)^2 &= (13.38 \sin 30^\circ)^2 + 2(-9.81)[(h - 1) - 0] \\
 h &= 3.28 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$(v_B)_x = 11.6 \text{ m/s} \rightarrow, \quad (v_B)_y = 8.02 \text{ m/s} \downarrow$$

Örnek 2

Verilenler: Şekildeki sporcu 15 m/s ilk hızla A'dan atlamaktadır.

İstenenler: Yatay yönde alınan mesafe (R) ve havada uçuş süresini bulunuz.

Çözüm :

İlk olarak koordinat sistemi tanımlanır ve A'nın yeri belirlenir. Sonra yatay yönde hareket denklemi yazılır.

$$\rightarrow + \quad x_B = x_A + v_{Ax} t_{AB} \quad \text{and} \quad v_{Ax} = 15 \cos 40^\circ \text{ m/s}$$

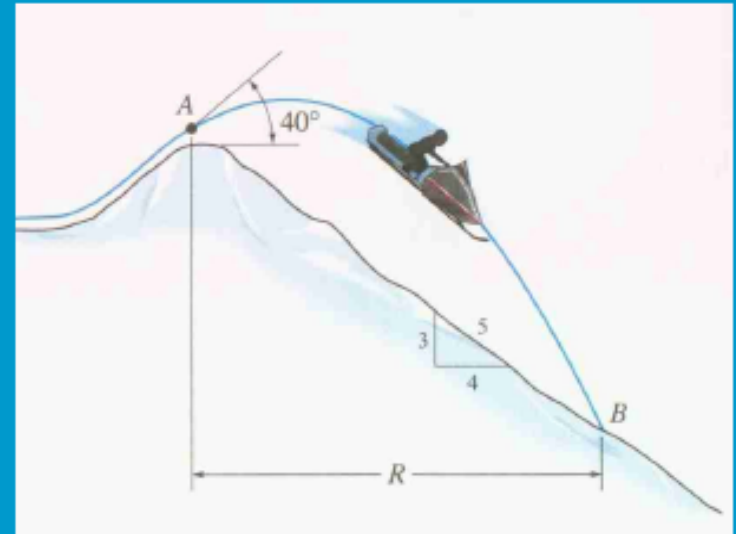
Düşey yönde hareket denklemi yazılır.

$$\uparrow + \quad y_B = y_A + v_{Ay} t_{AB} - 0.5 g_c t_{AB}^2 \quad v_{Ay} = 15 \sin 40^\circ \text{ m/s}$$

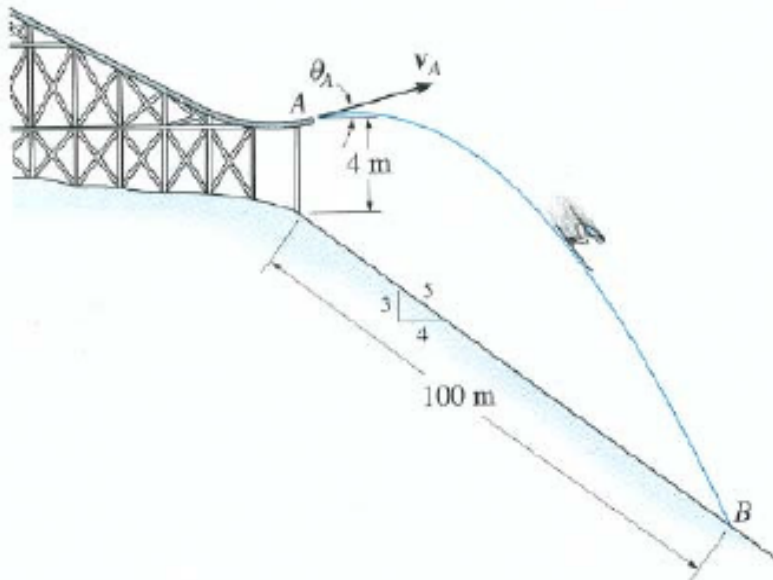
$$x_B = R, \quad x_A = 0, \quad y_B = -(3/4)R, \text{ ve } y_A = 0.$$

Bu iki denklem çözülerek iki bilinmeyen hesaplanır

$$R = 19.0 \text{ m} \quad t_{AB} = 2.48 \text{ s}$$



GROUP PROBLEM SOLVING



Verilenler: Atlayıcı rampadan $\theta_A = 25^\circ$ açı ile atlayarak B noktasına düşüyor.

İstenenler: Başlangıç hızı $v_A = ?$

Plan: Koordinat sisteminin başlangıcı A noktası seçilerek yatay ve düşey yöndeki hareketler için ayrı ayrı denklemler yazılır. X ve y yönünde yazılan hareket denklemleri yardımıyla istenenler hesaplanabilir.



GRUP PROBLEM ÇÖZÜMÜ

ÇÖZÜM

x-yönünde hareket denklemi:

$$x_B = x_A + v_{ox}(t_{AB})$$

$$t_{AB} = \frac{(4/5)100}{v_A (\cos 25)} = \frac{88.27}{v_A}$$

y-yönünde hareket denklemi:

$$y_B = y_A + v_{oy}(t_{AB}) - \frac{1}{2} g(t_{AB})^2$$

$$-64 = 0 + v_A (\sin 45) \left(\frac{80}{v_A (\cos 25)} \right) - \frac{1}{2} (9.81) \left(\frac{88.27}{v_A} \right)^2$$

$$\underline{v_A = 19.42 \text{ m/s}}$$



EĞRİSEL HAREKET :

Normal ve Teğetsel Bileşenler

EĞRİSEL HAREKET: NORMAL VE TEĞERSEL BİLEŞENLER (12.7)

Bugünkü konular:

Bir eğri boyunca hareket eden cisimlerin hız ve ivme değerleri için normal ve teğetsel bileşenlerinin bulunması



- Uygulamalar
- İvme ve hız için normal ve teğetsel bileşenlerinin bulunması
- Eğrisel hareket için özel durumlar
- Grup problem çözümü
- Quiz



UYGULAMALAR



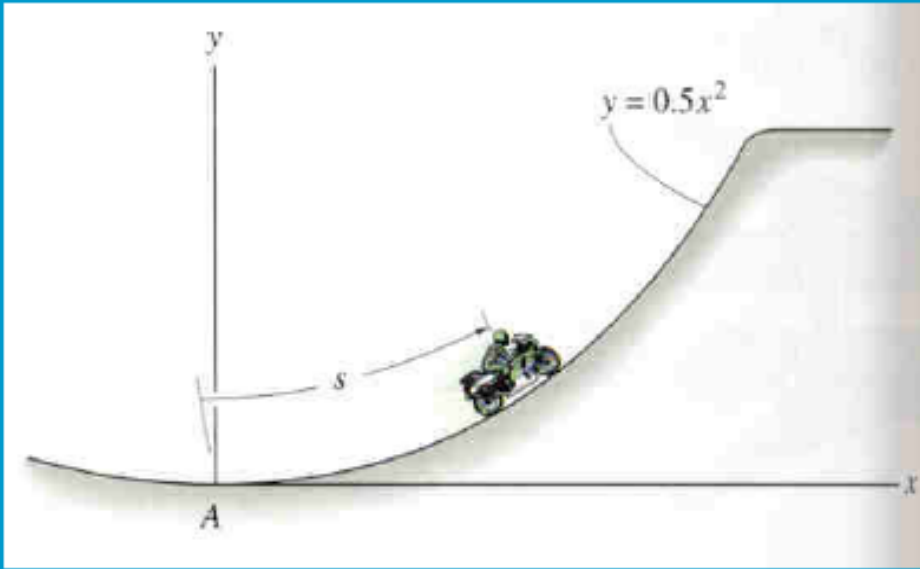
Şekildeki kavşaklarda hareket eden Cisimlerin genel olarak ivme ve hız değerleri sürekli değişmektedir. Ayrıca hızın doğrultusu da değişmektedir.

Şekildeki eğriler üzerinde hareket eden bir aracın hız değişimi bilindiğine göre, cismin toplam ivme değerini ve yönünü hesaplayabilir miyiz?

Aracın toplam ivme değerine neden ihtiyaç duyulmaktadır?



UYGULAMALAR



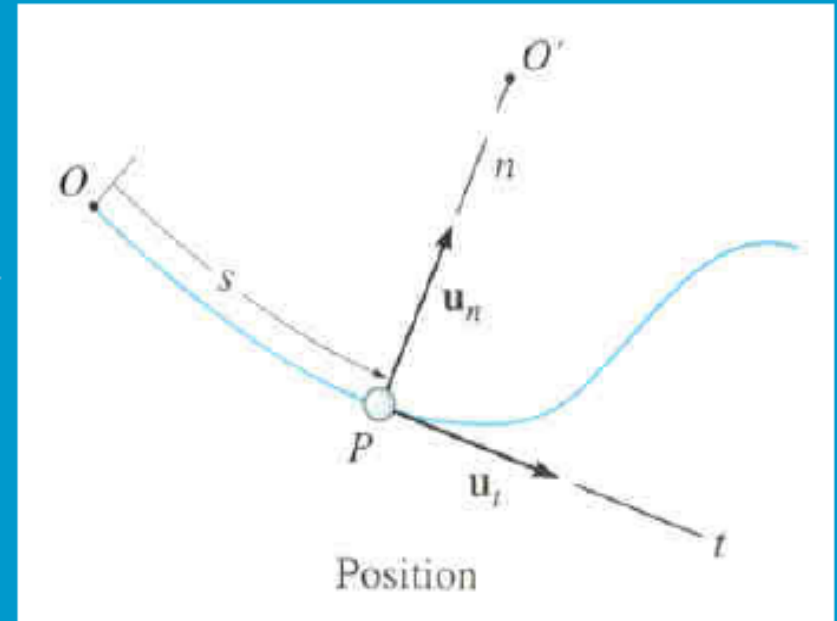
Şekildeki motosikletli eğrisel bir yüzey üzerinde tepeye tırmanmaktadır. Yüzeyin denklemi $y = f(x)$ şeklinde bilinmektedir.

Eğer bu aracın başlangıçtan itibaren hızını sabit bir oranda arttırdığı biliniyorsa, tepe noktasında cismin sahip olduğu hız ve ivme değerlerini nasıl hesaplayabiliriz?

Motosikletin tepeden uçuşunu nasıl analiz edebiliriz ?

NORMAL ve TEĞETSEL BİLEŞENLER

Eğri üzerinde hareket eden cisimlerin hareket denklemlerini tanımlamak için bazen normal koordinat sistemi bazen de kartezyen koordinat sistemi kullanılabilir. Eğer hareketin izlediği eğri biliniyorsa, genellikle **normal (n)** ve **teğetsel (t)** koordinatlar hareketin tanımlanması için kullanılır.



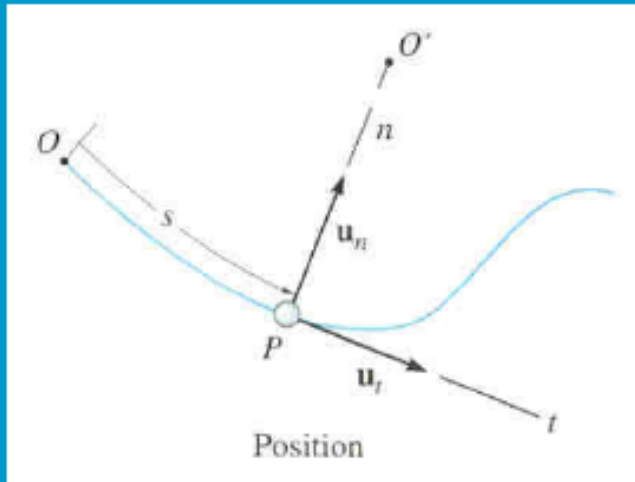
n-t koordinat sisteminde, koordinat merkezi cisimdir (yani koordinat merkezi cisimle birlikte yer değiştirir).

t-ekseni teğetsel bileşeni ifade eder ve her noktada eğriye çizilen teğet doğrultusundadır. Pozitif yönü hareketin ilerlediği yöndür.

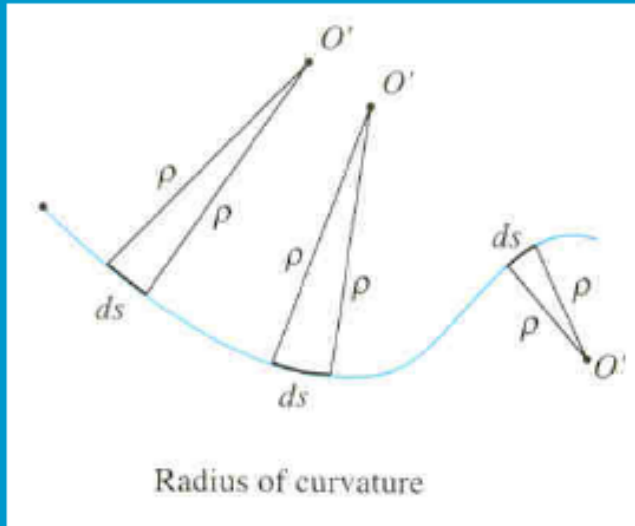
n-ekseni teğetsel eksene dik normal bileşendir, merkeze doğru olan yön pozitif yöndür.



NORMAL ve TEĞETSEL BİLEŞENLER



Normal ve teğetsel eksenlerin doğrultusunda pozitif yönde yazılan birim vektörler $\mathbf{u}_n$ ve $\mathbf{u}_t$ olarak yazılabilir.

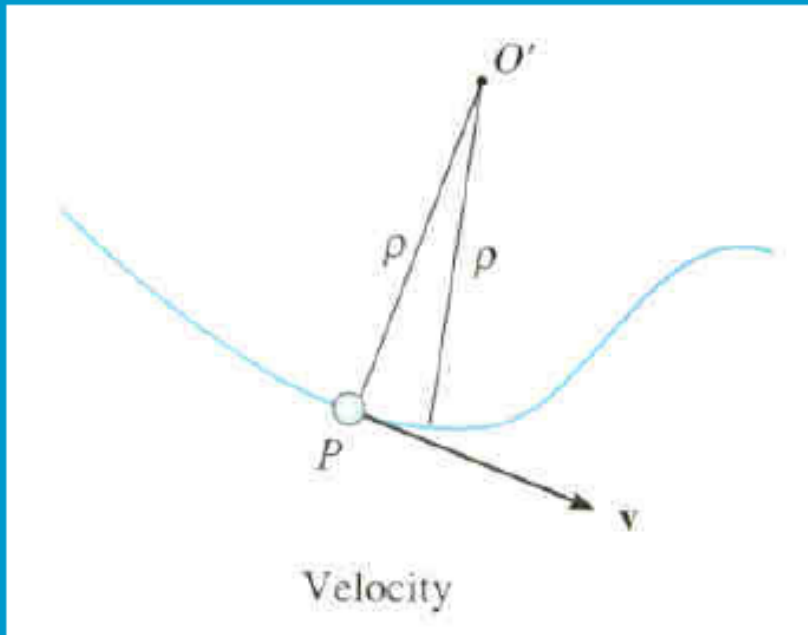


Eğrinin merkezi , O' , daima eğrinin içbükey tarafındadır. Eğri yön değiştirdiğinde merkezde yer değiştirir. Eğrilik yarıçapı, ρ , merkezden eğriye çizilen dik uzaklıktır.

Cismin konumu ise eğri üzerinde alınan bir kıyas noktasına göre cismin eğri üzerinde aldığı yol , s , ile tanımlanır.



n-t KOORDINAT SİSTEMİNDE HIZ



Hız vektörü daima eğriye teğettir (t-ekseni yönünde).

Hızın büyüklüğü yörünge fonksiyonunun $s(t)$, zamana göre türevi ile bulunur,

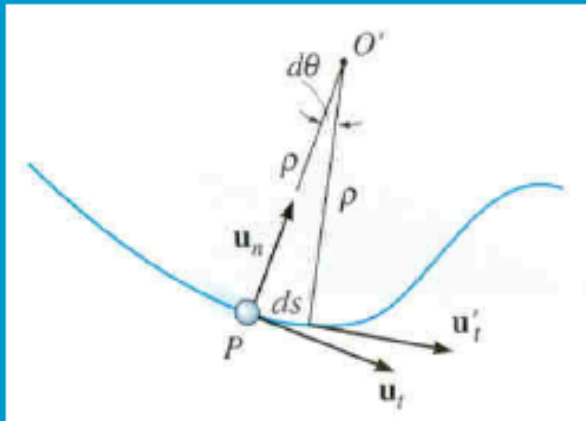
$$v = v u_t \quad \text{ve} \quad v = \dot{s} = ds/dt$$

v hızın büyüklüğünü ifade etmektedir. u_t ise hızın doğrultusunu ifade eden birim vektördür.

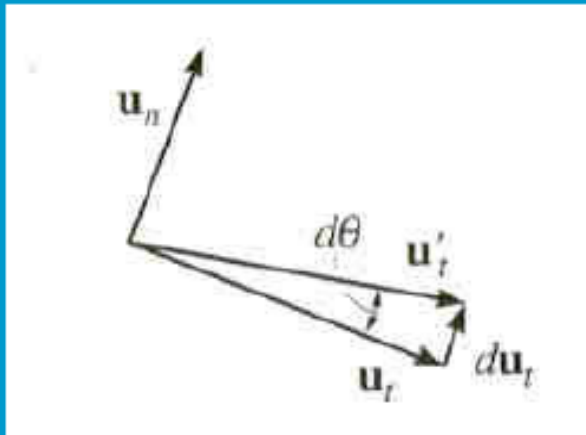
n-t KOORDİNAT SİSTEMİNDE İVME

İvme değeri hızdaki değişim oranını ifade etmektedir:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d(v\mathbf{u}_t)/dt = \dot{v}\mathbf{u}_t + v\dot{\mathbf{u}}_t$$



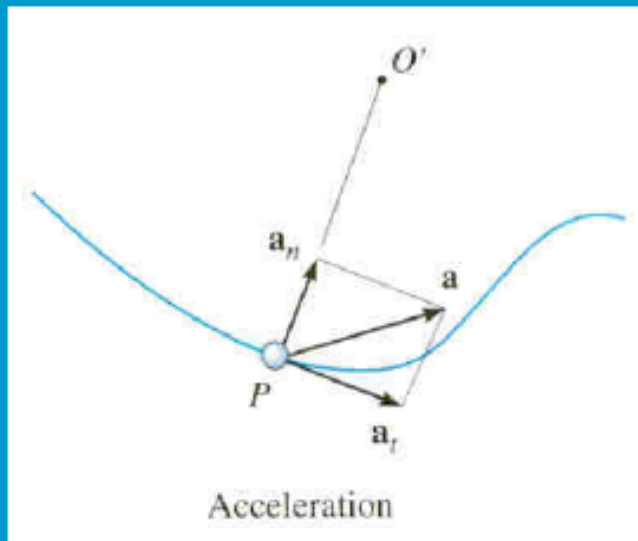
$\dot{v}$ hızın büyüklüğündeki değişim oranını ve $\dot{\mathbf{u}}_t$ ise $\mathbf{u}_t$ doğrultusundaki değişim oranını ifade etmektedir.



Matematiksel işlemler sonucunda ivme değeri şu şekilde yazılabilmektedir.

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{u}_t + (v^2/\rho)\mathbf{u}_n = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n.$$

n-t KOORDİNAT SİSTEMİNDE İVME



Burada ivme vektörünün iki bileşeni görülmektedir :

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n$$

- Teğetsel bileşen eğriye teğet eksenini doğrultusundadır. Hızın artması veya azalmasına göre yönü değişebilir.

$$a_t = \dot{v} \quad \text{or} \quad a_t ds = v dv$$

- Normal bileşen ise daima eğrinin merkezine doğrudur, değeri ise $a_n = v^2/\rho$

- Toplam ivme vektörünün büyüklüğü

$$a = [(a_t)^2 + (a_n)^2]^{0.5}$$



Eğrisel Hareket İçin Özel Durum

Burada bazı özel durumlar ele alınacaktır

- 1) Eğer cisim bir doğru boyunca hareket ediyorsa :

$$\rho \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad a_n = v^2/\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad a = a_t = \dot{v}$$

Teğetsel bileşen (teğetsel ivme) hızın büyüklüğünün zamanla değişim oranını ifade etmektedir.

- 2) Cisim eğri üzerinde sabit hızla hareket ediyorsa :

$$a_t = \dot{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = a_n = v^2/\rho$$

Normal bileşen hız vektörü yönünün zamanla değişim oranını ifade etmektedir.



Eğrisel Hareket İçin Özel Durum

- 3) Teğetsel ivme değeri sabit ise $a_t = (a_t)_c$.

Bu durumda,

$$s = s_o + v_o t + (1/2)(a_t)_c t^2$$

$$v = v_o + (a_t)_c t$$

$$v^2 = (v_o)^2 + 2(a_t)_c (s - s_o)$$

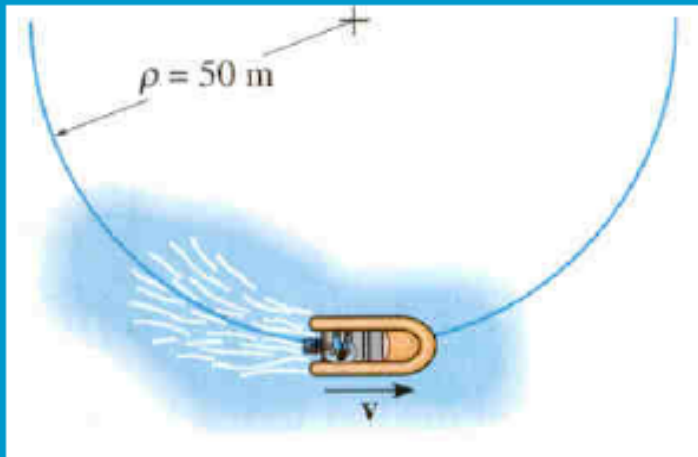
Daha önce s_o ve v_o değerleri başlangıç anındaki $t = 0$, hız ve yol değerleri olarak tanımlanmıştı. Bu denklemleri atış hareketi denklemleri ile aynımıdır ? Neden?

- 4) Cisim $y = f(x)$ şeklinde tanımlanan bir eğri üzerinde hareket ediyorsa, eğrilik yarıçapı , ρ , herhangi bir noktada

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$



ÖRNEK PROBLEM



Hareketsiz konumdan $\rho = 50 \text{ m}$ yarıçaplı daire üzerinde harekete başlayan deniz botunun, hız denklemi $v = (0.2 t^2) \text{ m/s}$ şeklinde verilmektedir.

Botun $t = 3 \text{ s}$ 'deki hız ve ivme değerlerini bulunuz.

Plan: Bot başlangıçta hareketsizdir ($v = 0$, $t = 0$).

- 1) $t = 3 \text{ s}$ için hız değeri hesaplanacaktır $v(t)$.
- 2) Teğetsel ivme ve normal ivme değerleri hesaplanacak ve bu değerler kullanılarak ivme vektörü bulunacaktır.

ÖRNEK

Çözüm :

- 1) Hız vektörü $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_t$, hızın büyüklüğü $v = (0.2t^2)$ m/s denkleminde $t = 3$ s için hesaplanabilir :

$$v = 0.2t^2 = 0.2(3)^2 = 1.8 \text{ m/s}$$

- 2) İvme vektörü $\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n = \dot{v} \mathbf{u}_t + (v^2/\rho) \mathbf{u}_n$

Teğetsel Bileşen: $a_t = \dot{v} = d(0.2t^2)/dt = 0.4t \text{ m/s}^2$

$$t = 3\text{s için : } a_t = 0.4t = 0.4(3) = 1.2 \text{ m/s}^2$$

Normal bileşen : $a_n = v^2/\rho = (0.2t^2)^2/(\rho) \text{ m/s}^2$

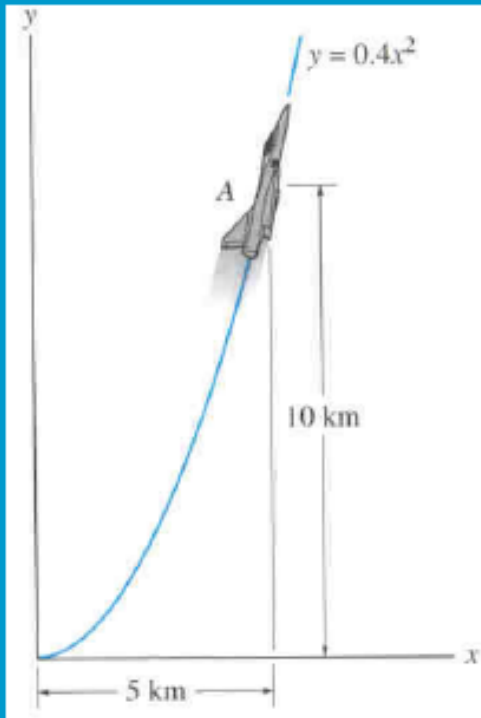
$$t = 3\text{s için : } a_n = [(0.2)(3^2)]^2/(50) = 0.0648 \text{ m/s}^2$$

İvmenin büyüklüğü

$$a = [(a_t)^2 + (a_n)^2]^{0.5} = [(1.2)^2 + (0.0648)^2]^{0.5} = 1.20 \text{ m/s}^2$$



ÖRNEK



Verilenler: Şekildeki jet $y = 0.4x^2$ ile ifade edilen eğri üzerinde hareket etmektedir. A noktasında jetin hızı 200 m/s ve hız artım oranı 0.8 m/s^2 'dir.

İstenenler: A noktasında cismin sahip olduğu ivme değerini bulunuz.

- Plan:**
- 1) Uçağın hız artım oranı (0.8 m/s^2) ivmenin teğetsel bileşenini ifade etmektedir.
 - 2) A noktasında eğrilik yarıçapı hesaplanır.
 - 3) İvmenin normal bileşeni hesaplanır.
 - 4) İvme vektörü yönü ve büyüklüğü ile hesaplanır.



ÖRNEK

Çözüm:

- 1) İvmenin teğetsel bileşeni uçağın hız artım oranıdır,
 $a_t = \dot{v} = 0.8 \text{ m/s}^2$.

- 2) A noktasında ($x = 5 \text{ km}$) eğrilik yarıçapı hesaplanırsa :

$$dy/dx = d(0.4x^2)/dx = 0.8x, \quad d^2y/dx^2 = d(0.8x)/dx = 0.8$$

$$\text{At } x = 5 \text{ km, } dy/dx = 0.8(5) = 4, \quad d^2y/dx^2 = 0.8$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} = [1 + (4)^2]^{3/2}/(0.8) = 87.62 \text{ km}$$

- 3) İvmenin normal bileşeni

$$a_n = v^2/\rho = (200)^2/(87.62 \times 10^3) = 0.457 \text{ m/s}^2$$

- 4) İvme vektörünün büyüklüğü

$$a = [(a_t)^2 + (a_n)^2]^{0.5} = [(0.8)^2 + (0.457)^2]^{0.5} = 0.921 \text{ m/s}^2$$



EĞRİSEL HAREKET :

Silindirik Bileşenler

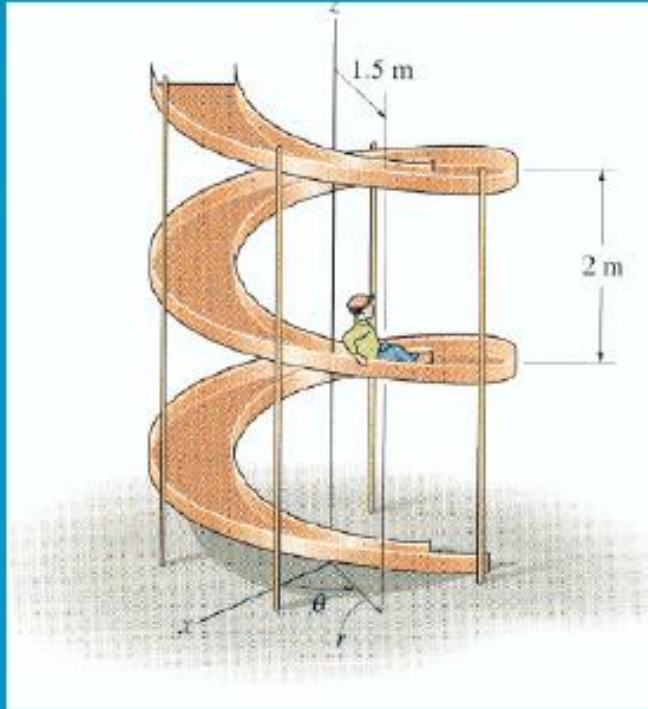
SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA (POLAR) HAREKET DENKLEMLERİ

Bugünkü Konular:

Silindirik koordinat takımı
kullanılarak hareket
denklemlerinin yazılması; hız ve
ivme değerlerinin hesaplanması



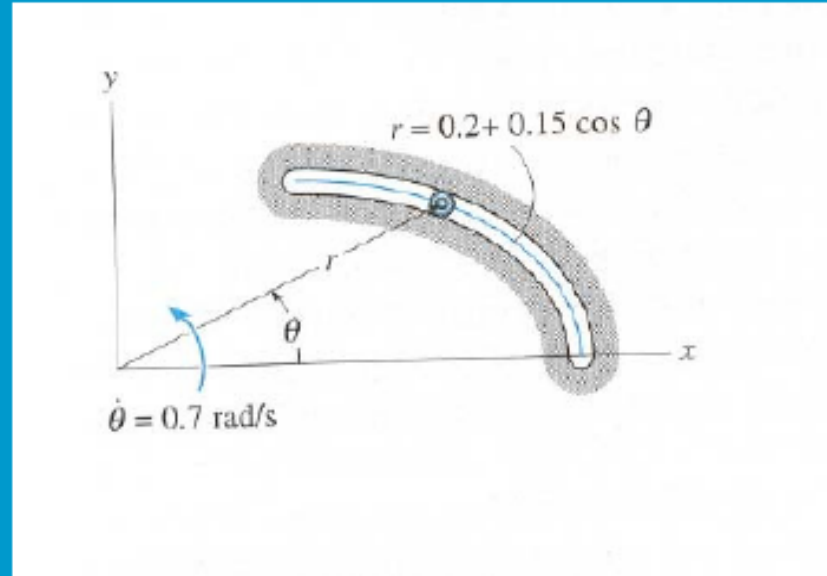
Uygulamalar



Silindirik koordinat takımı 3 boyutlu hareketler için kullanılabilir.

Şekilde gösterilen oyuncakta aşağıya doğru kaymakta olan çocuk için ivme ve hız ifadelerini yazmak istersek silindirik koordinatlarda hareket denklemlerinin yazılması gerekmektedir.

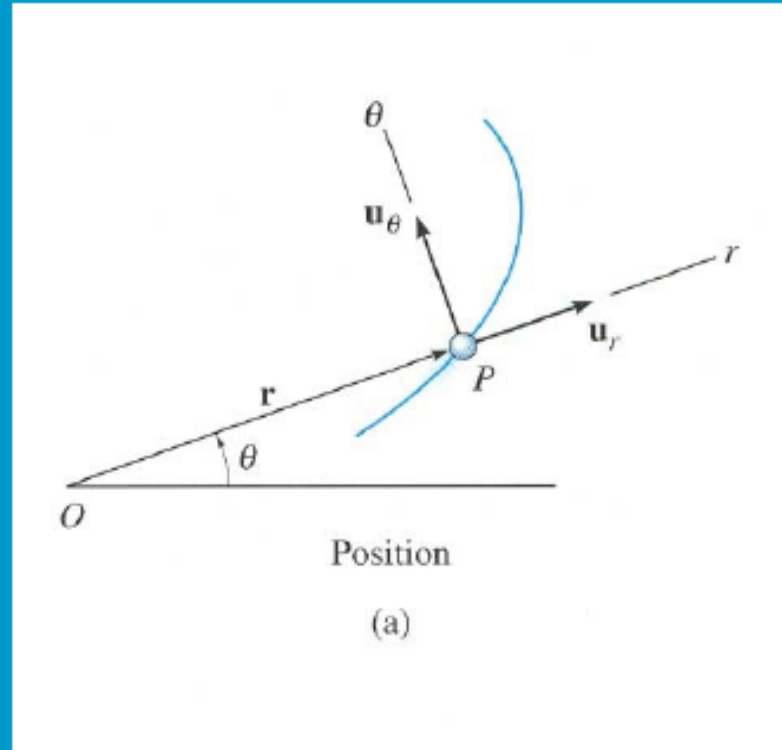
Uygulamalar



Polar (silindirik) koordinat takımı 2 boyutlu hareketlerde de kullanılabilir.

Eğer cisim 2 boyutta hareket ediyorsa ve merkeze göre konumu r sürekli değişiyorsa polar koordinat sistemi kullanılarak hareket denklemi yazılmalıdır.

KONUM (POLAR KOORDİNATLARDA)



Şekilde gösterilen P noktasının konumu yazılmak istenirse $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$. Burada ifade edilen r noktanın merkeze olan uzaklığı yani normal (radyal) yöndeki merkezden noktaya doğru ölçülen mesafesi; θ ise noktanın pozitif yatay düzlemle saat yönüne ters yönde ölçülen açısıdır.

HIZ (POLAR KOORDİNATLARDA)

Hız ifadesi konum vektörü cinsinden yazılırsa:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = d(r\mathbf{u}_r)/dt$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$$

Değişken değiştirme ile:

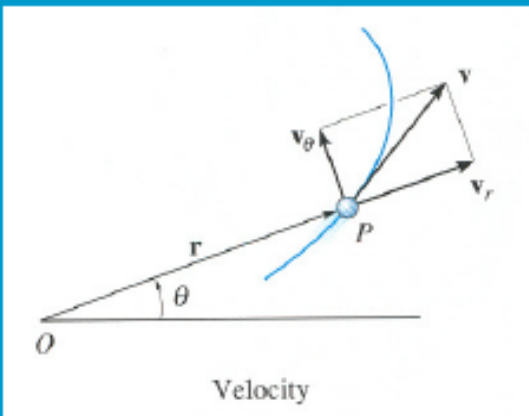
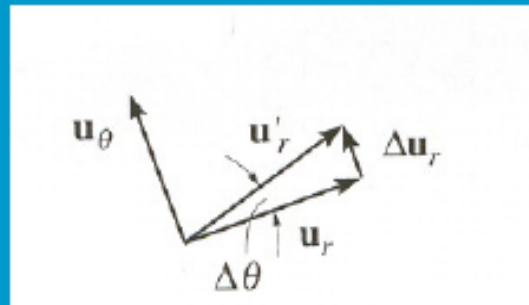
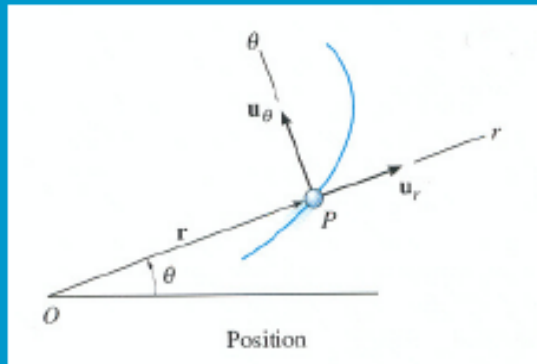
$$d\mathbf{u}_r/dt = (d\mathbf{u}_r/d\theta)(d\theta/dt)$$

Bu ifadelerden $d\mathbf{u}_r/d\theta = \mathbf{u}_\theta$ so $d\mathbf{u}_r/dt = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \text{ elde edilir}$$

Hız vektörünün iki bileşeni vardır; normal (radyal) doğrultudaki r ve hız vektörünün dönüşünü gösteren $r\dot{\theta}$ ifadesi. Hız ifadesini hesaplamak için bu iki bileşenin bileşkesinin alınması gerekmektedir.

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$



İVME (POLAR KOORDİNATLARDA)

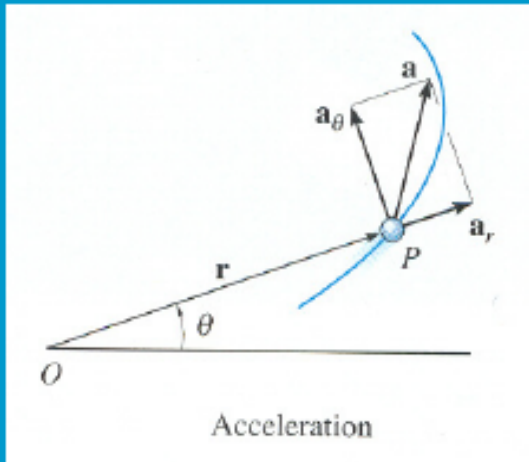
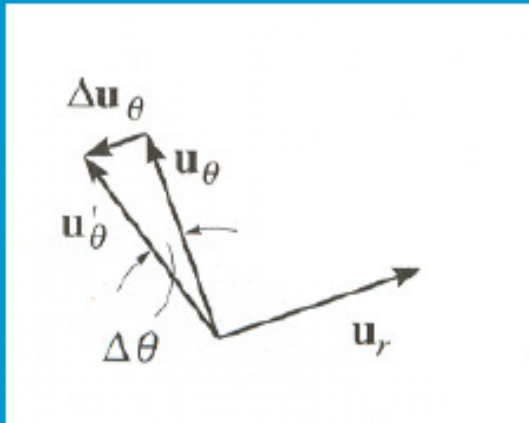
İvme ifadesi daha önce şu şekilde tanımlanmıştı:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = (d/dt)(\dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta)$$

Bu ifade sadeleştirmeler yapılırsa

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$

elde edilir.



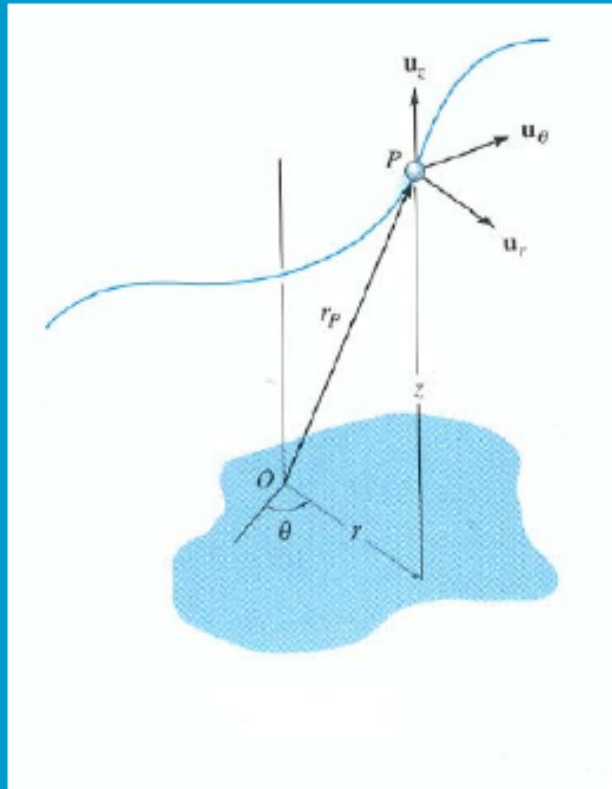
Burada $(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ ifadesi ivmenin radyal a_r (normal) yönündeki bileşenini verir.

$(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$ ifadesi ise a_θ yönündeki bileşeni (ivmenin dönüş değerini) vermektedir.

İvme ifadesini hesaplamak için $a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$



SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR



Eğer cisim uzayda bir eğri üzerinde hareket ediyorsa, konum vektörü şu şekilde yazılabilir

$$\mathbf{r}_P = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$$

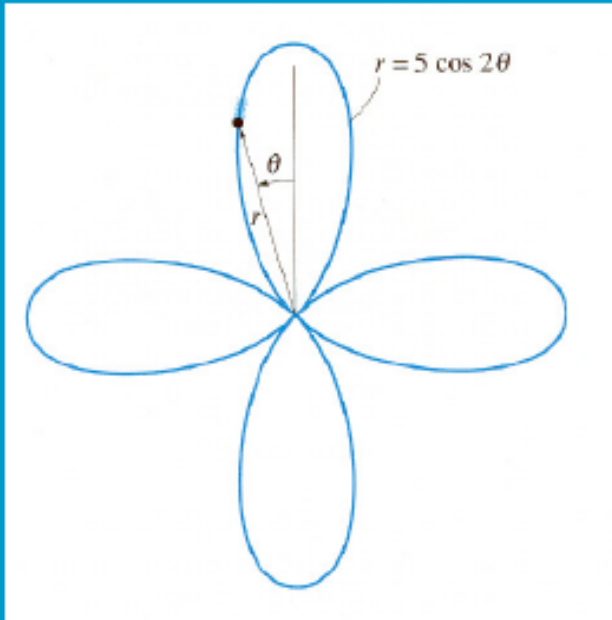
Bu ifadenin türevi alınır ve değişken dönüştürme işlemi uygulanırsa

Hız : $\mathbf{v}_P = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z$

İvme : $\mathbf{a}_P = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{u}_z$



ÖRNEK



Verilenler: $r = 5 \cos(2\theta)$ (m)

$$\dot{\theta} = 3t^2 \text{ (rad/s)}$$

$$\theta_0 = 0$$

İstenenler: $\theta = 30^\circ$ durumundaki hız ve ivme değerlerini bulunuz.

Plan: $\theta = 30^\circ$ için konum vektörünün türev ifadeleri alınıp değişken dönüştürme işlemleri yapılır.

Çözüm:

$$\theta = \int_{t_0=0}^t \dot{\theta} dt = \int_0^t 3t^2 dt = t^3$$

$$\theta = 30^\circ, \quad \theta = \frac{\pi}{6} = t^3. \text{ Buradan: } t = 0.806 \text{ s.}$$

$$\dot{\theta} = 3t^2 = 3(0.806)^2 = 1.95 \text{ rad/s}$$



Örnek

$$\ddot{\theta} = 6t = 6(0.806) = 4.836 \text{ rad/s}^2$$

$$r = 5 \cos(2\theta) = 5 \cos(60) = 2.5 \text{ m}$$

$$\dot{r} = -10 \sin(2\theta)\dot{\theta} = -10 \sin(60)(1.95) = -16.88 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= -20 \cos(2\theta)\dot{\theta}^2 - 10 \sin(2\theta)\ddot{\theta} \\ &= -20 \cos(60)(1.95)^2 - 10 \sin(60)(4.836) = -80 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Bu değerler hız ifadesinde yerine yazılırsa

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{v} = -16.88\mathbf{u}_r + 2.5(1.95)\mathbf{u}_\theta$$

$$v = \sqrt{(16.88)^2 + (4.87)^2} = 17.57 \text{ m/s}$$



Örnek

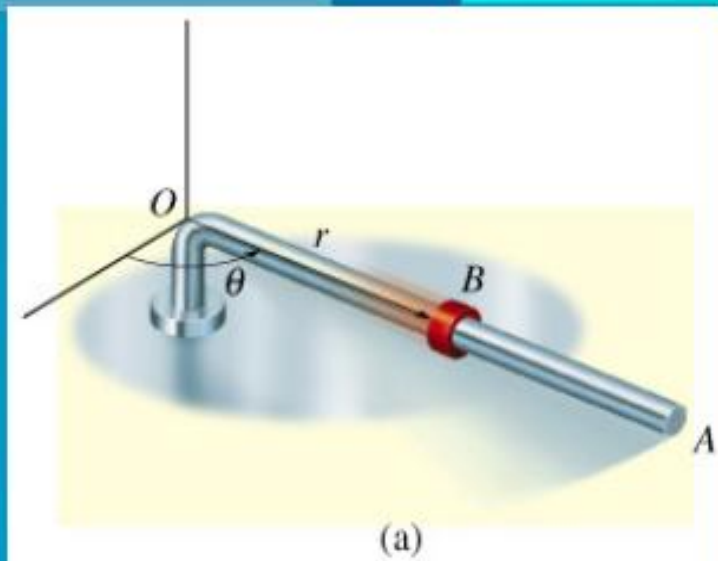
Aynı şekilde ivme ifadeleri elde edilirse :

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$

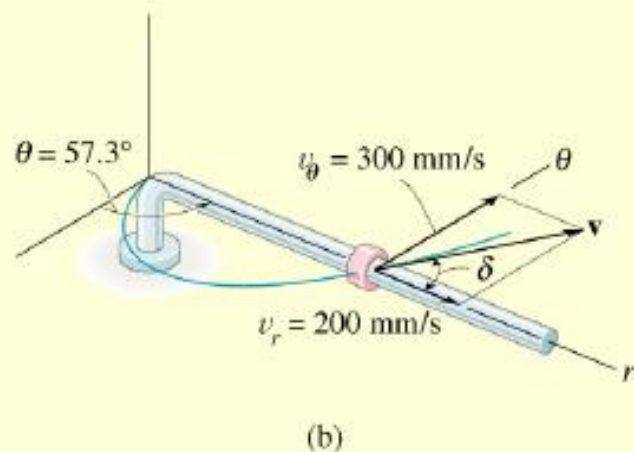
$$\mathbf{a} = [-80 - 2.5(1.95)^2]\mathbf{u}_r + [2.5(4.836) + 2(-16.88)(1.95)]\mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a} = -89.5\mathbf{u}_r - 53.7\mathbf{u}_\theta \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{(89.5)^2 + (53.7)^2} = 104.4 \text{ m/s}^2$$



Şekildeki OA çubuğu o etrafında $\theta = (t^3)$ radyan açısı ile dönerken üzerindeki B halkası dışarıya doğru $r = (100 t^2)$ mm denklemi ile hareket etmektedir. Her iki fonksiyonda da t sn olarak ifade edilmektedir. $t=1$ sn deki ivme ve hız değerlerini hesaplayınız.



$$r = 100t^2 \Big|_{t=1\text{ s}} = 100 \text{ mm} \quad \theta = t^3 \Big|_{t=1\text{ s}} = 1 \text{ rad} = 57.3^\circ$$

$$\dot{r} = 200t \Big|_{t=1\text{ s}} = 200 \text{ mm/s} \quad \dot{\theta} = 3t^2 \Big|_{t=1\text{ s}} = 3 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = 200 \Big|_{t=1\text{ s}} = 200 \text{ mm/s}^2 \quad \ddot{\theta} = 6t \Big|_{t=1\text{ s}} = 6 \text{ rad/s}^2.$$

As shown in Fig. 12-33*b*,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \\ &= 200\mathbf{u}_r + 100(3)\mathbf{u}_\theta \\ &= \{200\mathbf{u}_r + 300\mathbf{u}_\theta\} \text{ mm/s} \end{aligned}$$

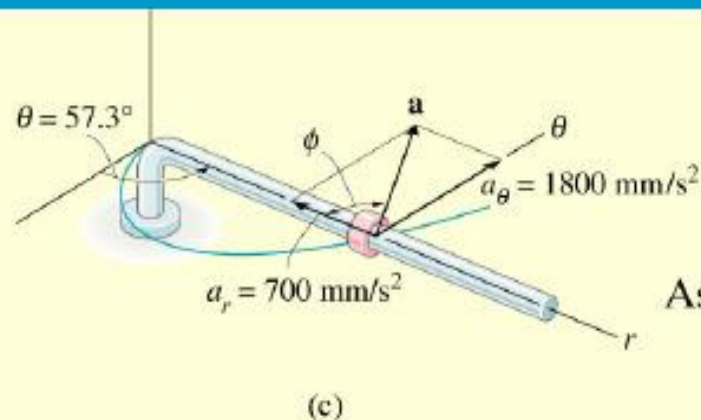


Fig. 12-33

$$v = \sqrt{(200)^2 + (300)^2} = 361 \text{ mm/s}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{300}{200}\right) = 56.3^\circ \quad \delta + 57.3^\circ = 114^\circ$$

As shown in Fig. 12-33c,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta \\ &= [200 - 100(3)^2]\mathbf{u}_r + [100(6) + 2(200)3]\mathbf{u}_\theta \\ &= \{-700\mathbf{u}_r + 1800\mathbf{u}_\theta\} \text{ mm/s}^2 \end{aligned}$$

The magnitude of $\mathbf{a}$ is

$$a = \sqrt{(700)^2 + (1800)^2} = 1930 \text{ mm/s}^2$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1800}{700}\right) = 68.7^\circ \quad (180^\circ - \phi) + 57.3^\circ = 169^\circ$$

BAĞIL HAREKET :

Makara Sistemlerinin Hareketi

BAĞIL HAREKET (Makara Sistemlerinin Hareketi)

Bugünkü Konular:

Bağıl hareket tanımı, bağıl hareket için ivme, hız ve yol denklemlerinin türetilmesi.



In-Class Activities:

- Uygulamalar
- Bağıl hareketin tanımı
- Bağıl harekette ivme, hız ve yol ilişkilerinin belirlenmesi
- Grup problem çözümü
- Quiz



UYGULAMALAR



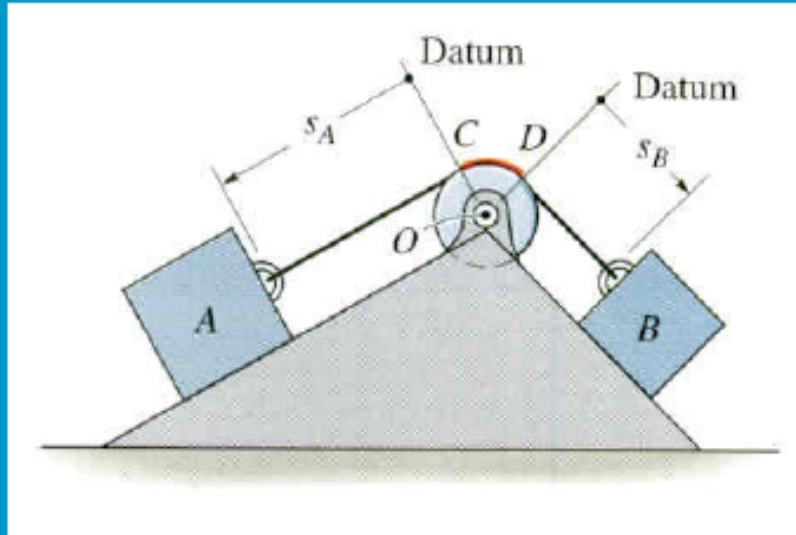
Makara ve kablolu taşıma sistemleri bağıl harekete en iyi örneklerden birisidir. Şekildeki sistemde B bloğunun hızı motorun hızına bağlıdır.

Bu hareket için B bloğunu kaldıracak motor gücünün belirlenmesi ve kablolarda oluşacak gerilme kuvvetlerinin hesaplanabilmesi önemlidir.

Eğer motor tarafından çekilen kablonun çekiliş hızı biliniyorsa B bloğunun hızı nasıl hesaplanacaktır.

BAĞIL HAREKET

Pek çok kinematik problemde bir cismin hareketi başka bir cismin hareketi ile ilişkilidir.



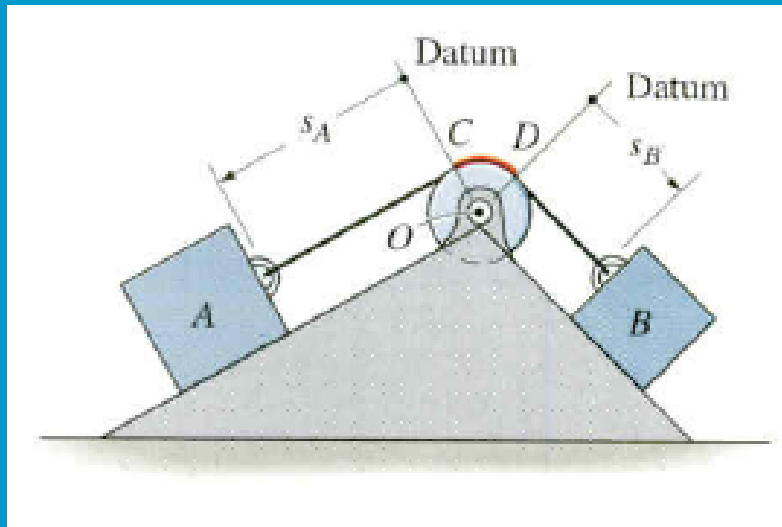
Şekildeki cisimler makara üzerinden geçen kablo (çekme taşıyan) ile birbirine bağlanmıştır.

Eğer A cismi aşağıya doğru hareket ederse B cismi tam ters yönde hareket edecektir. Yani bu iki kütlenin hareketleri birbiri ile bağlantılıdır.

Her bir bloğun birbiriyle bağıntılı konumunu matematiksel olarak tanımlayan konum koordinatları s_A ve s_B 'dir. Bu koordinat eksenleri makara merkezi sabit başlangıç noktası alınarak cismin hareket doğrultusuna doğru tanımlanır.



BAĞIL HAREKET



Bu örnekte s_A ve s_B konum koordinatları makara merkezi başlangıç kabul edilerek bu noktadan cisimlere doğru çizilen eksenler olarak tanımlanmıştır.

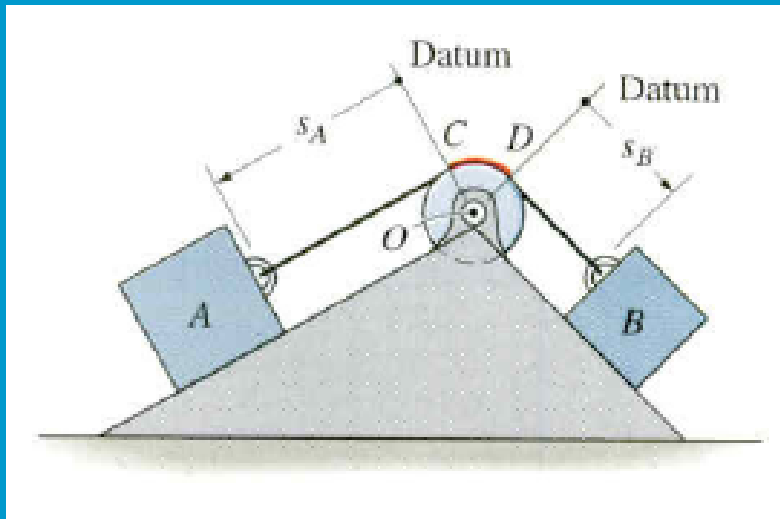
Eğer ipin uzunluğu sabit ise, konum koordinatları s_A ve s_B matematiksel olarak birbiriyle bağıntılıdır.

$$s_A + l_{CD} + s_B = l_T$$

Burada l_T toplam ip boyunu, l_{CD} ise ipin makaraya CD boyunca temas ettiği mesafeyi ifade etmektedir.



BAĞIL HAREKET



Cisimlerin hızlarını bulmak için cisimler için yazılan yol ifadelerinin türevi alınır. l_{CD} ve l_T sabit olduğuna göre $dl_{CD}/dt = dl_T/dt = 0$

$$ds_A/dt + ds_B/dt = 0 \Rightarrow v_B = -v_A$$

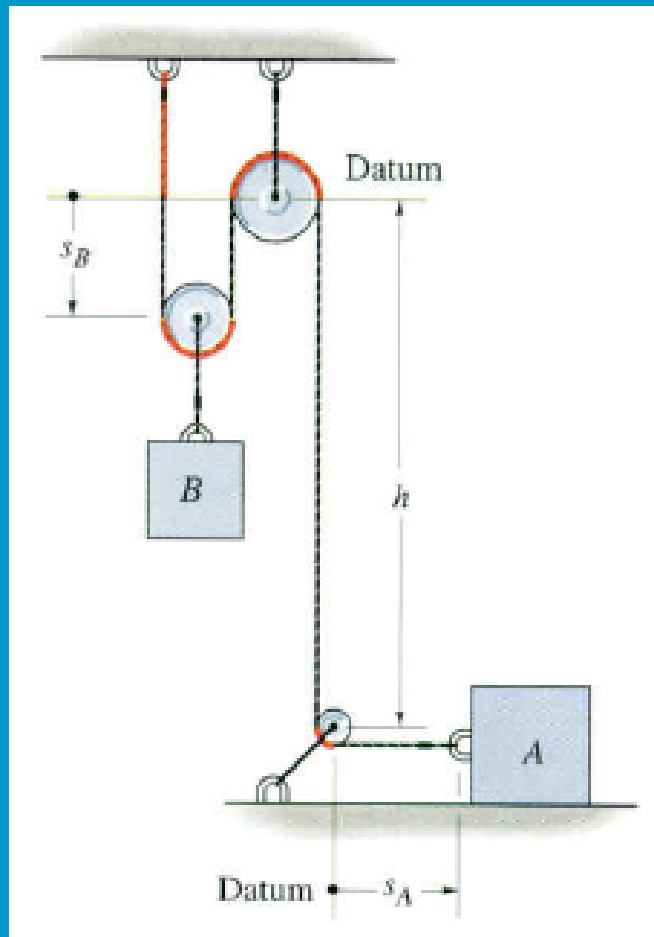
Buradaki negatif işaret A cismi aşağıya doğru hareket ettiğinde (s_A için pozitif yön); B cisminin yukarıya doğru (s_B için negatif) hareket edeceği anlamındadır.

İvme ifadesi de aynı şekilde hızın türevi alınarak türetilebilir.

$$a_B = -a_A$$



BAĞIL HAREKET



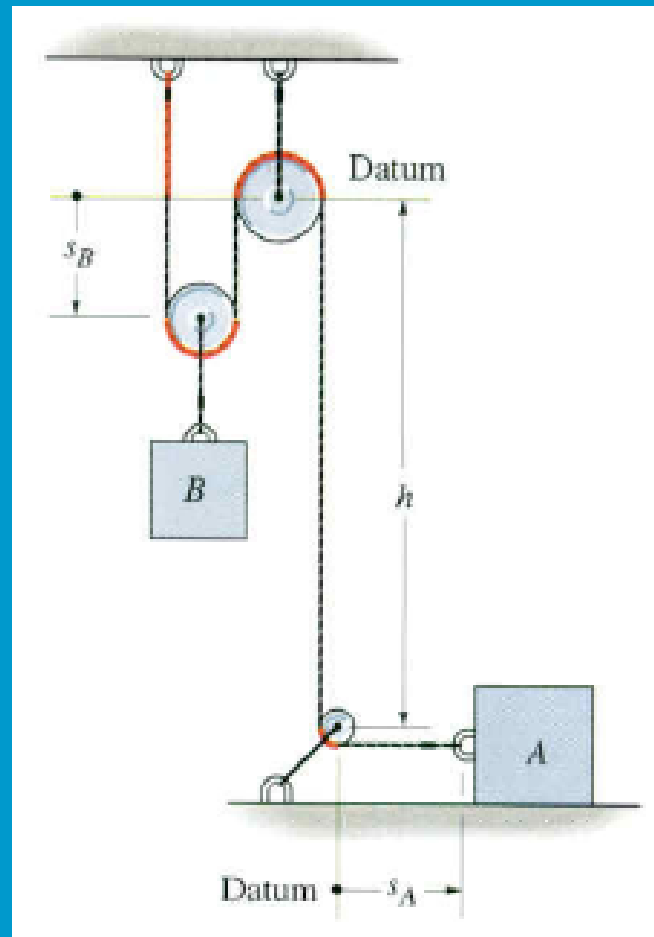
Şimdi biraz daha karışık bir sistemi inceleyelim. Konum koordinatları 0 için makara merkezleri sabit başlangıç noktaları olarak kabul edilmektedir. Bu noktalardan her bir bloğun hareket doğrultusunda s_A ve s_B tanımlanmaktadır.

s_B , makara merkezinden B bloğunu taşıyan makara merkezine tanımlanmaktadır. Burada h yüksekliğinin sabit olduğuna dikkat edelim

Ayrıca bloklar hareket ederken kırmızı ile işaretli bölgelerin uzunlukları değişmemektedir.



BAĞIL HAREKET



Konum koordinatları arasındaki ilişki şu şekilde yazılabilir :

$$2s_B + h + s_A = l$$

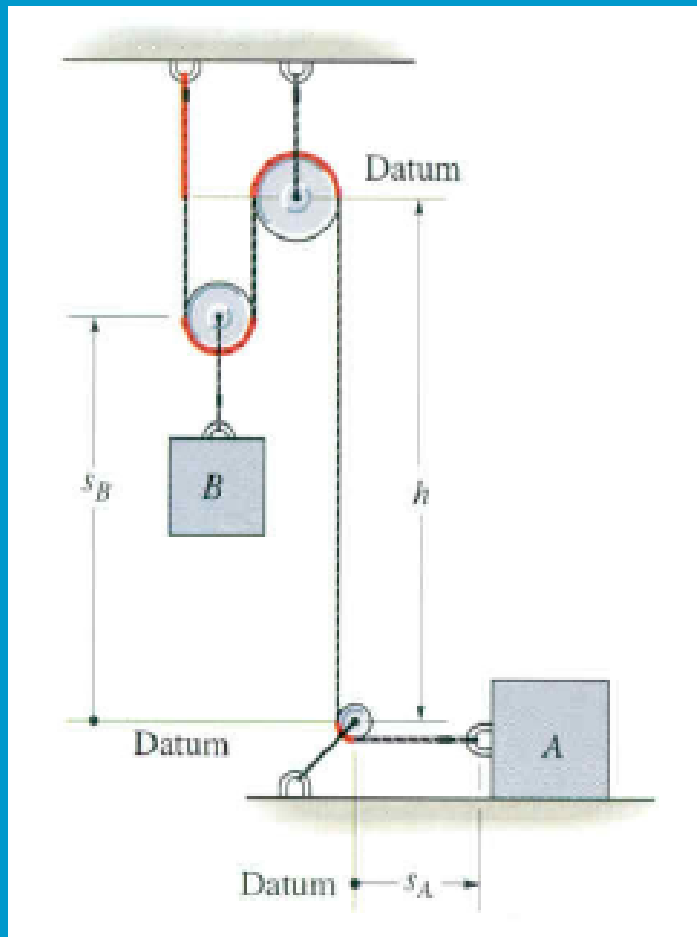
Burada l , kırmızı ile gösterilen bölgeler çıkarıldıktan sonra bulunacak toplam ip uzunluğunu ifade etmektedir.

l ve h sabit olduğu sürece, hareket için yazılacak hız ve ivme ifadeleri, yol ifadelerinin türevi yardımıyla kolayca bulunabilir :

$$2v_B = -v_A \quad \text{and} \quad 2a_B = -a_A$$

B bloğu aşağıya düştüğünde ($+s_B$), A bloğu sola doğru hareket edecektir ($-s_A$). İşaret yönü tanımına dikkat !

BAĞIL HAREKET



Aynı örneği B bloğu için tanımlanan konum koordinatını farklı bir şekilde tanımlayarak inceleyelim. s_B alt makaradan B'yi taşıyan makara eksenine olan uzaklık olarak tanımlansın.

Bu tanıma göre yol, hız ve ivme bağıntıları şu şekilde yazılabilir:

$$2(h - s_B) + h + s_A = l$$

$$2v_B = v_A \quad 2a_B = a_A$$

Denklemler önceki ile aynı sadece işaret farkı var. Bu da koordinatların tanım farkından kaynaklanmaktadır.



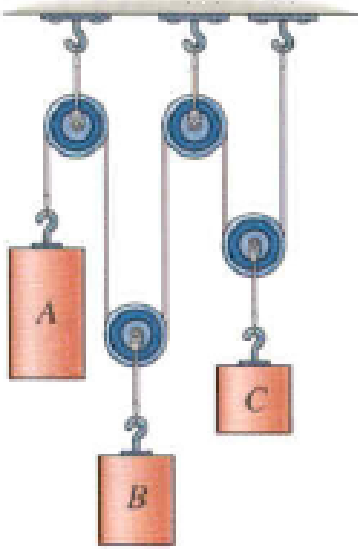
BAĞIL HAREKET (Yöntem)

Bu yöntem bir doğru boyunca hareket eden, hız ve ivmenin büyüklük olarak değiştiği ama doğrultularının değişmediği bağıl hareket yapan cisimlerin hareket denklemleri için yazılabilir.

1. Her bir cisim için seçilen sabit noktaya (genellikle makara merkezlerine) göre konum koordinatları hareket doğrultusunda pozitif yönü belirtilerek tanımlanır.
2. Pozisyon koordinatları arasındaki ilişkiler yazılırken hareket süresince ip boyunun değişmediği (sabit olduğu) kabul edilir.
3. Eğer sistemde birden fazla ip varsa, her bir ipin diğer iplere göre konumu (ilişkisi) yazılır. Her bir ip için eşitlikle ayrı ayrı yazılır.
4. Pozisyon koordinatları yardımıyla konum ilişkileri yazılan denklemlerin türevi alınarak hız ve ivme ifadeleri bulunur. İşaretlere DİKKAT!



ÖRNEK



Verilenler: Şekildeki makara sisteminde A bloğu aşağıya doğru 4 m/s hızla hareket ederken C bloğu yukarıya doğru 2 m/s hızla hareket etmektedir.

İstenen: B bloğunun hızını bulunuz.

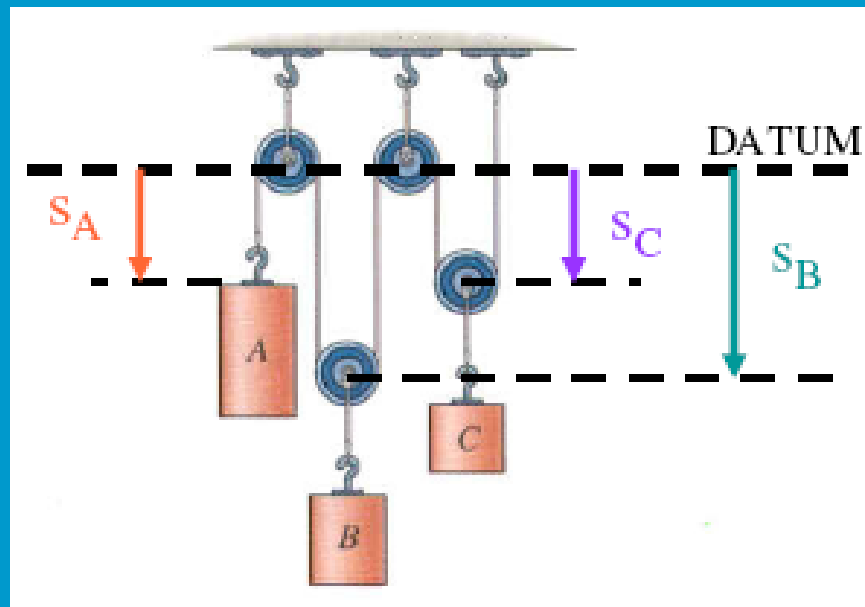
Plan: Tüm cisimler tek bir ipe bağlıdır. Konum koordinatlarının kullanıldığı tek bir denklem yazmak yeterlidir. Konum koordinatları seçilen sabit noktaya göre tanımlanacak, aralarındaki ilişki yazılacak ve türev yardımıyla hız ifadeleri elde edilecek.



ÖRNEK

Çözüm:

- 1) En üst noktadaki makara merkezi kıyas düzlemi olarak seçilir (sabit nokta). Her bir cisim için konum koordinatları bu noktadan itibaren tanımlanır.



- 2) s_A , s_B , ve s_C şekilde gösterilmektedir. Bu ifadeler kullanılarak ip boyu sabit olduğuna göre:

$$s_A + 2s_B + 2s_C = l$$

- 3) Bu denklemin türevi ile hız ifadesi bulunur:

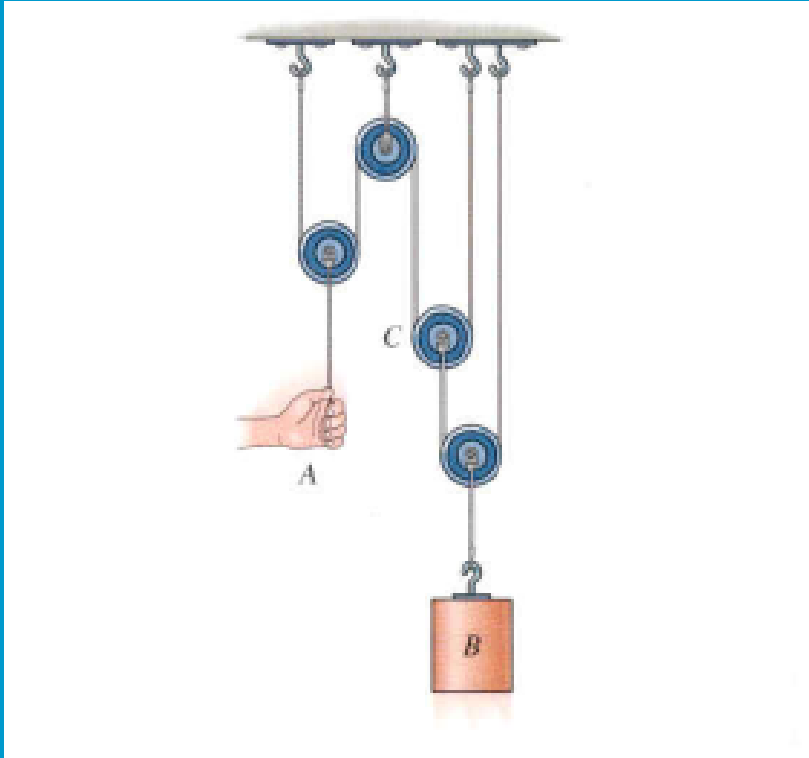
$$v_A + 2v_B + 2v_C = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 2v_B + 2(-2) = 0$$

$$\Rightarrow v_B = 0$$



ÖRNEK PROBLEM



Verilenler: Yandaki şekilde verilen sistemde A ipi aşağıya doğru 8 m/s hızla çekilmektedir.

İstenen: B bloğunun hızını bulunuz.

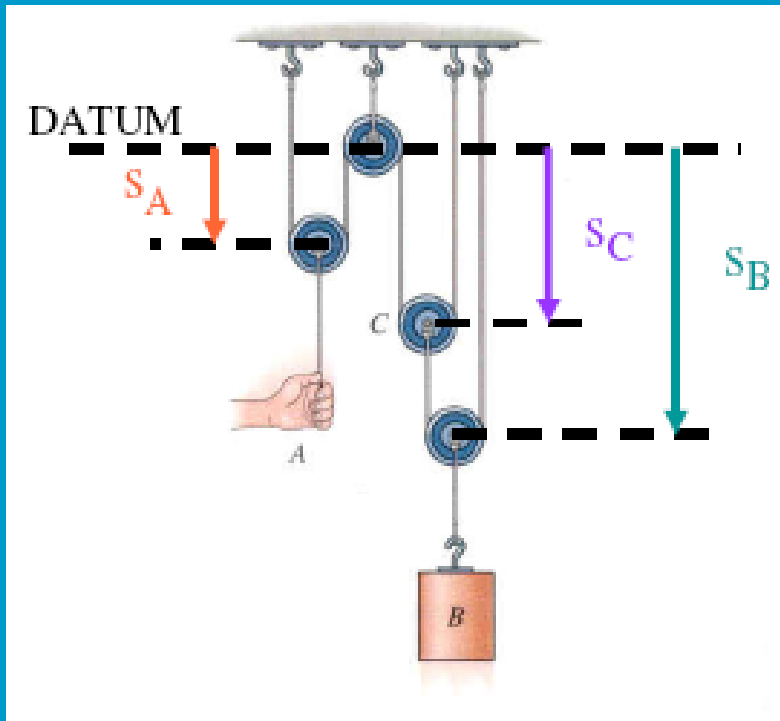
Plan: Problemde iki ayrı ip vardır. Birinci ipin konumu ile ikinci ipin durumu yani birbirleriyle ilişkileri yazılmalıdır. Bu durumda elimizde iki ayrı denklem olacaktır (Her bir ip için bir tane denklem yazılır).



ÖRNEK PROBLEM

Çözüm:

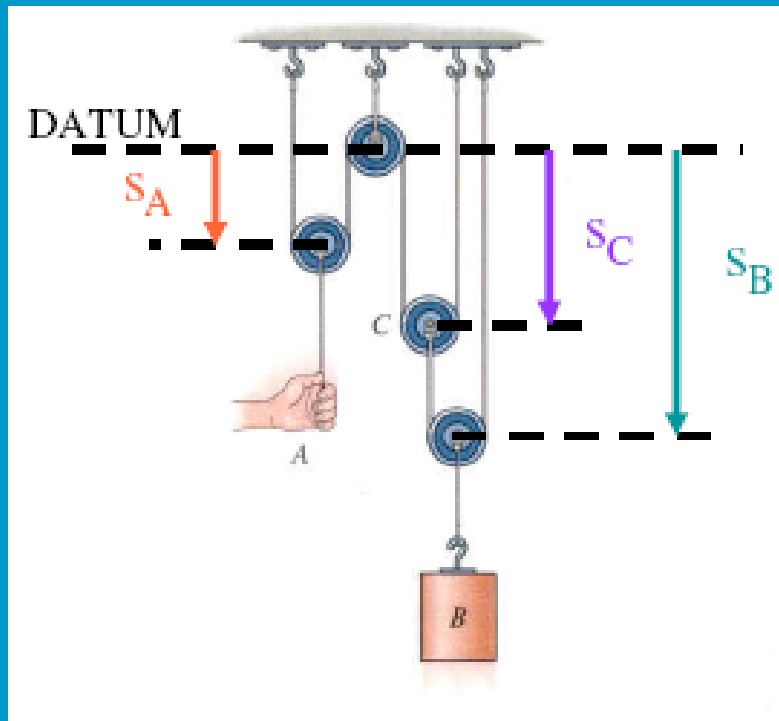
- 1) Kıyas düzlemine göre pozisyon koordinatları tanımlanır. Üç pozisyon koordinatı tanımlanmak zorundadır: ilki A noktası olan mesafe (s_A), diğeri B noktasına olan mesafe (s_B) ve diğeri C noktasına olan mesafe (s_C). s_C mesafesi aynı zamanda iki ip arasındaki ilişkiyi de ifade etmektedir.



- En üstteki makaranın merkezi kıyas düzlemi olarak seçilir (sabit nokta).
- s_A A makarasının merkezine olan mesafe olarak tanımlanır.
- s_B B makarasının merkezine olan mesafe olarak tanımlanır.
- s_C C makarasının merkezine olan mesafe olarak tanımlanır.
- Tüm mesafeler için pozitif yön aşağıya doğrudur.



ÖRNEK PROBLEM



- 2) Her bir ip için konum koordinatlarının kullanıldığı denklemleri yazalım. İlk ipin uzunluğu l_1 ve ikinci ipin uzunluğu l_2 ve hareket boyunca ip boyları değişmeyeceğine göre:

$$\text{İp 1: } 2s_A + 2s_C = l_1$$

$$\text{İp 2: } s_B + (s_B - s_C) = l_2$$

- 3) Bu iki denklemde s_C ifadesini yok edersek :

$$2s_A + 4s_B = l_1 + 2l_2$$

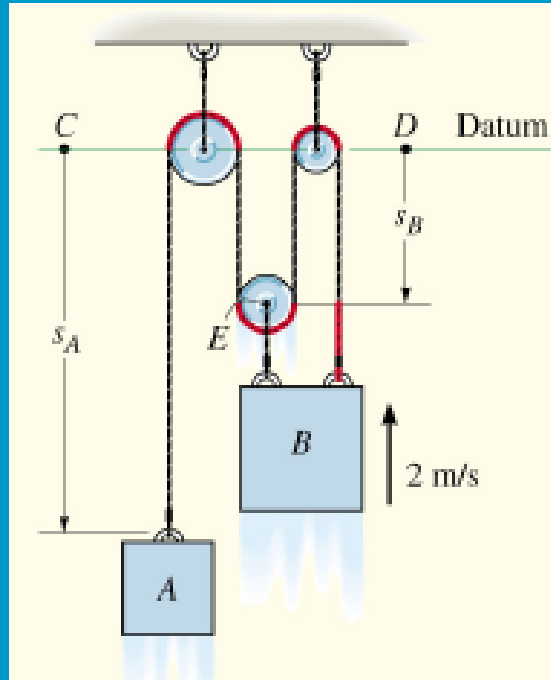
- 4) Bu denklemin türevi alınarak hız ifadeleri elde edilir. l_1 ve l_2 ip boylarının sabit olduklarını unutmayalım (türevi sıfır).

$$2v_A + 4v_B = 0 \quad \Rightarrow \quad v_B = -0.5v_A = -0.5(8) = -4 \text{ m/s}$$

B bloğunun hızı 4 m/s yukarıya doğru (s_B için negatif yön).



ÖRNEK



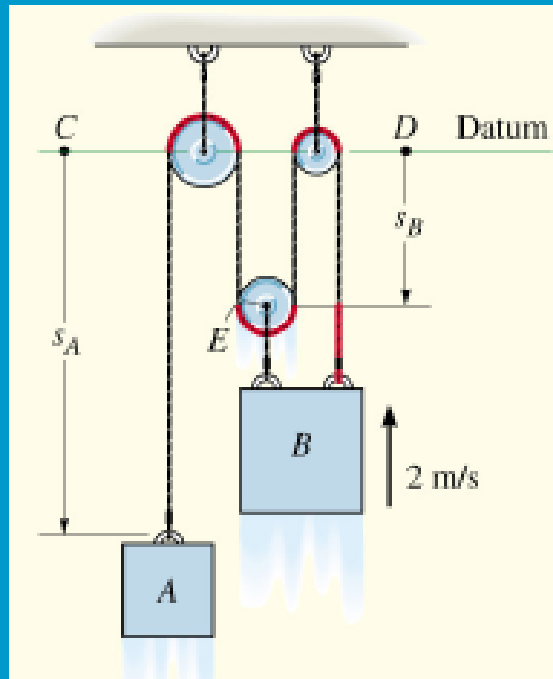
Verilenler: Şekildeki makara sisteminde B bloğu yukarıya doğru 2 m/s hızla hareket etmektedir

İstenen: A bloğunun hızını bulunuz.

Plan: Şekildeki makara sisteminde iki ayrı ip bulunmaktadır. Ancak E noktasından bağlı olan ip hiçbir zaman değişmeyecektir. Konum koordinatları seçilen sabit noktaya göre tanımlanacak, aralarındaki ilişki yazılacak ve türev yardımıyla hız ifadeleri elde edilecek.



ÖRNEK



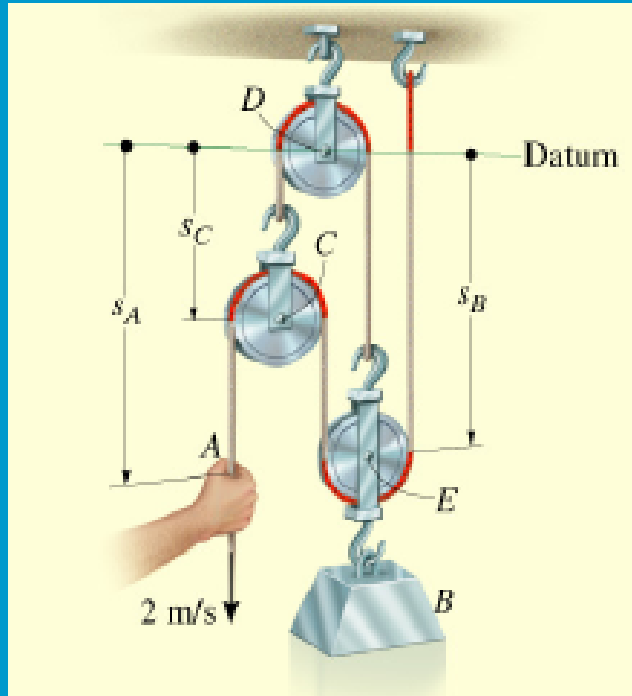
$$s_A + 3 s_B = 1$$

$$v_A + 3 v_B = 0$$

$$v_B = -2 \text{ m/s}$$

$$v_A = 6 \text{ m/s} \downarrow$$

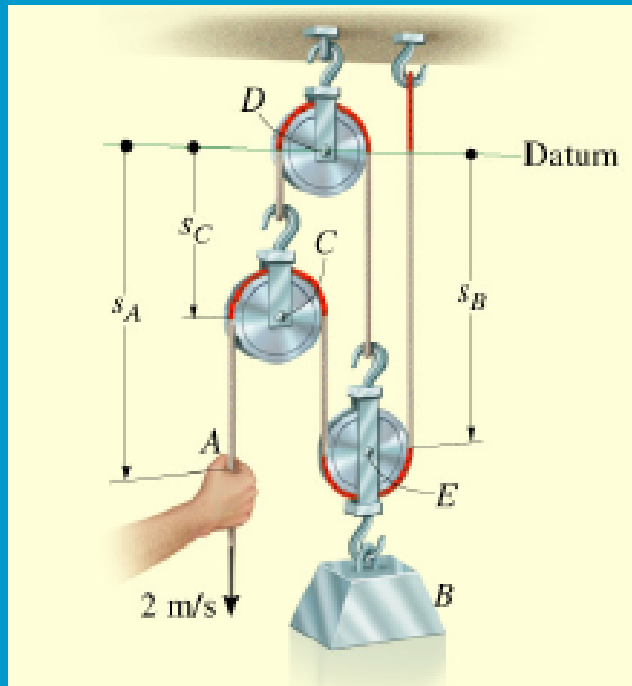
ÖRNEK



Verilenler: Şekildeki makara sisteminde A bloğu aşağıya doğru 2 m/s hızla çekildiğine göre

İstenen: B bloğunun hızını bulunuz.

ÖRNEK



$$s_C + s_B = l_1$$

$$(s_A - s_C) + (s_B - s_C) + s_B = l_2$$

İlk denklemde s_C ifadesi çekilip ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$(s_A + 4 s_B) = l_2 + 2 l_1$$

Bu ifadenin türevi alınır

$$(v_A + 4 v_B) = 0$$

$$v_A = 2 \text{ m/sn} \downarrow \quad v_B = -0.5 \text{ m/sn} \uparrow$$



QUIZ

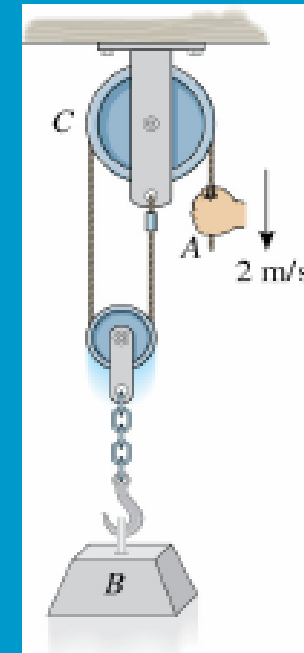
1. B bloğunun hızını bulunuz.

A) 1 m/s

B) 2 m/s

C) 4 m/s

D) Hiçbiri



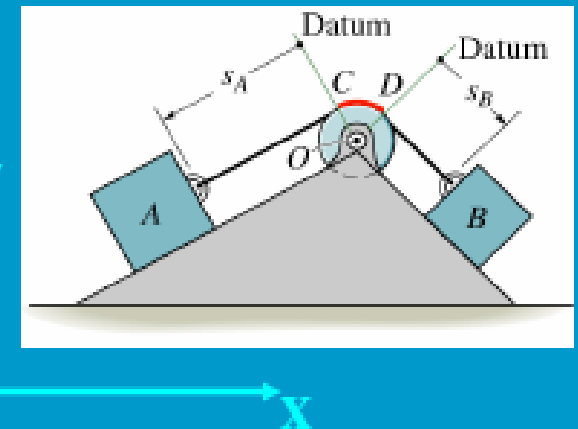
2. Kabloyla bağlı iki ağırlık için yazılan aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A) $v_A = -v_B$

B) $(v_x)_A = -(v_x)_B$

C) $(v_y)_A = -(v_y)_B$

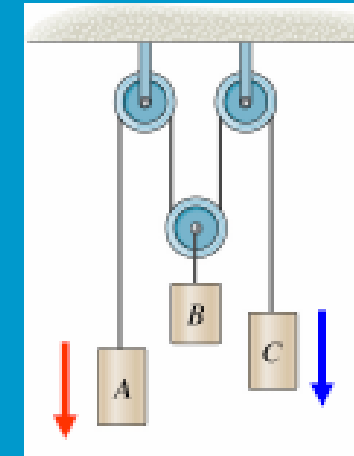
D) Hepsi



QUIZ

1. A bloğu aşağıya doğru 6 m/s; C bloğu aşağıya doğru 18 m/s hızla giderken B bloğunun hızı ne olur?

- A) 24 m/s B) 3 m/s
C) 12 m/s D) 9 m/s

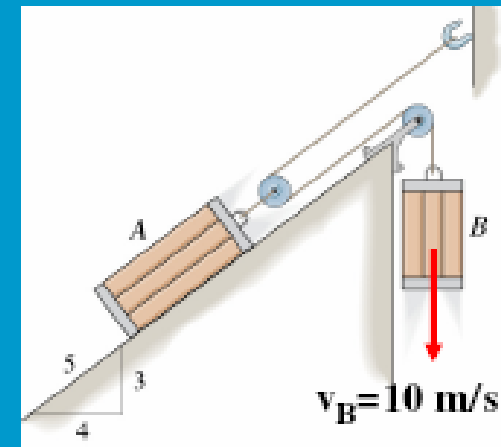


$$v_A = 6 \text{ m/s}$$

$$v_C = 18 \text{ m/s}$$

2. B bloğu 10 m/sn hızla aşağıya doğru hareket ettiğine göre A bloğunun hız vektörü aşağıdakilerden hangisidir.

- A) $(8\mathbf{i} + 6\mathbf{j})$ m/s B) $(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ m/s
C) $(-8\mathbf{i} - 6\mathbf{j})$ m/s D) $(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$ m/s



$$v_B = 10 \text{ m/s}$$

BAĞIL HAREKET :

***İki Parçacığın Bağıl Hareketinin
Ötelenen Eksenler ile Analizi***

BAĞIL HAREKET

Bugünkü Konular:

Öğrencilerin

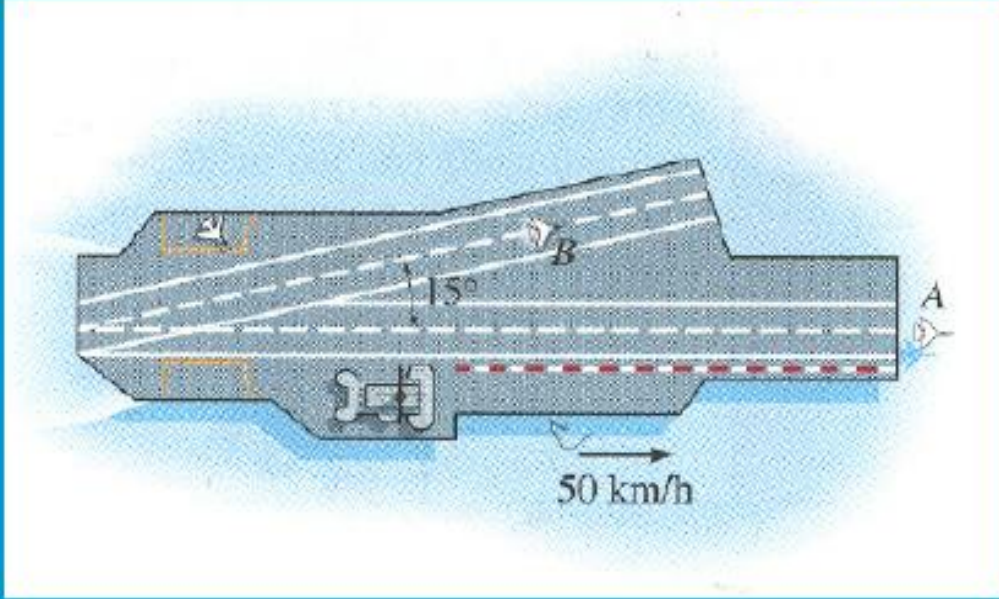
- a) Hareketli karşılaştırma takımının kavranması
- b) Hareketli karşılaştırma takımı ile bağıl hareketin analizini yapabilmeleri



Sınıf Aktiviteleri:

- Konu ile ilgili uygulamalar
- Bağıl yer değiştirme, bağıl hız ve bağıl ivme
- Vektörel ve grafiksel çözüm
- Örnekler
- Quiz

Uygulamalar



Yanda görülen uçak gemisinde uçaklar kalkarken ve inerken hızları ne olmalıdır.

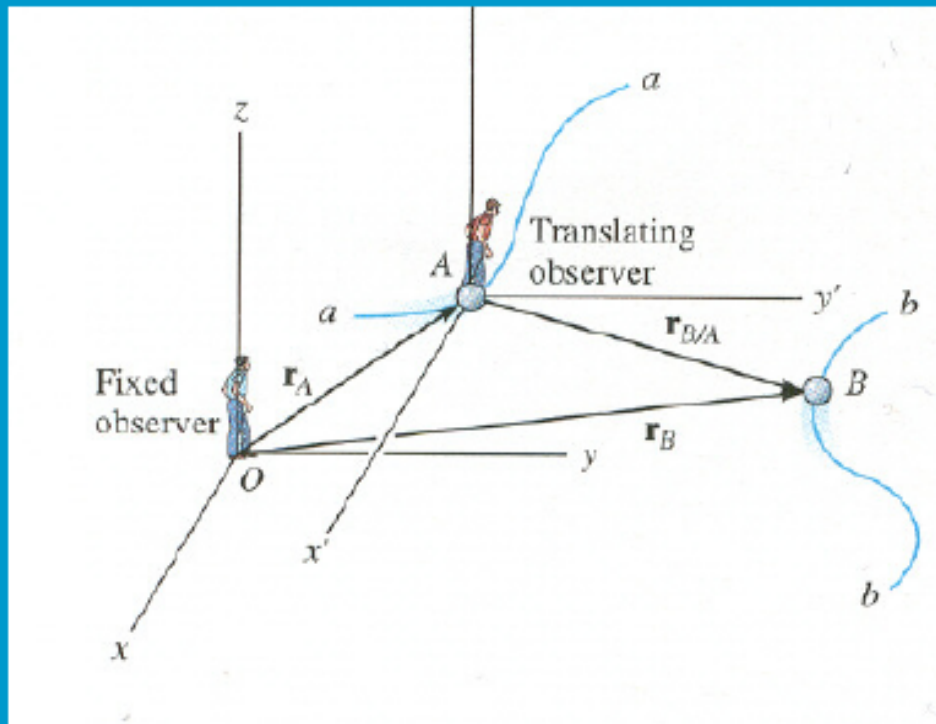
Eğer uçak gemisi 50 km/saat hızla ilerliyorsa ve A uçağının kalkarken hızı 200 km/saat (sudaki her hangi bir cisim tarafından ölçülen hız) ise uçağın gemiye göre hızını bulabilir miyiz?

Aynı şeyi B uçağı için hesaplayabilir miyiz?

Bu olaylar sırasında rüzgar hızının bir etkisi var mıdır?



Bağıl Yerdeğiştirme



A ve B cisimlerinin sabit bir x, y, z koordinat başlangıcına göre konumları (yer vektörleri) $\mathbf{r}_A$ ve $\mathbf{r}_B$ olsun. B nin A ya göre yer vektörü (bağıl yerdeğiştirmesi)

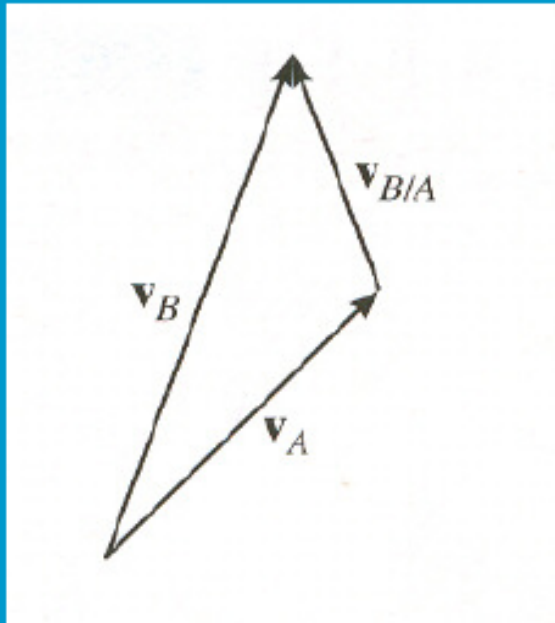
$\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ İfadesi ile elde edilir.

Eğer $\mathbf{r}_B = (10\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$ m

ve $\mathbf{r}_A = (4\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$ m,

ise $\mathbf{r}_{B/A} = (6\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$ m.

Bağıl Hız



B cisminin A cisminin göre hızını (bağıl hızını) hesaplamak için bağıl yer değiştirme ifadesinin türevi alınabilir

$$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$$

yani

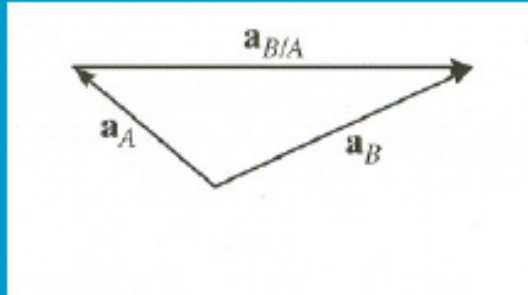
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

Bu denklemde $\mathbf{v}_B$ ve $\mathbf{v}_A$ A ve B cisimlerinin hızlarını ve $\mathbf{v}_{B/A}$ ise B'nin A'ya göre bağıl hızını (rölatif hızını) ifade etmektedir.

Aynı şekilde A'nın B'ye göre bağıl hızını yazmak istersek

$$\mathbf{v}_{B/A} = -\mathbf{v}_{A/B} \quad \text{yani} \quad \mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$$

Bağıl İvme



A ve B cisimlerinin birbirlerine göre bağıl ivmelerini yazabilmek için bağıl hız denklemlerinin türevi alınır.

$$\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A$$

yani

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

Problemlerin Çözümü

Bağıl hareket denklemleri vektörel denklemlerdir. Bu problemler çözülürken iki farklı yol kullanılabilir,

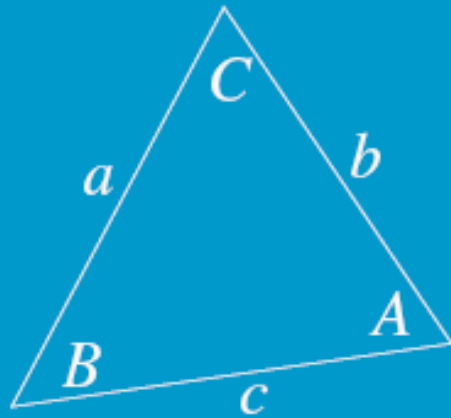
İstenirse bağıl hız denklemi $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ kartezyen koordinatlarda (x ve y koordinat sisteminde) yazılarak her iki yön için hız değerleri ayrı ayrı skaler olarak büyüklükler olarak bulunur ve sonra bileşke alınarak sonuç elde edilir.

Diğer yöntemde ise hız vektörleri çizilerek grafiksel olarak trigonometri yardımıyla bileşkeleri alınır. Burada sinüs ve kosinüs teoremleri kullanılabilir.

Bu problemleri Auto-CAD ile çözebilir misiniz ?



Hatırlatma: SİNÜS ve KOSİNÜS TEOREMLERİ



Vektörlerin toplanması ve çıkartılması için vektörler üçgen formunda yazılır, daha sonra sinüs ve kosinüs teoremleri kullanılarak üçüncü kenarın uzunluğu ve açısı hesaplanır. Bu da bizim bağıl hız veya bağıl ivmeyi hesaplamamızı sağlar.

Sinüs Teoremi: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

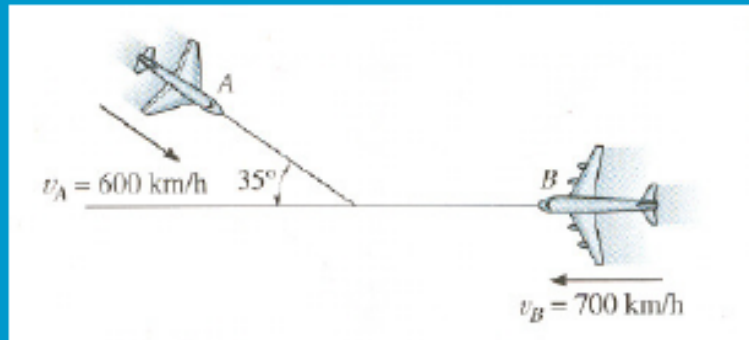
Kosinüs Teoremi: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



Örnek



Verilenler: $v_A = 600 \text{ km/hr}$

$v_B = 700 \text{ km/hr}$

İstenenler: $v_{B/A}$

Plan:

- Vector Yöntemi ile çözüm: v_A ve v_B vektörlerini dikdörtgen koordinat takımında yazalım ve $v_B - v_A$ hesaplayalım
- Grafiksel Yöntem ile çözüm: v_A ve v_B vektörlerini başlangıç noktasına çizelim, sinüs ve cosinüs teoremleri ile $v_{B/A}$ hızını bulalım.

EXAMPLE (continued)

Çözüm

a) Vektör Yöntemi:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= 600 \cos 35^\circ \mathbf{i} - 600 \sin 35^\circ \mathbf{j} \\ &= (491.5 \mathbf{i} - 344.1 \mathbf{j}) \text{ km/saat} \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_B = -700 \mathbf{i} \text{ km/saat}$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = (-1191.5 \mathbf{i} + 344.1 \mathbf{j}) \text{ km/saat}$$

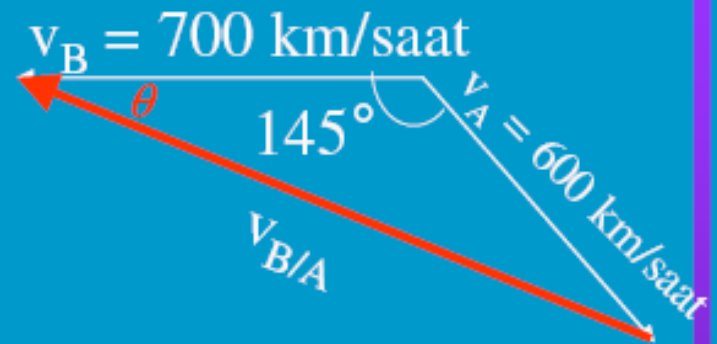
$$v_{B/A} = \sqrt{(1191.5)^2 + (344.1)^2} = 1240.2 \frac{\text{km}}{\text{saat}}$$

$$\text{açı} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{344.1}{1191.5}\right) = 16.1^\circ$$



Örnek

- b) Grafik Yöntemi ile çözüm:
B'nin A'ya göre bağıl hızı $v_{B/A}$
arıyoruz



Kosinüs Teoremi:

$$v_{B/A}^2 = (700)^2 + (600)^2 - 2(700)(600)\cos 145^\circ$$

$$v_{B/A} = 1240.2 \frac{\text{km}}{\text{saat}}$$

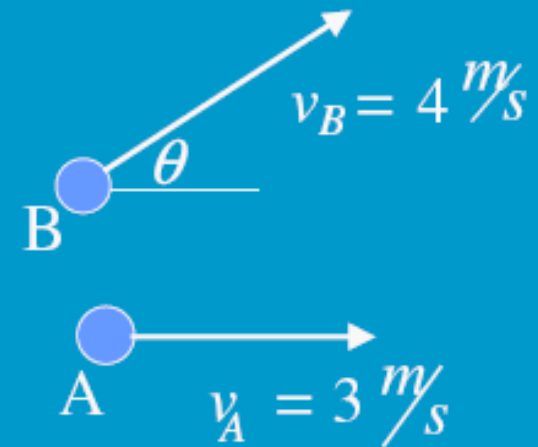
Sinüs Teoremi:

$$\frac{v_{B/A}}{\sin(145^\circ)} = \frac{v_A}{\sin\theta} \quad \theta = 16.1^\circ$$

ÖRNEKLER

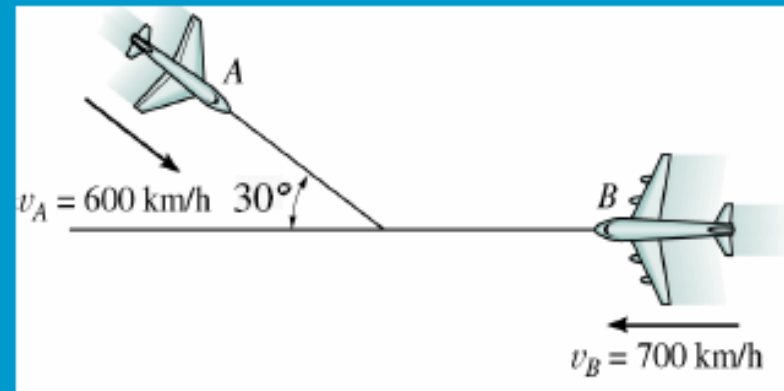
1. A ve B cisimleri şekildeki gibi hareket etmektedir. $v_{B/A}$ hızının minimum olması için θ açısı ne olmalıdır?

- A) 0° B) 180°
C) 90° D) 270°

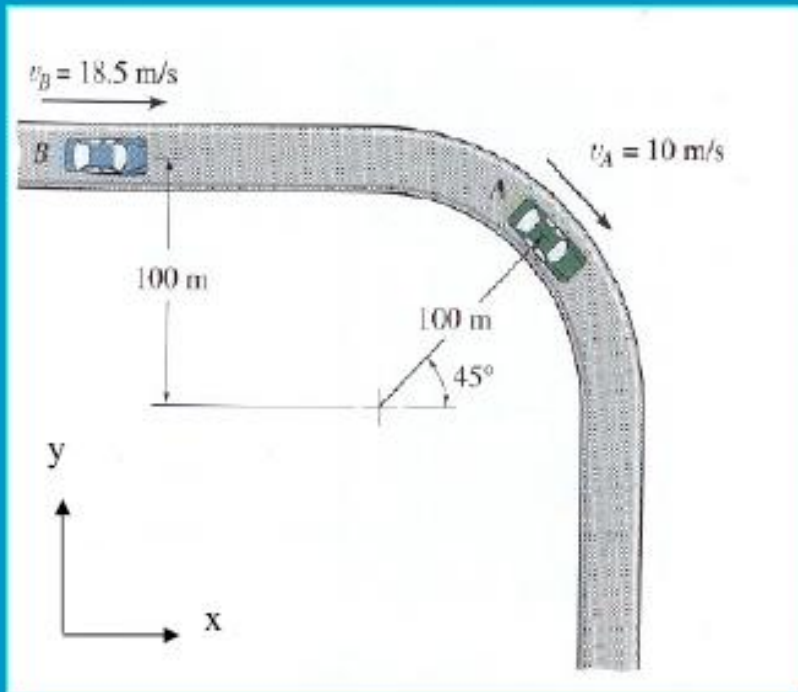


2. A uçağının B uçağına göre hızını bulunuz.

- A) $(400 \mathbf{i} + 520 \mathbf{j})$ km/saat
B) $(1220 \mathbf{i} - 300 \mathbf{j})$ km/saat
C) $(-181 \mathbf{i} - 300 \mathbf{j})$ km/saat
D) $(-1220 \mathbf{i} + 300 \mathbf{j})$ km/saat



ÖRNEK



Verilenler: $v_A = 10 \text{ m/s}$
 $v_B = 18.5 \text{ m/s}$
 $a_A = 5 \text{ m/s}^2$
 $a_B = 2 \text{ m/s}^2$

İstenenler: $v_{A/B}$
 $a_{A/B}$

Plan: A ve B araçları için hız ve ivme değerlerini vektörel olarak yazınız, $v_{A/B}$ ve $a_{A/B}$ ifadelerini hesaplayınız.

Çözüm

A cisminin hızı:

$$v_A = 10 \cos(45^\circ) \mathbf{i} - 10 \sin(45^\circ) \mathbf{j} = (7.07 \mathbf{i} - 7.07 \mathbf{j}) \text{ m/s}$$



B cisminin hızı:

$$\mathbf{v}_B = 18.5\mathbf{i} \text{ (m/s)}$$

B cisminin A cisminin göre bağıl hızı ($\mathbf{v}_{A/B}$):

$$\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = (7.07\mathbf{i} - 7.07\mathbf{j}) - (18.5\mathbf{i}) = -11.43\mathbf{i} - 7.07\mathbf{j}$$

$$v_{B/A} = \sqrt{(11.43)^2 + (7.07)^2} = 13.4 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7.07}{11.43}\right) = 31.73^\circ$$



A cisminin ivmesi:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= (\mathbf{a}_t)_A + (\mathbf{a}_n)_A = [5 \cos(45)\mathbf{i} - 5 \sin(45)\mathbf{j}] \\ &\quad + \left[-\left(\frac{10^2}{100}\right) \sin(45)\mathbf{i} - \left(\frac{10^2}{100}\right) \cos(45)\mathbf{j}\right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_A = 2.83\mathbf{i} - 4.24\mathbf{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

B cisminin ivmesi:

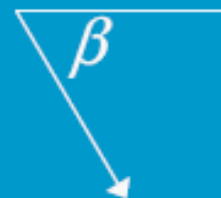
$$\mathbf{a}_B = 2\mathbf{i} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

A cisminin B cismine göre bağıl ivmesi:

$$\mathbf{a}_{A/B} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B = (2.83\mathbf{i} - 4.24\mathbf{j}) - (2\mathbf{i}) = 0.83\mathbf{i} - 4.24\mathbf{j}$$

$$a_{A/B} = \sqrt{(0.83)^2 + (4.24)^2} = 4.32 \text{ m/s}^2$$

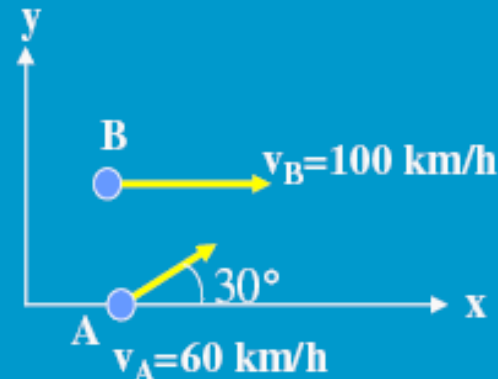
$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{4.24}{0.83}\right) = 78.9^\circ$$



QUIZ

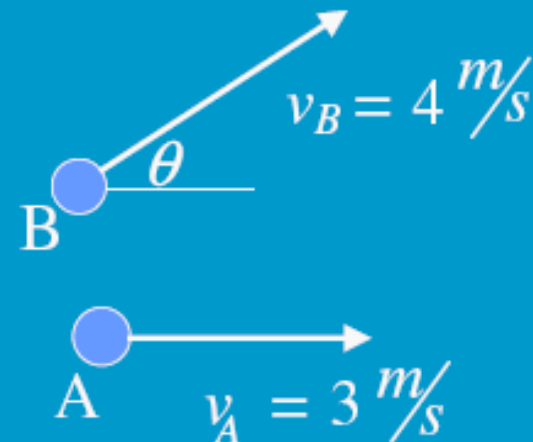
1. B cisminin A cisminin göre bağıl hızını bulunuz.

- A) $(48\mathbf{i} + 30\mathbf{j})$ km/saat
- B) $(-48\mathbf{i} + 30\mathbf{j})$ km/saat
- C) $(48\mathbf{i} - 30\mathbf{j})$ km/saat
- D) $(-48\mathbf{i} - 30\mathbf{j})$ km/saat



2. Eğer $\theta = 90^\circ$ ise, aynı anda aynı noktadan harekete başlayan A ve B cisimlerinin $t=5$ sn sonra bağıl yer değiştirmeleri $\mathbf{r}_{B/A}=?$

- A) 20 m
- B) 15 m
- C) 18 m
- D) 25 m



CİSİMLERİN KİNETİĞİ

Newton Kanunları

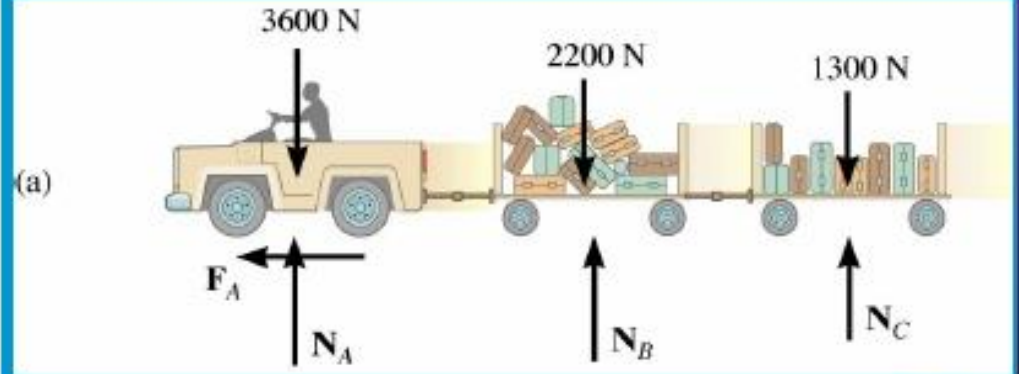
NEWTON KANUNLARI

Bugünkü Konular:

- İvmelenen cisimler için hareket denklemlerinin yazılması.
- İvmelenen cisimler için serbest cisim diyagramı ve kinetik hareket grafiklerinin çizilmesi

Sınıf Aktiviteleri:

- Uygulamalar
- Newton'un hareket kanunları
- Newton'un çekim kanunu
- Cisimler için hareket denklemlerinin yazılması
- Örnekler
- Çalışma Soruları



Uygulamalar

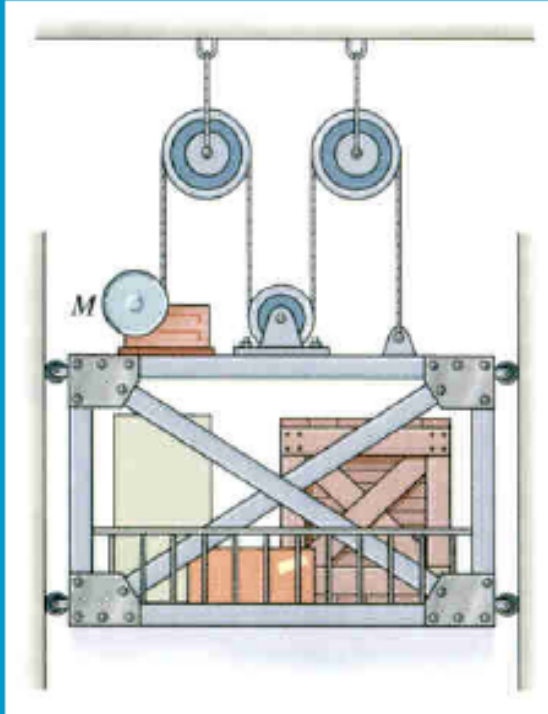


Cisimlerin hareketi üzerlerine etkiyen kuvvetlerle ilişkilidir.

Örneğin şekildeki paraşüte etki eden hava sürtünme kuvveti hızı sınırlandırmaktadır.

Eğer hava sürtünme kuvveti biliniyorsa her hangi bir anda paraşütün hızını ve ivmesini nasıl hesaplayabiliriz.

Uygulamalar



Şekilde görülen yük asansörü motor, kablo ve makara sistemi ile çalışmaktadır.

Asansör yükselirken verilen ivme etkisi altında kablolarda oluşacak gerilme kuvveti değerini nasıl hesaplayabiliriz?

Kablodaki gerilme kuvveti asansör ve üzerindeki ağırlığın toplamından daha fazla mıdır?

NEWTON'UN HAREKET KANUNLARI

Newton'un hareket eden cisimler için geliştirdiği üç adet kanunu vardır.

Newton'un Birinci Kanunu : Bir cisme etki eden toplam kuvvet sıfır ise, cisim konumunu korur yani duruyorsa durmaya devam eder, sabit bir hızı varsa bu hızını koruyarak hareketine devam eder.

Newton'un İkinci Hareket Kanunu: Bir cisme etki eden toplam kuvvet sıfırdan farklı ise (bileşke kuvvet sıfır değil), cisim bileşke kuvvet yönünde kütlesiyle orantılı olarak ivmelenerek hareket eder.

Newton'un Üçüncü Kanunu : (Etki tepki prensibi) Birbiri ile temas eden iki cismin arasında birbirine zıt yönde, aynı doğrultuda ve aynı şiddette iki kuvvet oluşur.



NEWTON'UN HAREKET KANUNLARI

Birinci ve üçüncü kanun statik durumla ilgilidir,Newton'un ikinci hareket kanunu ise dinamik olaylar incelenirken kullanılan temel ilkedir.

Matematiksel olarak Newton'un ikinci hareket kanunu şu şekilde yazılır

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Burada F cisme etki eden bileşke kuvveti, a ise bileşke kuvvet doğrultusunda cismin kazandığı ivmeyi göstermektedir. Pozitif skaler bir büyüklük olan m ise cismin kütesini ifade etmektedir.

Newton'un ikinci hareket kanunu ışık hızına kadar ulaşan cisimlerin hareketinde ve atom seviyesindeki çok küçük partiküllerin hareketinde kullanılamaz.



NEWTON'UN HAREKET KANUNLARI

Birbirine çekim kuvveti uygulayan herhangi iki cisim arasındaki çekim kuvveti Newton tarafından şu şekilde ifade edilmektedir.

$$F = G(m_1m_2/r^2)$$

burada F = İki cismin birbirine uyguladıkları çekim kuvvetini
 G = Evrensel çekim sabitini,
 m_1, m_2 = her bir cismin kütlesini ve
 r = iki cismin merkezleri arasındaki mesafeyi ifade etmektedir.

Eğer cisim dünya yüzeyinde ise cisme etki eden çekim kuvveti cismin ağırlığı olarak adlandırılır.



KÜTLE VE AĞIRLIK

Kütle ile ağırlık arasındaki farkı anlamak çok önemlidir!

Kütle cisimler için ayırt edici bir özelliktir. Kütle değeri cismin üzerine etkiyen çekim kuvvetinde bağımsızdır. Kütle cismin hız değişikliğine gösterdiği direnç oranını ifade ediyor diyebiliriz (Newton'un ikinci hareket kanununu hatırlayalım $m = F/a$).

Ağırlık ise kesin bir değer değildir. Ağırlık çekim kuvvetine bağlıdır. Ağırlık dünya üzerinde kütle ile yerçekimi ivmesinin çarpımı ile bulunur.

$$W = mg$$



BİRİMLER: SI SİSTEMİ

SI BİRİM SİSTEMİ: SI birim sisteminde kütle temel birimdir, ağırlık buradan türetilir.

Dinamik dersinde kullanılan çekimsel birim sisteminde, ağırlık birimi kilogramdır. Yerçekimi ivmesi g 'nin birimi ivme birimi m/s^2 ise teknik kütle birimi

$$W \text{ (kg)} = m \text{ (...) } g \text{ (m/s}^2\text{)} \Rightarrow m \text{ (kg}\cdot\text{s}^2\text{/m)}$$

olarak hesaplanır

Birimler

Boyutlar	Metrik Sistemler		İngiliz Birim Sistemi
Uzunluk	metre (m)	santimetre (cm)	ayak (ft)
Kütle	kilogram (kg)	gram (gr)	libre (lb)
Zaman	saniye (sn)	saniye (sn)	saniye (sn)
Kuvvet	Newton (kg.m/sn ²)	din (gr.cm/sn ²)	Poundal (lb.ft/sn ²)

Boyutlar	Metrik Birim Sisteminde Çekimsel Birim Sistemi	İngiliz Birim Sisteminde Çekimsel Birim Sistemi
Uzunluk	metre (m)	ayak (ft)
Kütle	Kg-sn ² /m	Slug (lb.sn ² /ft)
Zaman	saniye (sn)	saniye (sn)
Kuvvet	Kilogram (kg)	libre (lb)

BİRİMLER: SI SİSTEMİ

SI BİRİM SİSTEMİ: Yine SI birim sistemi kullanılması durumunda metre, kilogram ve saniyeyi kullanarak oluşturulan çekimsel birim sistemi tanımlanabilir. Ancak bu sistemde kilogram kütle birimi olarak değil kuvvet birimi olarak kullanılmaktadır.

$$W (..) = m (kg \cdot s^2/m) \quad g (m/s^2) \Rightarrow W = kg$$

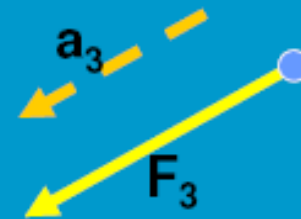
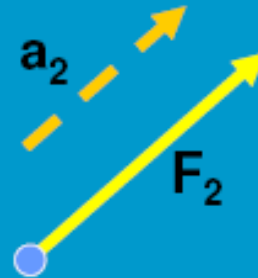
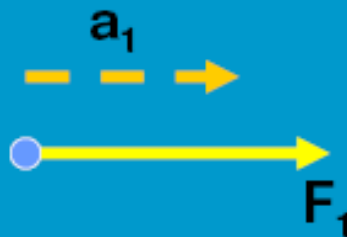


HAREKET DENKLEMİ

Newton'un ikinci kanunu hareket eden cisimler için geçerlidir. Cisim bileşke kuvvet doğrultusunda kütlesiyle orantılı olarak ivmelenir. Bu kanun şu şekilde ifade edilebilir:

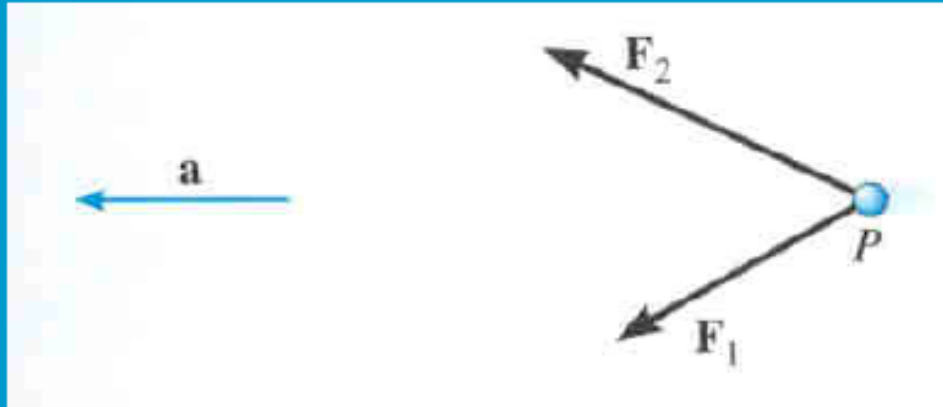
$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}_R = m\mathbf{a}$$

Burada $\mathbf{F}_R$ dengeyi bozan bileşke kuvveti ifade etmektedir. Bu ise tüm kuvvetlerin vektörel olarak toplanması ile bulunur.

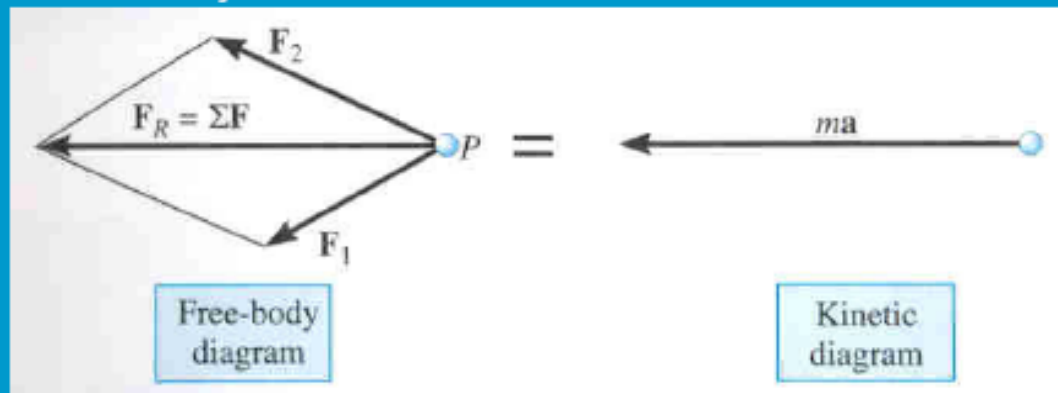


HAREKET DENKLEMİ

Şekildeki P noktası iki kuvvetin etkisi altında olsun



İlk olarak P noktasına etki eden tüm kuvvetlerin gösterildiği serbest cisim diyagramı çizilir. Bu kuvvetlerin bileşkesi bulunur ivmenin yönü böylece belirlenmiş olur.

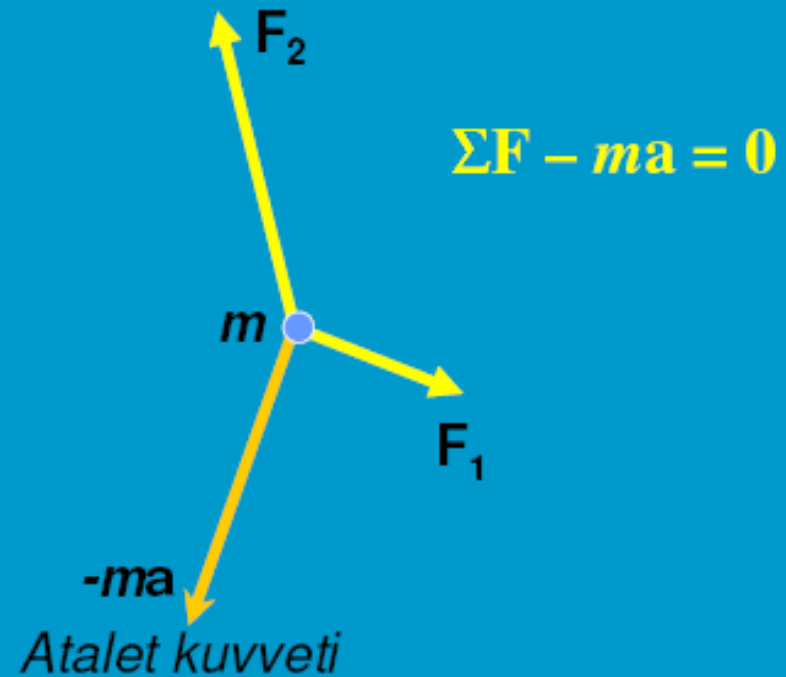
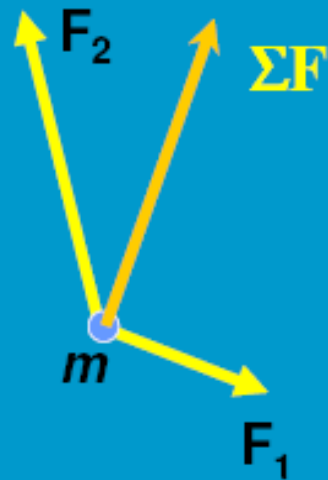


$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ genel denklemi her bir koordinat eksenine için şu şekilde yazılır.

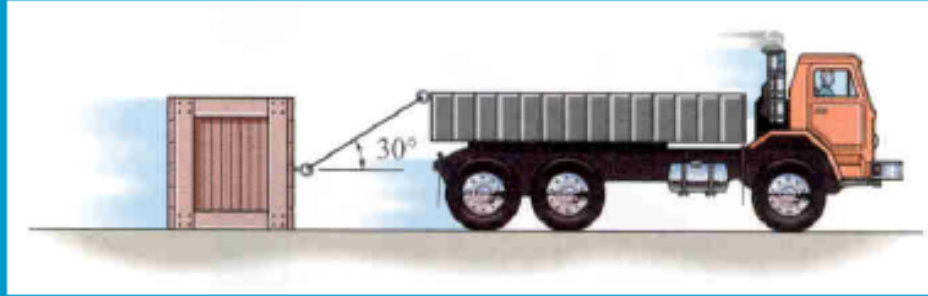
$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$\Sigma F_z = ma_z$$



ÖRNEK



Verilenler: Şekildeki araç arkasından kablo ile bağladığı kutuyu çekmektedir. Kutu ile zemin arasındaki sürtünme katsayısı μ_k olarak verilmektedir.

Find: Serbest cisim diyagramı ve kinetik denge diyagramını çiziniz.

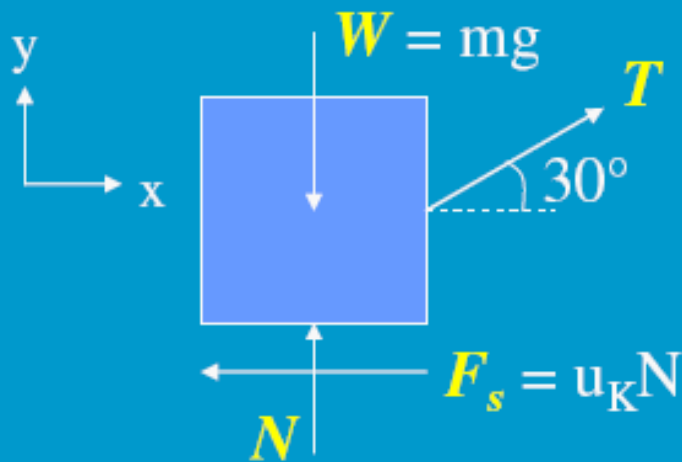
Plan:

- 1) Koordinat sistemi tanımlanacaktır.
- 2) Serbest cisim diyagramı çizilecek ve kutuya etki eden tüm kuvvetler belirlenecektir.
- 3) Hareket yönüne tam ters yönde atalet kuvvetleri yazılarak Kinetik denge diyagramı çizilir ve hareket denklemleri oluşturulur.



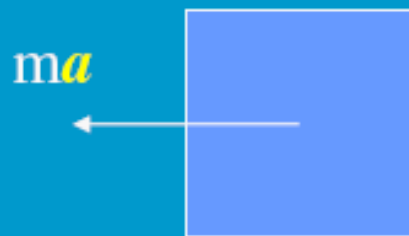
Örnek

- 1) Koordinat sistemi seçilir
- 2) Kutu için serbest cisim diyagramı çizilir



Kutunun merkezinde ağırlık (W), kablodaki çekme kuvveti T , zeminin tepki kuvveti (N) ve sürtünme kuvveti $F_s = u_K N$ çizilir.

- 3) Kinetik denge diyagramı için atalet kuvveti yazılır:



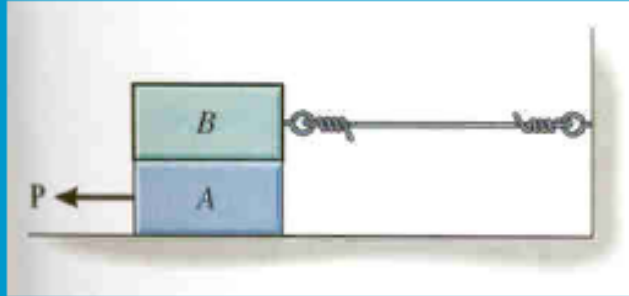
Kutu yatay yönde kamyon tarafından çekileceğinden atalet kuvveti tam ters yöndedir. Hareket denklemi

$$\Sigma F_x = ma \quad T_x - F_s = ma$$

$$T_x - F_s - ma = 0$$

ÖRNEK

Verilenler: Kütleleri m olan şekildeki blokların sürtünme katsayıları μ olarak verilmektedir. A kütlesi yatay yönde **P** kuvveti ile çekilmektedir.



İstenenler: Serbest cisim diyagramını ve kinetik denge diyagramını çiziniz.

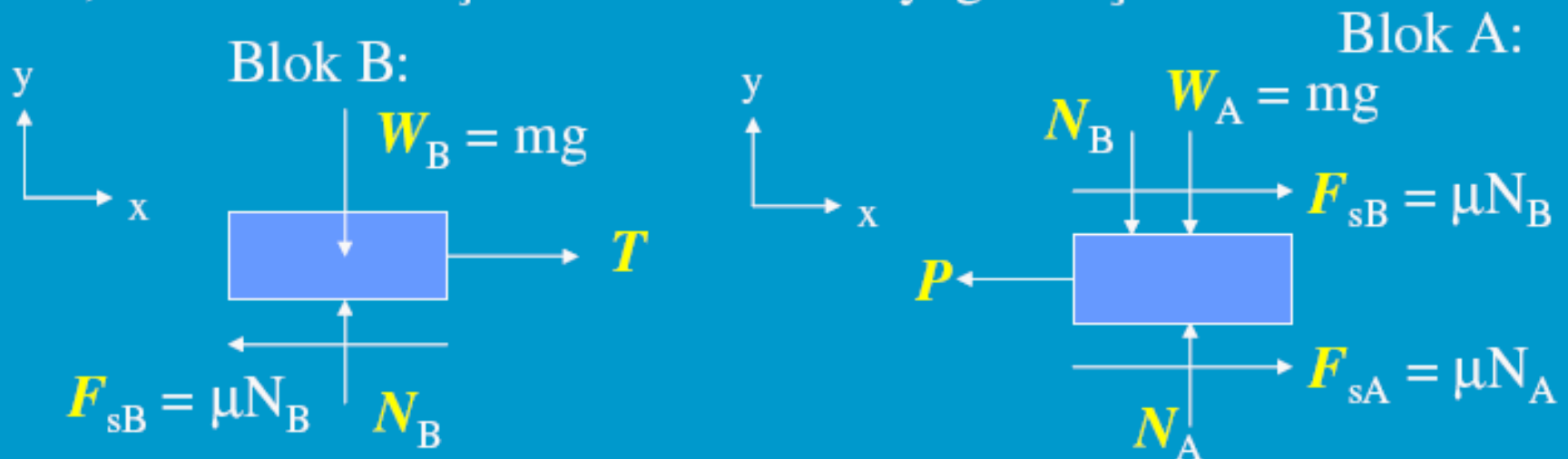
Plan:

- 1) Koordinat sistemini tanımlayınız.
- 2) Her bir blok için serbest cisim diyagramı çizilir
- 3) Her bir blok için atalet kuvvetleri yazılarak kinetik denge denklemleri yazılır.

ÖRNEK

Çözüm

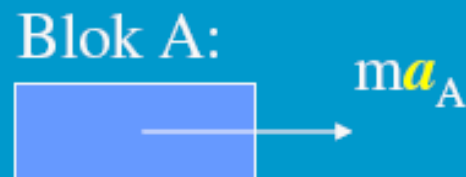
- 1) x-y koordinat sistemi seçilir
- 2) Her bir blok için serbest cisim diyagramı çizilir



- 3) Atalet kuvvetleri yazılarak kinetik denge yazılır:

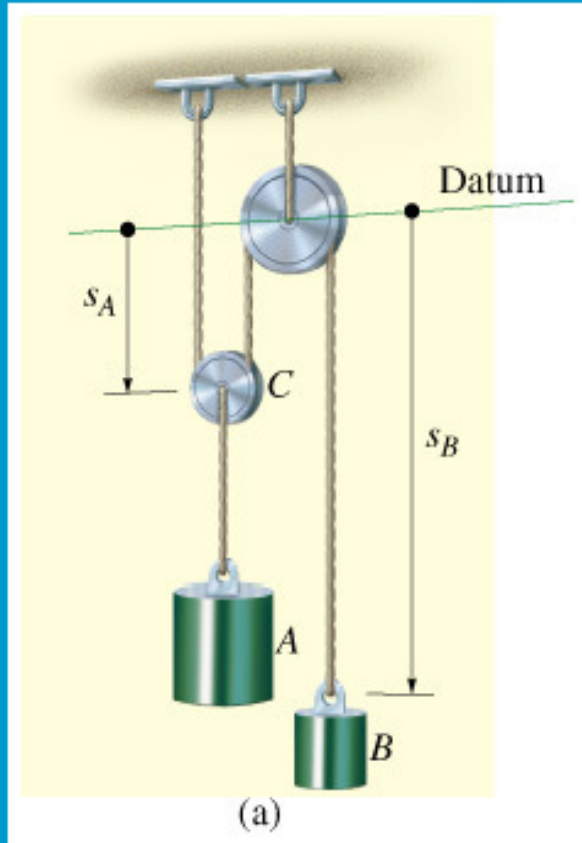


$$\Sigma F_x = ma_B \quad T - F_s = ma_B = 0$$



$$\Sigma F_x = ma_A \quad P - F_{sA} - F_{sB} = ma_B = 0$$

ÖRNEK



Verilenler: $m_a = 100$; $m_b = 20$ olan iki cisim şekildeki gibi makara sistemi ile taşınmaktadır. $t = 2$ sn sonra cisimlerin hızlarını bulunuz.

İsteneneler: $t = 2$ sn sonra cisimlerin hızlarını bulunuz.

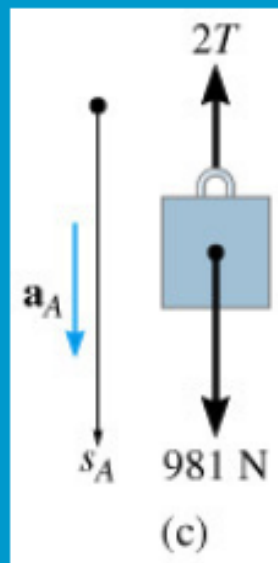
Plan: Her bir cisim için serbest cisim diyagramı çizelim ve atalet kuvvetlerini yazarak hareket denklemlerini oluşturalım

$$2s_A + s_B = l = s_b t$$

$$2a_A + a_B = 0$$



A Bloğu için serbest cisim diyagramı



$$\downarrow + \Sigma F_y = ma_A$$

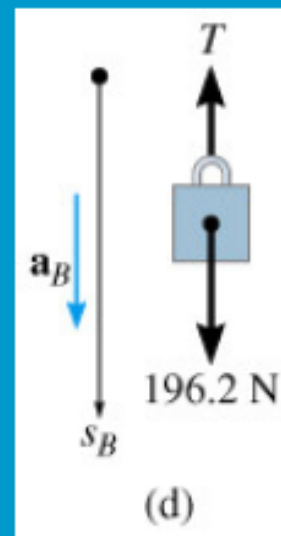
$$981 - 2T = 100a_A$$

$$2a_A + a_B = 0$$

$$T = 327 \text{ kg}$$

$$a_A = 3.27 \text{ m/s}^2$$

B Bloğu için serbest cisim diyagramı



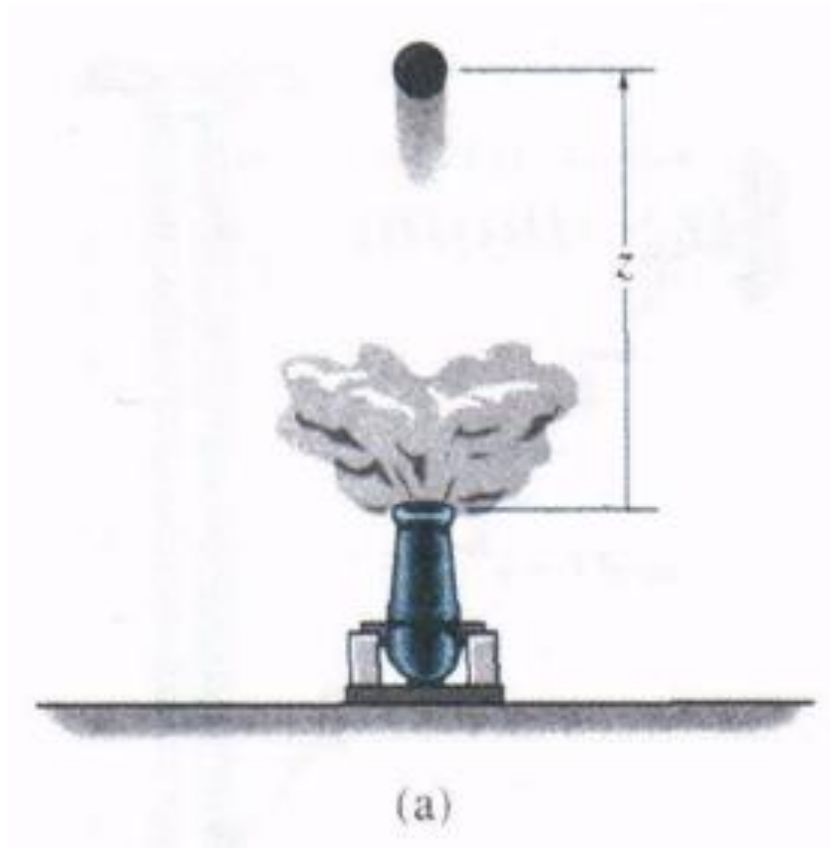
$$\downarrow + \Sigma F_y = ma_B$$

$$196.2 - T = 20a_B$$

$$a_B = -6.54 \text{ m/s}^2$$

Örnek

10 kg'lık bir top mermisi 50 m/s lik bir başlangıç hızı ile, yerden yukarıya doğru düşey olarak fırlatılıyor, (a) havanın direncini ihmal ederek, (b) v herhangi bir andaki, m/s cinsinden ölçülen hız olmak üzere, havanın direnci $F'_D = (0.01v^2)$ N olarak ölçüldüğüne göre, merminin ulaşabileceği maksimum yüksekliği belirleyiniz.



ÇÖZÜM

Her iki durumda, hareket denklemi kullanılarak, mermi üzerindeki bilinen kuvvetle merminin ivmesi arasında bir ilişki kurulabilir.

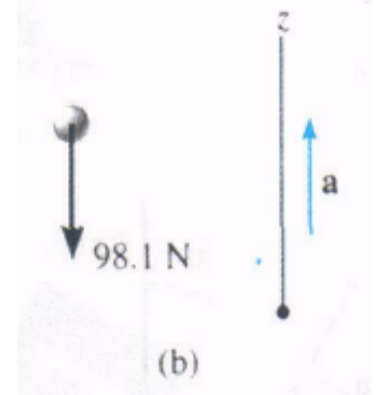
(a) *Serbest-Cisim Diyagramı.* Şekil b'de gösterildiği gibi, merminin ağırlığı $W = mg = 10 \text{ kg} (9.81 \text{ m/s}^2) = 98.1 \text{ N}$ 'dur. Bilinmeyen a ivmesinin yukarıya *doğru*, *pozitif* z yönünde etkidiğini varsayacağız.

Hareket Denklemi

$$+\uparrow \sum F_z = ma_z;$$

$$-98.1 = 10a,$$

$$a = -9.81 \text{ m/s}^2$$



dir. Bu sonuç, yer yüzeyine yakın bir yerde serbest uçuş hareketi yapan her cisim gibi, mermiye aşağıya doğru 9.81 m/s^2 'lik bir ivme uygulandığını gösterir.

Kinematik. Başlangıçta $z_0 = 0$ ve $v_0 = 50 \text{ m/s}$ 'dir ve $z = h$ olan maksimum yükseklikte $v=0$ dir. İvme sabit olduğundan,



$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(z - z_0)$$

$$0 = (50)^2 + 2(-9.81)(h - 0)$$

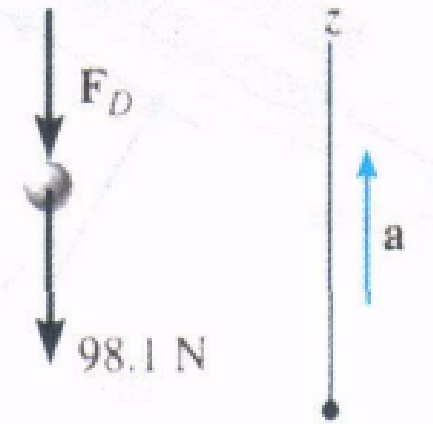
$$h = 127 \text{ m}$$

bulunur.

Serbest-Cisim Diyagramı. $F_D = (0.01v^2)$ N kuvveti merminin yukarıya doğru hareketini geciktirme eğiliminde olduğundan, serbest-cisim diyagramında gösterildiği gibi aşağıya doğru etki eder, Şekil 13-7c.

Hareket Denklemi *

$$+\uparrow \Sigma F_z = ma_z; \quad -0.01v^2 - 98.1 = 10a, \quad a = -0.001v^2 - 9.81$$



(c)

Kinematik. Burada ivme sabit değildir; ancak $a \, dz = v \, dv$ kullanılarak, hız yer değiştirme ile ilişkisi kurulabilir:

$$+\uparrow) a \, dz = v \, dv; \quad (-0.001v^2 - 9.81)dz = v \, dv$$

Denklem, değişkenlerine ayrılarak integre edilir ve $z_0 = 0$ $v_0 = 50$ m/s (pozitif-yukarı) başlangıç koşulu ve $z = h$, $v = 0$ koşulu dikkate alınır

$$\int_0^h dz = - \int_{50}^0 \frac{v \, dv}{0.001v^2 + 9.81} = -500 \ln(v^2 + 9810) \Big|_{50}^0$$

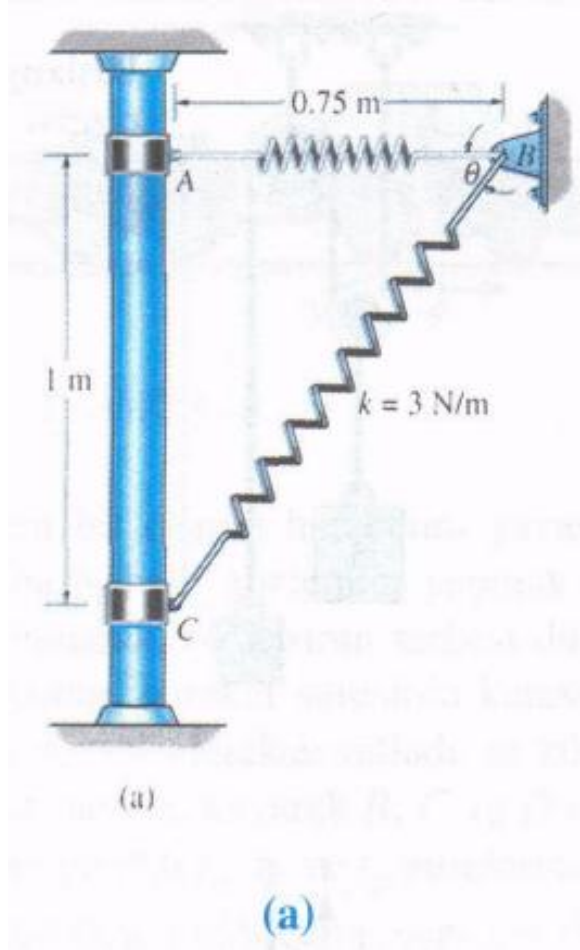
$h = 114 \text{ m}$

Yanıt

bulunur. Yanıt (a)'da bulunandan daha düşük bir yüksekliği göstermektedir Niçin?

Örnek

Şekilde gösterilen, 2 kg'lık sürtünmesiz bir C bileziği, yay katsayısı $k = 3 \text{ N/m}$ ve gerilmemiş haldeki uzunluğu 0.75 m olan bir yaya bağlanmıştır. Bilezik A'da durmakta iken bırakılırsa, $y = 1 \text{ m}$ olduğu andaki ivmesini ve çubuğun bilezik üzerine uyguladığı normal kuvveti belirleyiniz.



ÇÖZÜM

Serbest-Cisim Diyagramı. Bileziğin, keyfi y noktasında bulunduğu andaki serbest-cisim diyagramı Şekil b'de gösterilmiştir. Ağırlığın $W=2(9.81) = 19.62$ N olduğuna dikkat edelim. Ayrıca, bileziğin, " a " aşağı doğru pozitif y yönünde olacak şekilde hızlandığı varsayılacaktır. Dört bilinmeyen vardır: N_c , F_s , a ve θ .

Hareket Denklemleri. Şekil b'deki verileri kullanarak

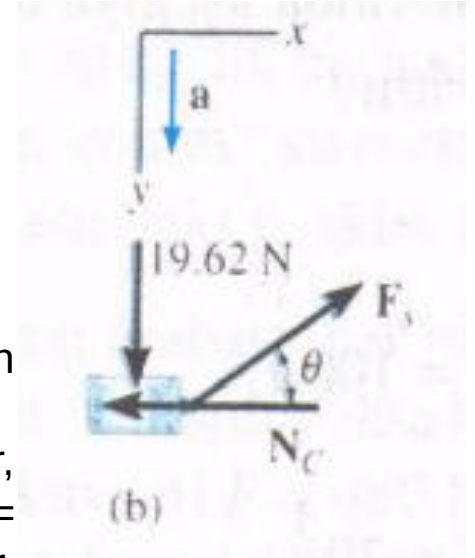
$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= ma_x; & -N_c + F_s \cos \theta &= 0 & (1) \\ +\downarrow \sum F_y &= ma_y; & 19.62 - F_s \sin \theta &= 2a & (2) \end{aligned}$$

buluruz. Denklem 2 den ivmenin sabit olmadığı, yay kuvvetinin büyüklük ve doğrultusuna bağlı olduğu görülüyor.

Yay kuvvetinin büyüklüğü, yayın s uzamasının bir fonksiyonudur, yani, $F_s = ks$ 'dir. Burada, yayın gerilmemiş haldeki uzunluğu $AB = 0.75$ m dir, dolayısıyla, $s = CB-AB = [\ y^2 + (0.75)^2 \]^{1/2} - 0.75$ 'dir. $k=3$ N/m olduğundan, böylece

$$F_s = ks = 3(\sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75) \quad (3)$$

bulunur.



Trigonometriden yararlanılarak, Şekil a 'dan, θ açısının y ile ilişkisi kurulur

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (0.75)^2}} \quad (4)$$

Denklem 3 ve 4 de $y = 1$ m yazılarak, $F = 1.50$ N ve $\theta = 53.1^\circ$ elde edilir. Bu sonuçların Denklem 1 ve 2'ye yerleştirmesiyle'de

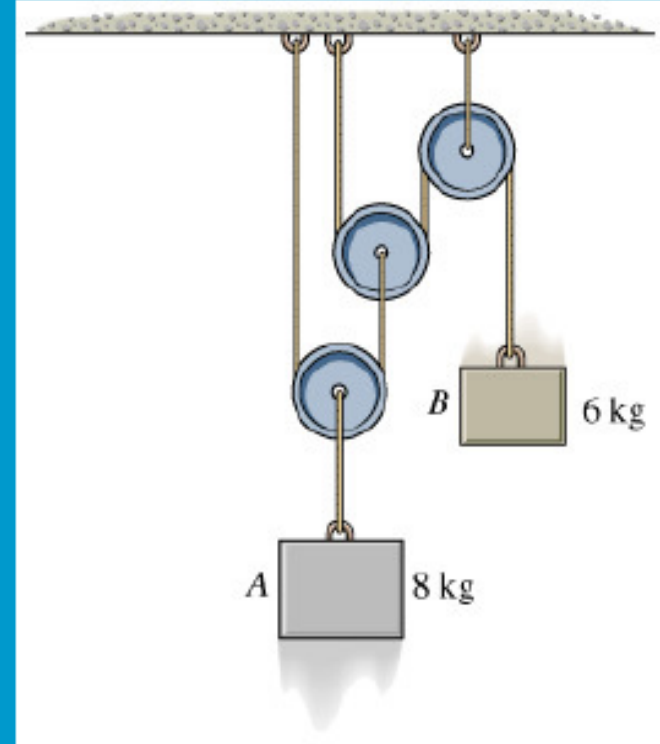
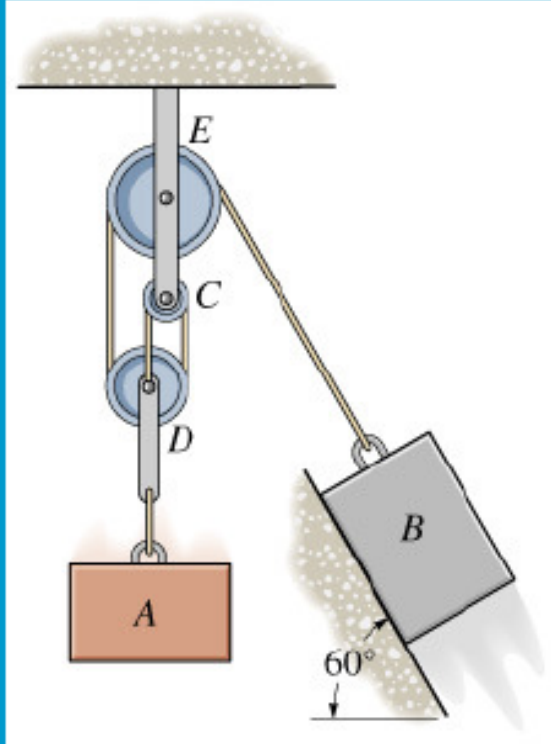
$$N_C = 0.900 \text{ N}$$

Yanıt

$$a = 9.21 \text{ m/s}^2 \downarrow$$

Yanıt

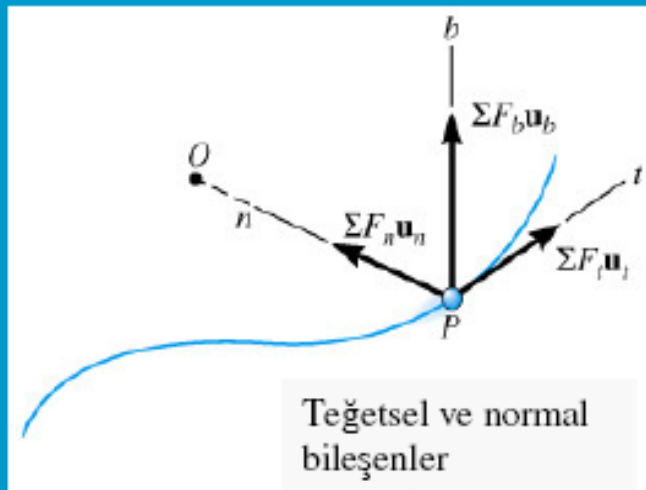
Çalışma Soruları



Yukarıdaki sistemler için serbest cisim diyagramlarını çizerek hareket denklemlerini oluşturunuz.



EĞRİSEL HAREKETLERİN KİNETİĞİ



Bir P maddesel noktası eğrisel bir yörünge üzerinde hareket ediyorsa ivmesi dik bileşenlere, teğetsel ve normal bileşenlere, veya Radyal ve radyale dik bileşenlere ayrılabilir.

Dik Bileşenler: P maddesel noktasına etkiyen F kuvvetleri ile maddesel noktanın a ivmesi dik bileşenlere ayrılırsa, Newton'un ikinci kanunu şu skaler denklemlerle ifade edilebilir.

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum F_z = ma_z$$

İvmenin bileşenleri, P nin koordinatlarının ikinci türevlerine eşit olduğundan,

$$\sum F_x = m\ddot{x} \quad \sum F_y = m\ddot{y} \quad \sum F_z = m\ddot{z}$$

Teğetsel ve Normal Bileşenler : Kuvvetleri ve maddesel noktanın ivmesini, $\mathbf{i}_t$ ve $\mathbf{i}_n$ birim vektörleri doğrultusunda bileşenlere ayırarak

$$\sum F_t = ma_t \qquad \sum F_n = ma_n$$

a_t ve a_n nin değerleri yerlerine konursa

$$\sum F_t = m \frac{dv}{dt} \qquad \sum F_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

Elde edilen bu denklemlerden iki bilinmeyen çözülür.

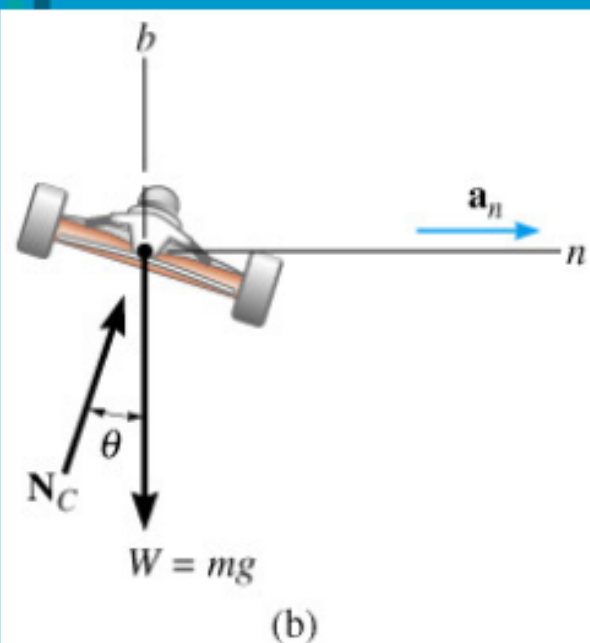


Şekilde görülen yarış pistinin eğim açısını, yarış araçlarının lastikleri sürtünmeye gerek kalmadan, araçların aşağı veya yukarı kaymasını engelleyecek şekilde bulunuz. Araçların ihmal edilir boyutlara, m kütlesine ve ρ yarıçaplı eğri etrafında v hızı ile hareket ettiklerini düşününüz.

Serbest Cisim Diyagramı : Şekilde görüldüğü gibi, ve soruda istendiği gibi sürtünme kuvveti araca etki etmemektedir. Burada N_C sadece yerin araca olan reaksiyon kuvvetlerinin bileşkesini ifade etmektedir. Burada a_n biliniyor.

Bilinmeyenler, N_C ve θ

Hareket Denklemleri : n ve b eksenlerine ait hareket denklemleri



$$\pm \rightarrow \Sigma F_n = ma_n; \quad N_C \sin \theta = m \frac{v^2}{\rho} \quad (1)$$

$$+ \uparrow \Sigma F_b = 0; \quad N_C \cos \theta - mg = 0 \quad (2)$$

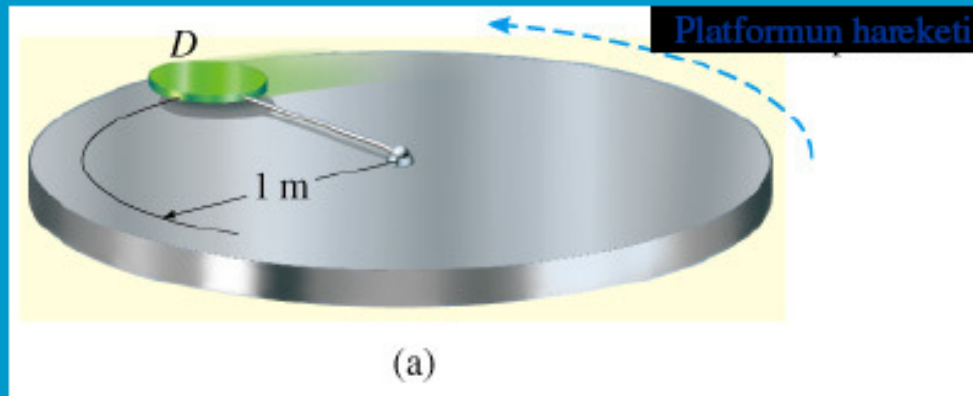


Birinci denklem ikinci denkleme bölünürse, N_c ve m 'ler gitmiş olur ve sadece θ bilinmeyişi kalır. Buradan,

$$\tan \theta = \frac{v^2}{g\rho}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{g\rho}\right)$$

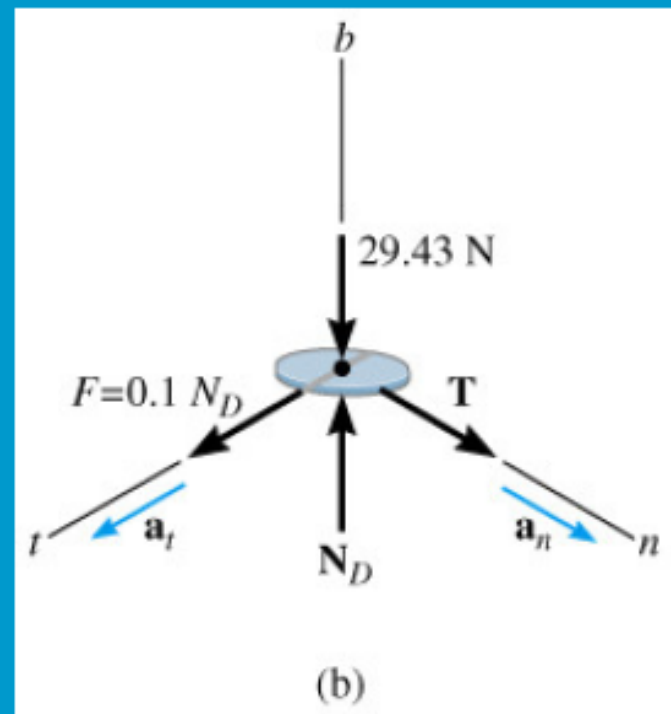
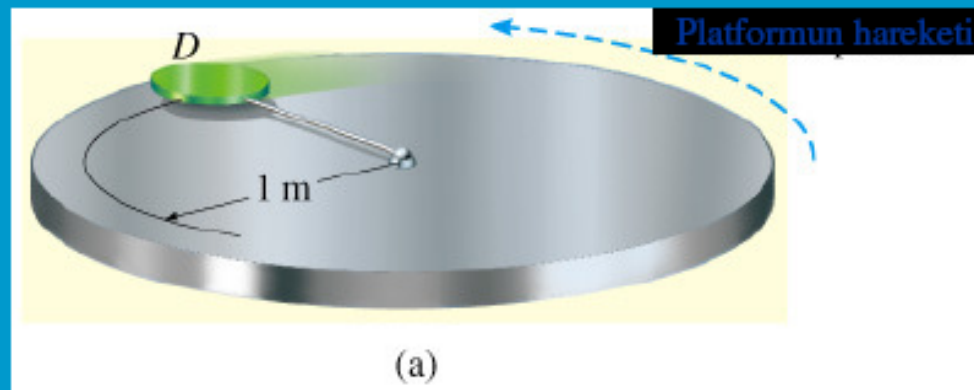
Dikkat edilecek olursa, sonuç, aracın kütlesi m 'den bağımsızdır.

ÖRNEK



Şekildeki $3\text{-kg}\cdot\text{sn}^2/\text{m}$ kütleyle sahip D diski, bir halat ile bağlanmıştır. Halatın diğer ucu, şekildeki platformun orta noktasında bulunan sokete yerleştirilmiş olan topta bağlanmıştır. Eğer platform hızla döndürülmeye başlatılırsa, ve disk şekildeki gibi serbest bırakılırsa, Halatın kopması için gereken hıza ulaşılan kadar geçen süreyi bulunuz? Halat 100 N 'luk bir çekme kuvveti taşıma kapasitesine sahiptir ve Disk ile platform arasındaki kinetik sürtünme katsayısı

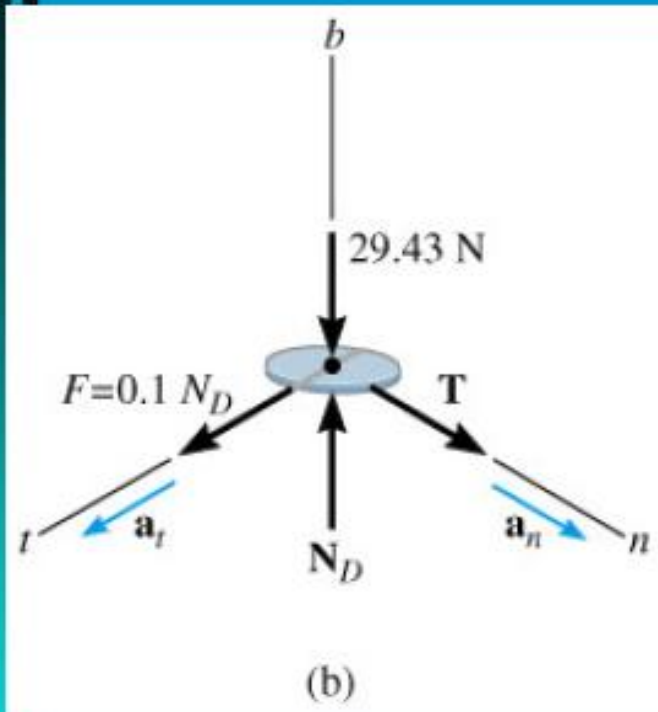
$\mu_k = 0.1$ dir.



Çözüm.

Serbest Cisim Diyagramı: Sürtünme kuvveti $F = \mu_k N_D = 0.1 N_D$ ve diskin platformuna göre bağıl hareketinin tersi yönündedir. Diskin ağırlığı $W = 3(9.81) = 29.43$ olarak bulunur.

a_n , v cinsinden yazılabildiği için burada bilinmeyenler N_D , a_t ve v dir.



Haraket Denklemi :

$$\Sigma F_n = ma_n; \quad T = 3\left(\frac{v^2}{1}\right) \quad (1)$$

$$\Sigma F_t = ma_t; \quad 0.1N_D = 3a_t \quad (2)$$

$$\Sigma F_b = 0; \quad N_D - 29.43 = 0 \quad (3)$$

$T=100$ N için denklem 1 çözülürse, halatın kopması için gerekli kritik hız bulunur ve tüm denklemlerden,

$$N_D = 29.43 \text{ N}$$

$$a_t = 0.981 \text{ m/s}^2$$

$$v_{\text{cr}} = 5.77 \text{ m/s}$$

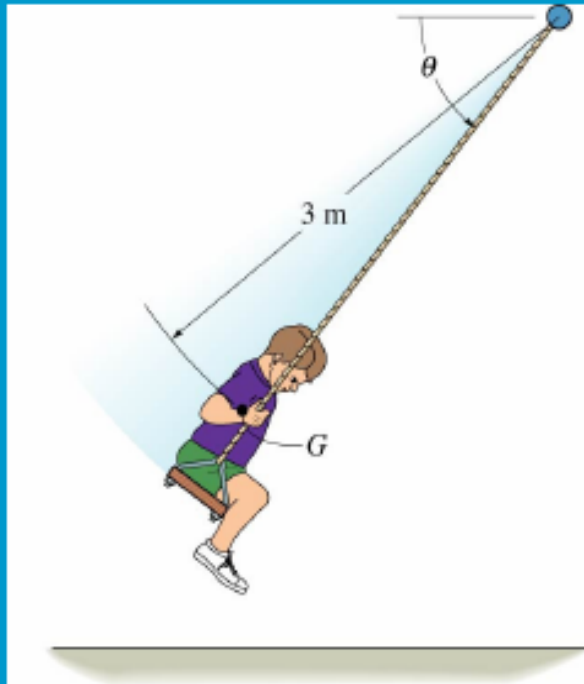
Kinematik : a_t nin sabit olmasından dolayı halatın kopması için geçmesi gereken süre,

$$v_{\text{cr}} = v_0 + a_t t$$

$$5.77 = 0 + (0.981)t$$

$$t = 5.89 \text{ s}$$

ÖRNEK



Given: At the instant $\theta = 60^\circ$, the boy's center of mass G is momentarily at rest. The boy has a weight of 300 N (=30 kg). Neglect his size and the mass of the seat and cords.

Find: The boy's speed and the tension in each of the two supporting cords of the swing when $\theta = 90^\circ$.

Plan:

- 1) Since the problem involves a curved path and finding the force perpendicular to the path, use n-t coordinates. Draw the boy's free-body and kinetic diagrams.
- 2) Apply the equation of motion in the n-t directions.
- 3) Use kinematics to relate the boy's acceleration to his speed.

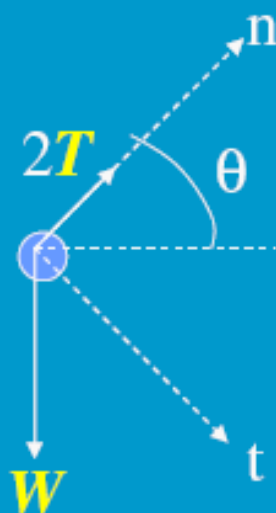


EXAMPLE (continued)

Solution:

- 1) The n-t coordinate system can be established on the boy at some arbitrary angle θ . Approximating the boy and seat together as a particle, the free-body and kinetic diagrams can be drawn.

Free-body diagram



Kinetic diagram



=

T = tension in each cord

W = weight of the boy

EXAMPLE (continued)

2) Apply the equations of motion in the n-t directions.

$$(a) \sum F_n = ma_n \Rightarrow 2T - W \sin \theta = ma_n$$

Using $a_n = v^2/\rho = v^2/10$, $w = 60$ lb, and $m = w/g = (60/32.2)$,

$$\text{we get: } 2T - 60 \sin \theta = (60/32.2)(v^2/10) \quad (1)$$

$$(b) \sum F_t = ma_t \Rightarrow W \cos \theta = ma_t$$

$$\Rightarrow 60 \cos \theta = (60/32.2) a_t$$

$$\text{Solving for } a_t: a_t = 32.2 \cos \theta \quad (2)$$

Note that there are 2 equations and 3 unknowns (T , v , a_t).
One more equation is needed.



EXAMPLE (continued)

3) Apply **kinematics** to relate a_t and v .

$$v \, dv = a_t \, ds \quad \text{where} \quad ds = \rho \, d\theta = 3 \, d\theta$$

$$\Rightarrow v \, dv = 9.81 \cos\theta \, ds = 9.81 \cos\theta (3 \, d\theta)$$

$$\Rightarrow \int_0^v v \, dv = \int_{60}^{90} 9.81 \cos\theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = 9.81 \sin\theta \Big|_{60}^{90} \Rightarrow v = 1.62 \, \text{m/s}$$

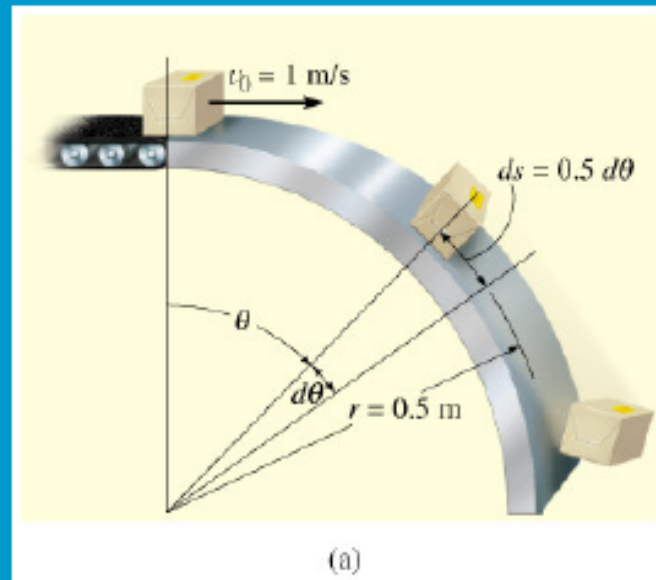
This v is the speed of the boy at $\theta = 90^\circ$. This value can be substituted into equation (1) to solve for T .

$$2T - 300 \sin(90^\circ) = \left(\frac{300}{9.81} \right) (1.62)^2 / 3$$

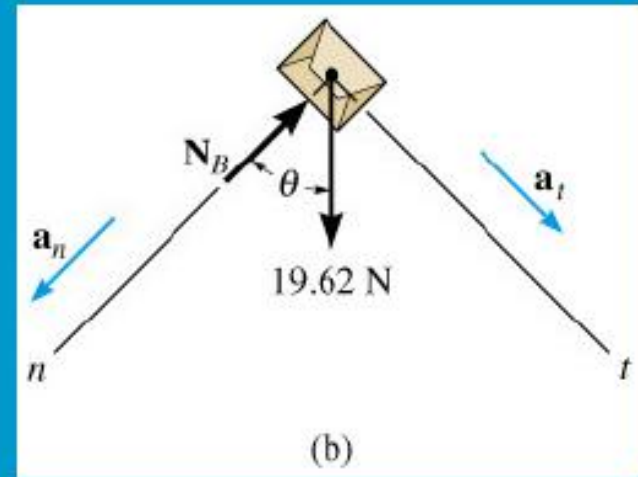
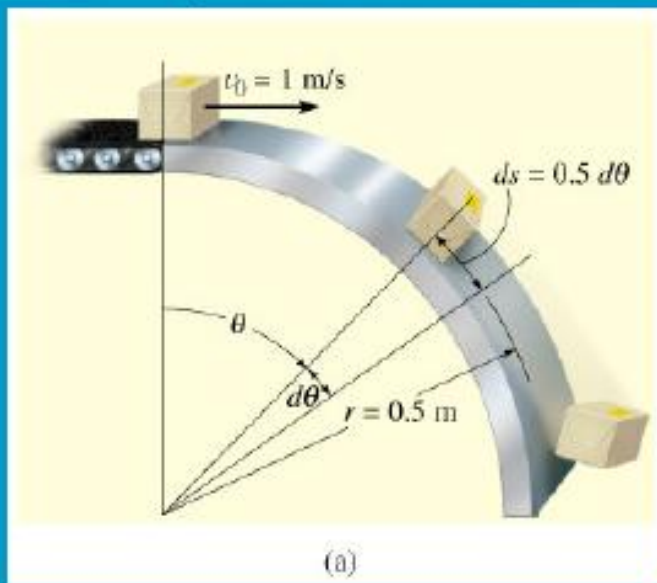
$$T = 163.4 \, \text{N} \quad (\text{the tension in each cord})$$



ÖRNEK



Şekilde de görüldüğü gibi herbiri 2 kg kütleye sahip koliler bir bant taşıma sistemi ile dairesel bir rampaya $v_0=1 \text{ m/s}$ hızla bırakılmaktadır. Rampanın yarı çapı 0.5 m olduğuna göre, Koliler rampanın yüzeyini terk ettiği andaki $\theta=\theta_{max}$ nedir?

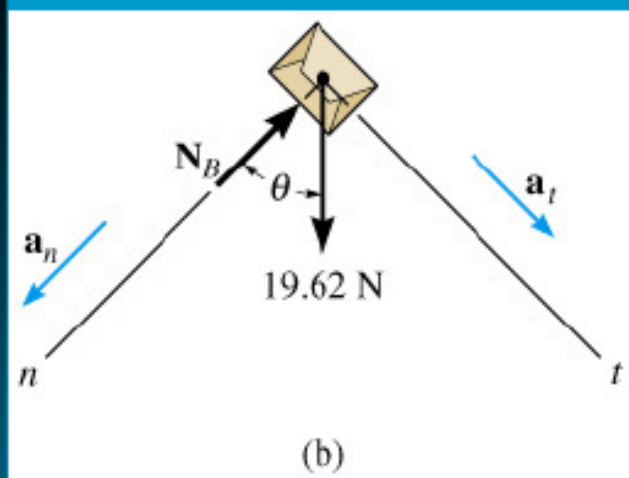


Serbest Cisim Diyagramı: Kolinin herhangi bir genel pozisyonundaki (θ) serbest cisim diyagramı şekilde görülmektedir. Koli aşağı doğru kayarken hızlandığı için kolinin a_t teğet ivmeye sahip olması gerekmektedir. Kolinin ağırlığı $W=2(9.81)=19.62$ N.

$$+\swarrow \Sigma F_n = ma_n; \quad -N_B + 19.62 \cos \theta = 2 \frac{v^2}{0.5} \quad (1)$$

$$+\searrow \Sigma F_t = ma_t; \quad 19.62 \sin \theta = 2a_t \quad (2)$$

$\theta = \theta_{\max}$ anında, koliler yüzeyden ayrıldığı için $N_B=0$ olmaktadır. Bundan dolayı bilinmeyenler v , a_t ve θ dir.



$$+\swarrow \Sigma F_n = ma_n; \quad -N_B + 19.62 \cos \theta = 2 \frac{v^2}{0.5} \quad (1)$$

$$+\searrow \Sigma F_t = ma_t; \quad 19.62 \sin \theta = 2a_t \quad (2)$$

Kinematik: Çözüm için üçüncü denklem a_t 'nin hız v ve açı θ cinsinden ifade edilmesi ile bulunabilir. Çünkü;

$$a_t = v \frac{dv}{ds} \quad a_t ds = v dv \quad ds = r d\theta = 0.5 d\theta$$

$$a_t = \frac{v dv}{0.5 d\theta} \quad (3)$$

Çözüm için 3 denklemi 2 denkleminde yerine konursa,

$$v dv = 4.905 \sin \theta d\theta$$

Kolinin banttın rampaya geçtiği andaki hızı $v_0=1$ m/s ve $\theta=0^\circ$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_1^v v dv &= 4.905 \int_{0^\circ}^{\theta} \sin \theta d\theta \\ \frac{v^2}{2} \Big|_1^v &= -4.905 \cos \theta \Big|_{0^\circ}^{\theta} \\ v^2 &= 9.81(1 - \cos \theta) + 1 \end{aligned}$$

$$\int_1^v v \, dv = 4.905 \int_{0^\circ}^\theta \sin \theta \, d\theta$$

$$\left. \frac{v^2}{2} \right|_1^v = -4.905 \cos \theta \Big|_{0^\circ}^\theta$$

$$v^2 = 9.81(1 - \cos \theta) + 1$$

$$+\nearrow \Sigma F_n = ma_n;$$

$$-N_B + 19.62 \cos \theta = 2 \frac{v^2}{0.5} \quad (1)$$

$$+\searrow \Sigma F_t = ma_t;$$

$$19.62 \sin \theta = 2a_t \quad (2)$$

v^2 denklem 1'de yerine konursa

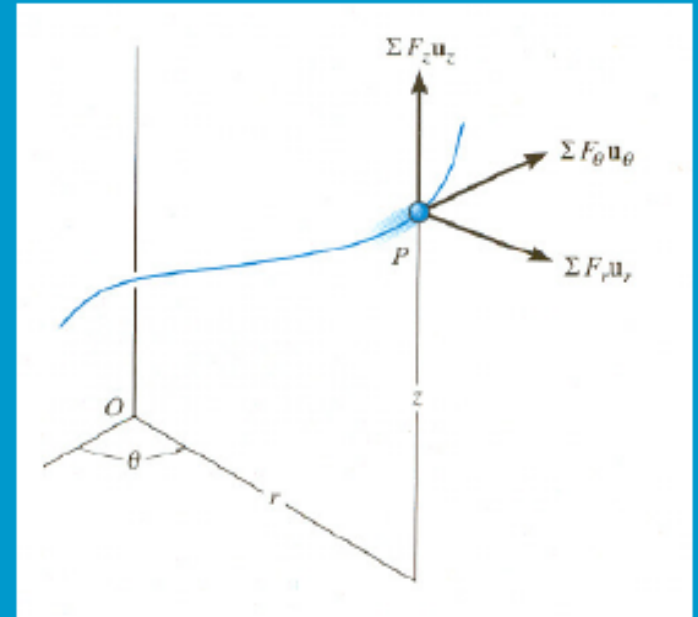
$$19.62 \cos \theta_{\max} = \frac{2}{0.5} [9.81(1 - \cos \theta_{\max}) + 1]$$

$$\cos \theta_{\max} = \frac{43.24}{58.86}$$

$$\theta_{\max} = 42.7^\circ \quad \text{Cevap}$$

Silindirik Koordinatlarda Denge Denklemleri

Polar Koordinatlarda hareket denklemleri yazılırken her bir koordinat bileşeni için ayrı ayrı denge denklemleri yazılır. Teğetsel ve normal bileşenler dışında cismin yüksekliğini belirten z koordinatında da denge yazılır.



Silindirik koordinatlarda (r , θ , ve z koordinatları ile) denge denklemleri kullanılarak hareket denklemleri elde edilirse:

$$\Sigma F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$\Sigma F_z = ma_z = m\ddot{z}$$

Eğer cisim sadece $r - \theta$ düzleminde hareket ediyorsa (z koordinatı sabit), hareket denklemlerinde sadece bu iki bileşen kullanılır. Bu durumda hareket denklemleri θ 'nın fonksiyonu olarak şu şekilde yazılabilir.

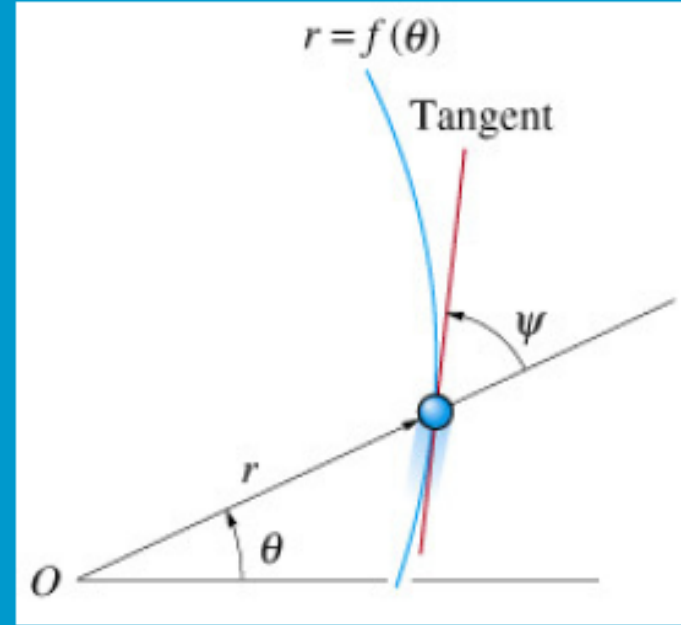
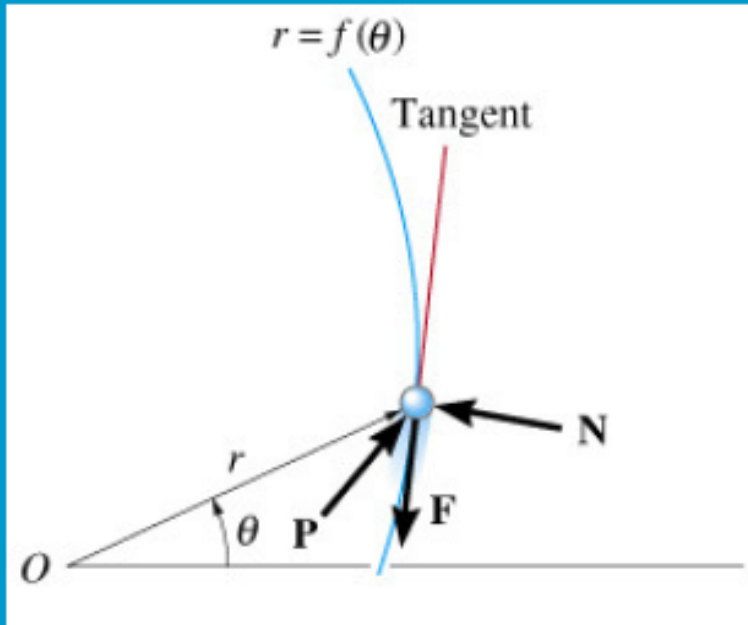
$$\sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta})$$

Burada kullanılan koordinat sistemi sabit bir koordinat sistemidir. Eğrisel hareket için kullanılan n-t koordinat sistemi gibi cisim merkezli sürekli değişen bir koordinat sistemi değildir.

TEĞETSEL VE NORMAL BİLEŞENLER

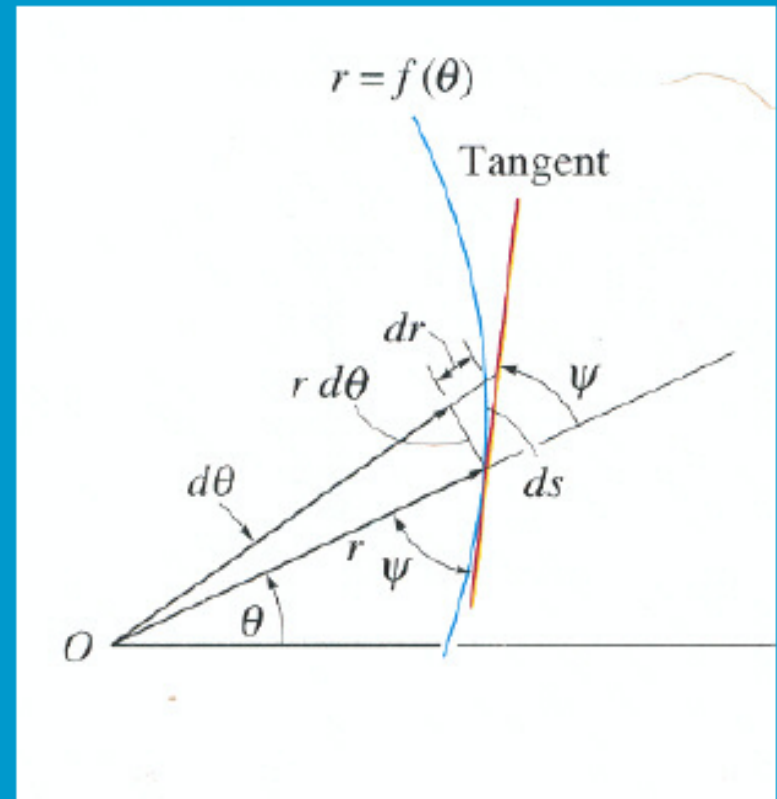
P kuvveti etkisi ile $r = f(\theta)$ konumunda hareket eden cisme etki eden normal kuvvet N ve teğetsel doğrultuda cismin hareketine ters yönde sürtünme kuvveti F olsun. N ve F kuvvetlerinin bulunduğu normal ve teğetsel koordinatların polar koordinat başlangıcına göre durumunu ifade eden açı ψ açısıdır.



Ψ Açısının Hesabı

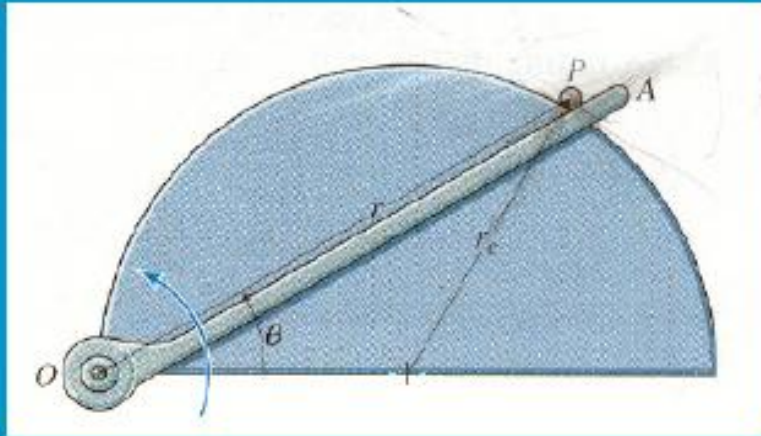
Ψ açısı eğri üzerinde hareket eden cismin polar koordinat sisteminden çizilen normal doğrultunun uzantısı ile eğriye çizilen teğet arasındaki açıdır. Bu açı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir,

$$\tan \psi = \frac{r \, d\theta}{dr} = \frac{r}{dr/d\theta}$$



Eğer ψ açısı pozitif ise, normal doğrultudan saat yönüne ter solarak ölçülmüştür, eğer negatif ise saat yönünde ölçülmüştür.

ÖRNEK



Verilenler: Şekildeki P cismi OA çubuğunun dönmesi ile hareket etmektedir. $m = 2$, $\dot{\theta} = 0.4 \text{ rad/s}$, $\ddot{\theta} = 0.8 \text{ rad/s}^2$, $r_c = 0.4 \text{ m}$ olarak verilmektedir

İstenenler: $\theta = 30^\circ$ olduğu konumda OA kolunun cisme uyguladığı tepki kuvvetini bulunuz.

Plan: Serbest cisim diyagramını çizelim, silindirik koordinatlarda hareket denklemlerini atalet kuvvetlerini kullanarak yazalım

Çözüm: $r = 2r_c \cos\theta$, buradan:

$$\dot{r} = -2r_c \sin\theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = -2r_c \cos\theta \dot{\theta}^2 - 2r_c \sin\theta \ddot{\theta}$$



Serbest Cisim Diyagramı: P cismi üzerindeki tüm kuvvetleri gösterelim. Harekete tam ters yönde atalet kuvvetlerini yazalım.

ÖRNEK

Kinematik: $\theta = 30^\circ$ için

$$r = 2(0.4) \cos(30^\circ) = 0.693 \text{ m}$$

$$\dot{r} = -2(0.4) \sin(30^\circ)(0.4) = -0.16 \text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = -2(0.4) \cos(30^\circ)(0.4)^2 - 2(0.4) \sin(30^\circ)(0.8) = -0.431 \text{ m/s}^2$$

Buradan ivme bileşenleri

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -0.431 - (0.693)(0.4)^2 = -0.542 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (0.693)(0.8) + 2(-0.16)(0.4) = 0.426 \text{ m/s}^2$$

$$\tan \psi = r/(dr/d\theta) \quad dr/d\theta = -2r_c \sin\theta$$

$$\tan \psi = (2r_c \cos\theta)/(-2r_c \sin\theta) = -1/\tan\theta \quad \therefore \psi = 120^\circ$$



Örnek

Kinetiks:

$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$N_s \cos(30^\circ) - 2 (9.81) \sin 30^\circ = 2(-0.542)$$

$$N_s = 10.08$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta$$

$$N_{OA} + 10.08 \sin(30^\circ) - 2 (9.81) \cos 30^\circ = 2(0.426)$$

$$N_{OA} = 12.81 \text{ N}$$



CİSİMLERİN KİNETİĞİ

İş ve Enerji

İŞ VE ENERJİ İLKESİ

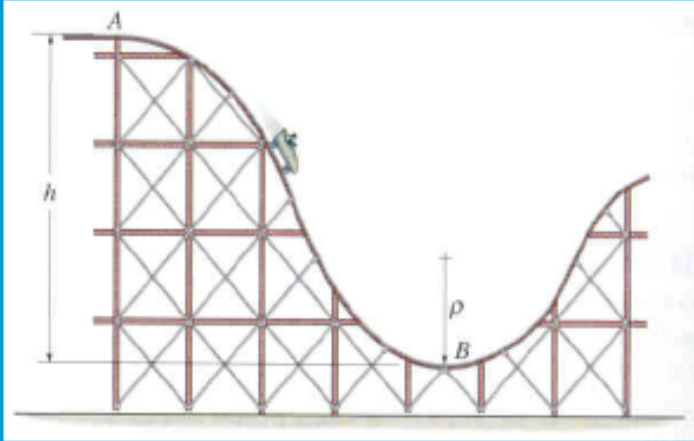


Bugünkü Konular:

- a) Bir kuvvetin yaptığı işin hesaplanması.
- b) Maddesel nokta ve cisimler için iş ve enerji ilkelerinin uygulanması.



UYGULAMALAR



Şekildeki gibi hareket eden aracın yerçekimi etkisi ile ulaşacağı en büyük hız değeri nedir?

Bu araç projelendirilirken yükseklik(h), eğrilik yarıçapı (ρ) gibi parametreler yolcuların güvenliği açısından nasıl seçilmelidir.



Çarpma varilleri, yollar boyunca kullanılmaktadır. Bu variller aracın kinetik enerjisini absorbe eder.

Eğer gelen aracın hızı ve her bir varilin enerji absorbe edebilme kapasitesini biliniyorsa, bu çarpışma varilleri nasıl dizayn edilir.

İŞ ve ENERJİ

Kinetik problemler çözümü için oluşturulacak diğer bir denklem hareket denkleminin ($F = ma$) yer değiştirmeye göre integrali alınarak elde edilir.

Hareket denkleminde $F_t = ma_t$, ivme yerine $a_t = v (dv/ds)$ konularak integral alınırsa iş ve enerji ilkesi olarak bilinen denklem elde edilir.

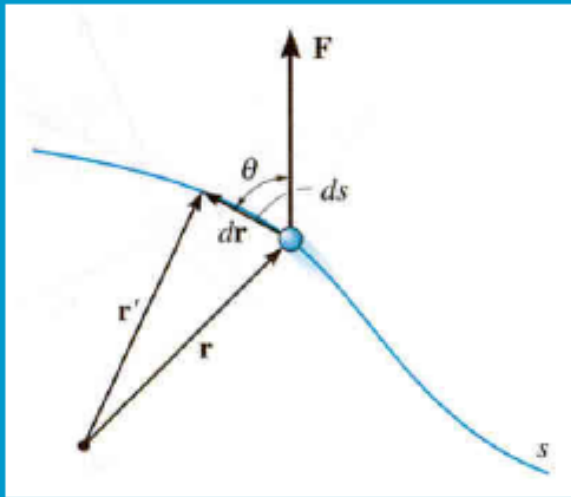
Kuvvet, hız ve yer değiştirme ile ilgili problemlerin çözümü için bu yöntem çok kullanışlıdır. Bu denklem kullanılarak ayrıca güç ile ilgili ifadelerde elde edilmektedir.

Bu yöntemi kullanmak için, ilk olarak bir kuvvetin yaptığı işin nasıl hesaplandığını anlamalıyız.



BİR KUVVETİN YAPTIĞI İŞ

Bir kuvvet etkidiği cismin, kuvvetin etkidiği yönde yer değiştirmesine sebep olursa iş yapar.



Bir kuvvetin yaptığı iş, kuvvet ile o doğrultuda cismin yer değiştirmesinin çarpımına eşittir. Böylece, kuvvet ile yer değiştirme vektörleri arasındaki θ açısı ise

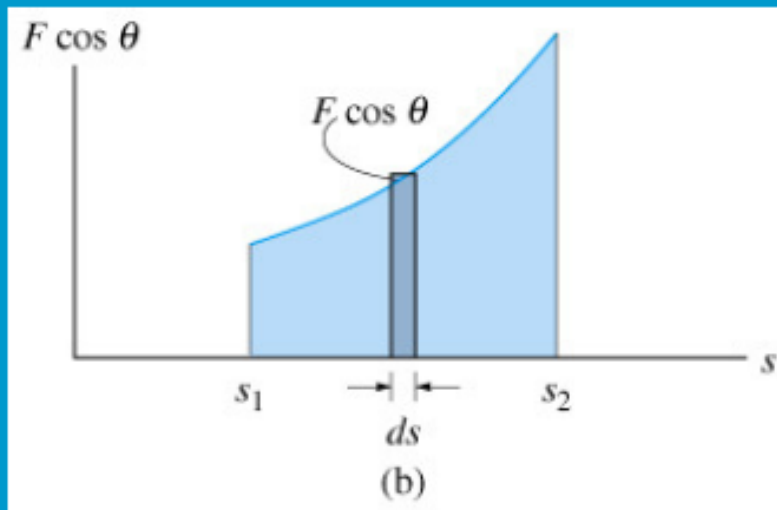
$$dU = F ds \cos \theta$$

Bir kuvvetin iki nokta arasında yaptığı iş şu şekilde de yazılabilir.

$$U_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



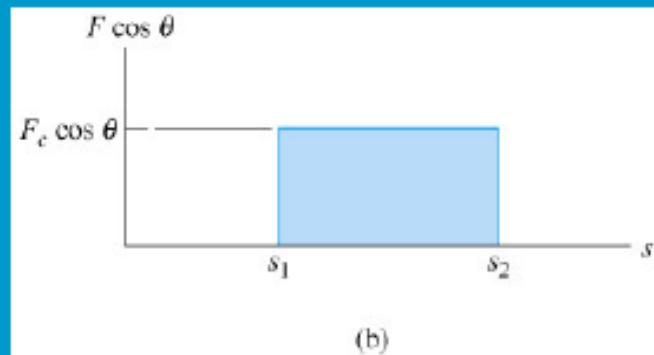
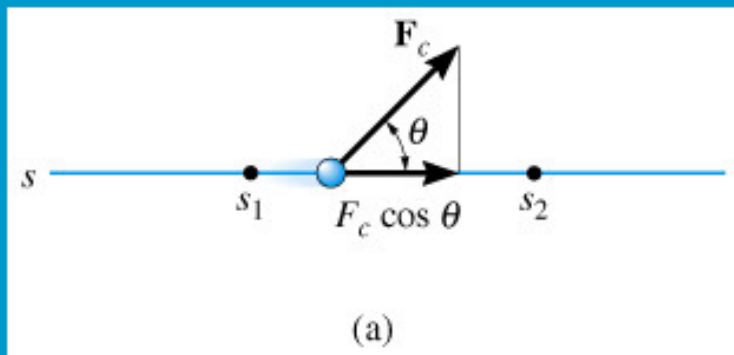
Eğer kuvvet (F) konumun bir fonksiyonu ise denklem



$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \theta \, ds$$

Kuvvet F ve θ sabit ise o halde denklem aşağıdaki hale dönüşür.

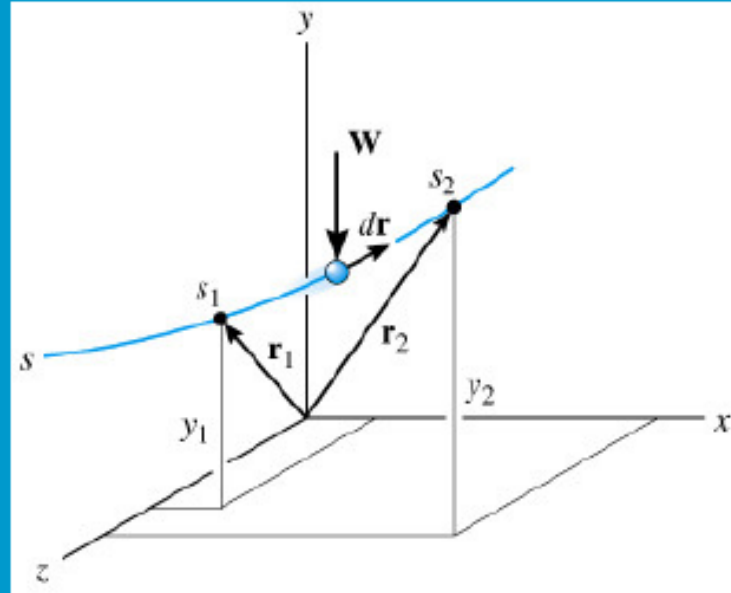
$$U_{1-2} = F_c \cos \theta (s_2 - s_1)$$



Eğer uygulanan kuvvet ile cismin yer değiştirmesi aynı yönde ise iş pozitif, ters yönde ise iş negatiftir. Eğer kuvvet ile yer değiştirme vektörü birbirine dik ise iş sıfırdır.

BİR AĞIRLIĞIN YAPTIĞI İŞ

Bir cismin ağırlığının yaptığı iş aşağıdaki ifade ile hesaplanabilir.

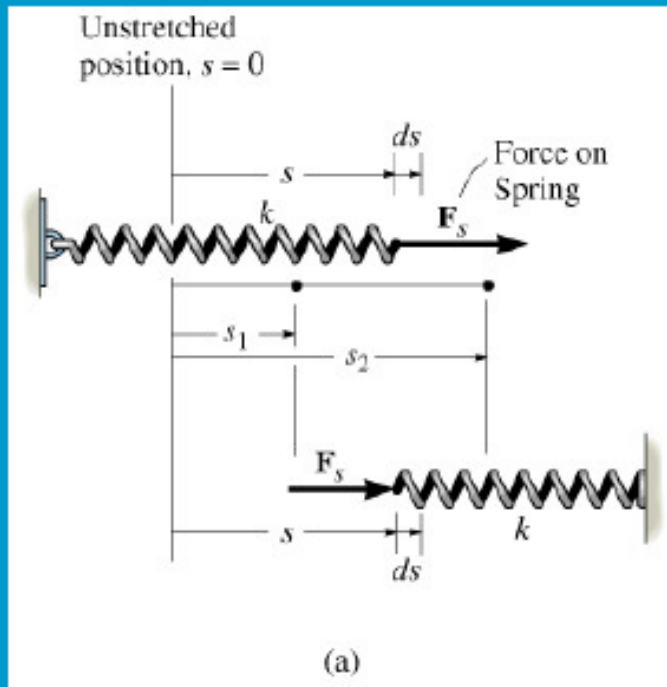


$$U_{1-2} = \int_{y_1}^{y_2} -W \, dy = -W (y_2 - y_1) = -W \Delta y$$

W ağırlığının işi, W ile cisim ağırlık merkezinin düşey yer değiştirmesinin çarpımına eşittir. Eğer cisim yukarıya doğru hareket ediyorsa, iş negatiftir.



YAYDAKİ KUVVETİN YAPTIĞI İŞ



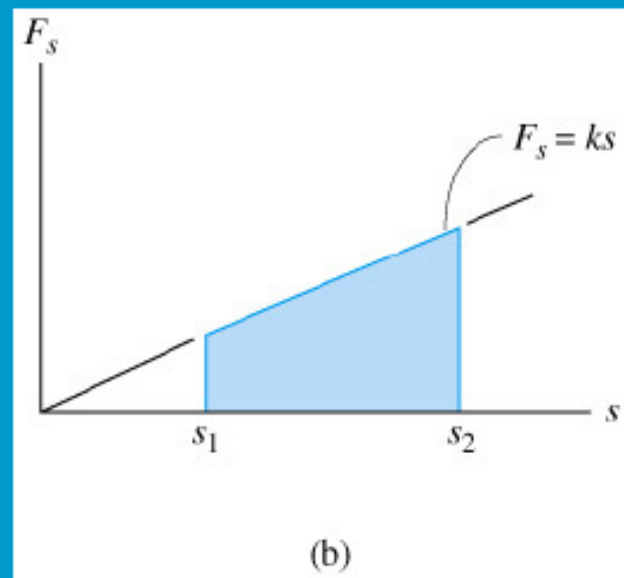
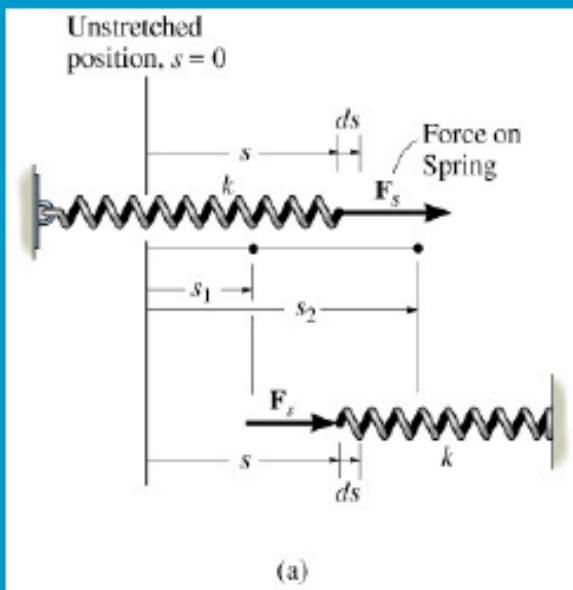
Bir lineer elastik yay F kuvveti ile çekilirse, yayda meydana gelen kuvvet $F = k x$ şeklinde hesaplanır. k rijitlik katsayısıdır, x ise yayın başlangıçtaki konumuna göre yer değiştirme miktarıdır.

Eğer yay üzerindeki kuvvetten dolayı x_1 konumundan x_2 konumuna geçerse bu yayda yapılan iş

$$U_{1-2} = -\int_{x_1}^{x_2} F_s dx = -\int_{x_1}^{x_2} k x dx = 0.5k(x_1)^2 - 0.5k(x_2)^2$$



YAYDAKİ KUVVETİN YAPTIĞI İŞ



Yaydaki F kuvvetinin işi, $x_2 > x_1$ olması durumunda (yani yay açılıyorsa) negatiftir; $x_2 < x_1$ olması durumunda (yani yay sıkıştırılıyorsa) pozitiftir.

$$U_{1-2} = - [0.5k (x_2)^2 - 0.5k (x_1)^2] .$$

YAYDAKİ KUVVETLERİ

Yaydaki kuvvetler hakkında önemli notlar:

1. Bu ifadeler sadece lineer elastik yaylar için geçerlidir.
 $F = k x$.
2. Yaydaki kuvvetin yaptığı iş kuvvet ile yer değiştirmenin çarpımına eşit değildir. Dikkat!!!
3. Yaydaki kuvvetin yaptığı işi yazarken işarete dikkat ediniz. Yayda mevcut bir sıkışma veya açılma varsa ve yay daha sonra ilk konumuna dönmeye çalışıyorsa yayda yapılan iş pozitifdir. Bunun dışında yayda yapılan iş negatiftir.



İŞ ve ENERJİ İLKESİ

Hareket denkleminin , $\sum F_t = ma_t = mv(dv/ds)$, integrali alınarak iş ve enerji ilkesi şu şekilde yazılabilir:

$$\sum U_{1-2} = 0.5m(v_2)^2 - 0.5m(v_1)^2 \quad \text{or} \quad T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$$

$\sum U_{1-2}$ ifadesi 1 konumundan 2 konumuna hareket eden cismin üzerinde etki eden tüm kuvvetlerin yaptığı işi göstermektedir.

T_1 and T_2 ifadeleri ilk konumdaki ve son konumdaki kinetik enerji olarak tanımlanır. Burada $T_1 = 0.5 m (v_1)^2$ ve $T_2 = 0.5 m (v_2)^2$. Kinetik enerji her zaman pozitif skalerdir (hızın karesi olduğundan).

Cismin son konumdaki kinetik enerjisi, cismin ilk konumdaki kinetik enerjisi ile cismin üzerine etki eden tüm kuvvetlerin yaptığı işin toplamına eşittir.



İş ve enerji ilkesi vektörel bir eşitlik değildir ($T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$) Bu denklemdeki tüm ifadeler skaler büyüklüklerdir.

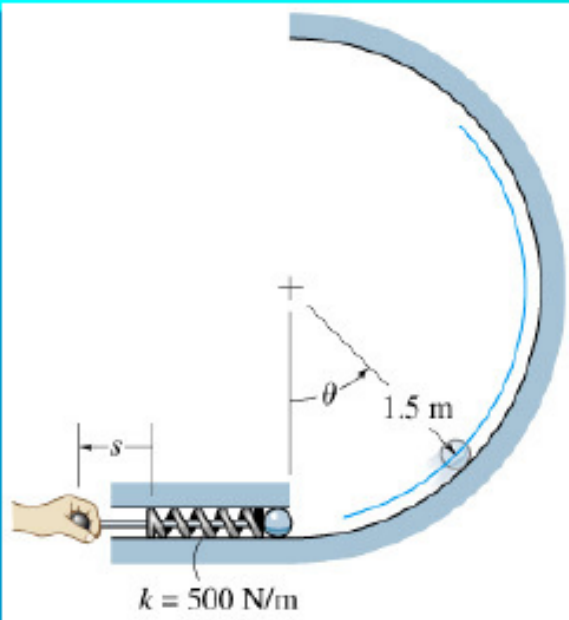
Kinetik enerji ve iş ifadelerinin birimlerinin aynı olması gerekir, SI birim sisteminde enerji birimi **joule** (J) olarak tanımlanır, $1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$ dir.

Genel olarak iş ve enerji ilkesi yörüngeye (hareket yönüne) dik kuvvetler için kullanılamaz, çünkü yörüngeye dik kuvvetin yaptığı iş sıfırdır.



ÖRNEK

Kütlesi 0.5 olan cisim şekildeki gibi 1.5 metre yarıçaplı fırlatma düzeneği ile atılmaktadır. Yay rijitlik katsayısı $k = 500$ kg/m ve $s = 0$ konumunda yayın 0.08 metre gerildiği bilindiğine göre



Yay serbest bırakıldığında cismin $\theta = 135^\circ$ konumunda rampadan ayrıldığına göre, yaydaki çekme mesafesi s 'i bulunuz

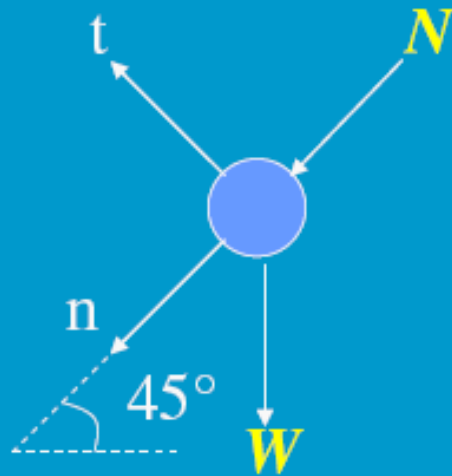
- Plan:**
- 1) $\theta = 135^\circ$ konumundaki serbest cisim diyagramını çizelim
 - 2) Yörüngeye dik (normal) yönde hareket denklemi yazılarak yayın serbest bırakıldığı durumda cismin sahip olduğu hızı bulalım
 - 3) s mesafesini hesaplamak için iş enerji ilkesini kullanalım.



ÖRNEK

Solution:

1) Serbest Cisim Diyagramı $\theta = 135^\circ$



Ağırlık cismin merkezinden aşağıya doğru etki etmektedir. Cisme etki eden normal kuvvet merkeze doğrudur.

Sürtünme kuvvetinin normal doğrultuda bileşeni yoktur.

2) Normal doğrultudaki hareket denklemi $\theta = 135^\circ$ konumu için yazılırsa $N = 0$.

$$\Rightarrow \swarrow + \sum F_n = ma_n = m (v^2/\rho) \Rightarrow W \cos 45^\circ = m (v^2/\rho)$$

$$\Rightarrow (0.5)(9.81) \cos 45^\circ = (0.5/1.5)v^2 \Rightarrow v = 3.2257 \text{ m/s}$$



3) 1 konumu ($\theta = 0$) ve 2 konumu ($\theta = 135^\circ$) arasında iş enerji ilkesi yazılırsa

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$0.5m (v_1)^2 - W \Delta y + (0.5k(s_2)^2 - 0.5k (s_1)^2) = 0.5m (v_2)^2$$

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 3.2257 \text{ m/s}$$

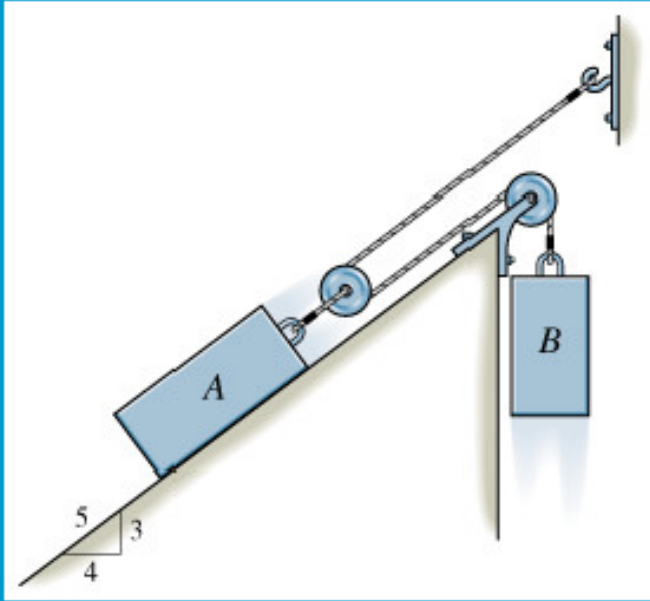
$$s_2 = s + 0.08 \text{ m}, \quad s_1 = 0.08 \text{ m}$$

$$\Delta y = 1.5 + 1.5 \sin 45^\circ = 2.5607 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 - (0.5)(9.81)(2.5607) + [0.5(500)(s+0.08)^2 - 0.5(500)(0.08)^2] \\ = 0.5(0.5)(3.2257)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s = 0.179 \text{ m} = 179 \text{ mm}$$





ÖRNEK

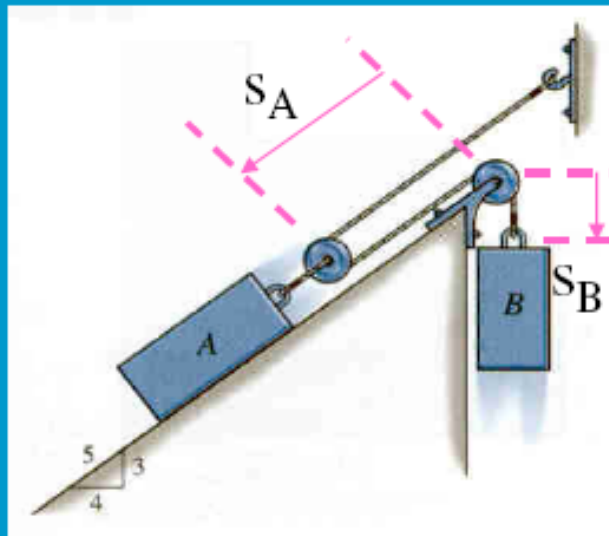
Ağırlığı 60 kg olan A cismi ve ağırlığı 10 kg olan B cismi ile şekildeki düzenekle is. çekilmektedir. A cismi ile yüzey arasındaki sürtünme katsayısı $\mu_k = 0.2$ bilindiğine göre

A cisminin 3 metre hareket ettikten sonra sahip olduğu hızı bulunuz

- Plan:**
- 1) Bloklar arasındaki kinematik bağıntılar yazılır
 - 2) Her bir blok için serbest cisim diyagramı çizilir
 - 3) Blokların oluşturduğu sistem için genel iş ve enerji ilkesi yazılır

Çözüm:

- 1) Bloklar arasındaki kinematik bağıntılar yani yer değiştirme ve hız bağıntıları makara ip boyları kullanılarak yazılır.



Sistemde makara ip boyu sabit olduğundan:

$$2s_A + s_B = l$$

$$2\Delta s_A + \Delta s_B = 0$$

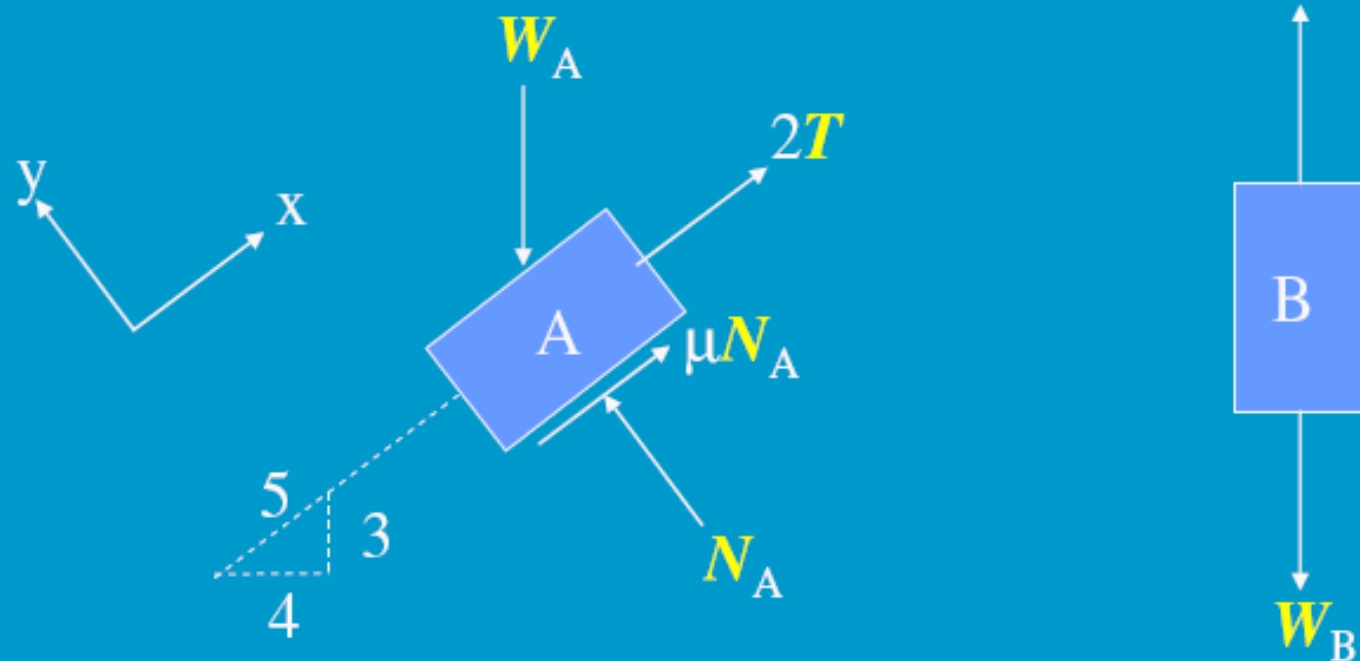
$$\Delta s_A = 3\text{m} \Rightarrow \Delta s_B = -6\text{m}$$

$$2v_A + v_B = 0$$

$$\Rightarrow v_B = -2v_A$$

Her bir makara için s mesafeleri makaradan cisme doğru pozitif olarak tanımlanırsa s_A ve s_B şekildeki gibidir.

2) Her bir cisim için SCD çizilirse.



y-doğrultusunda A bloğunda denge yazılırsa

$$\sum F_y = 0: N_A - (4/5)W_A = 0 \Rightarrow N_A = (4/5)W_A$$

3) Sistem için iş ve enerji ilkesi uygulanırsa

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2$$

$$(0.5m_A(v_{A1})^2 + 0.5m_B(v_{B1})^2) + ((3/5)W_A - 2T - \mu N_A)\Delta s_A + (W_B - T)\Delta s_B = (0.5m_A(v_{A2})^2 + 0.5m_B(v_{B2})^2)$$

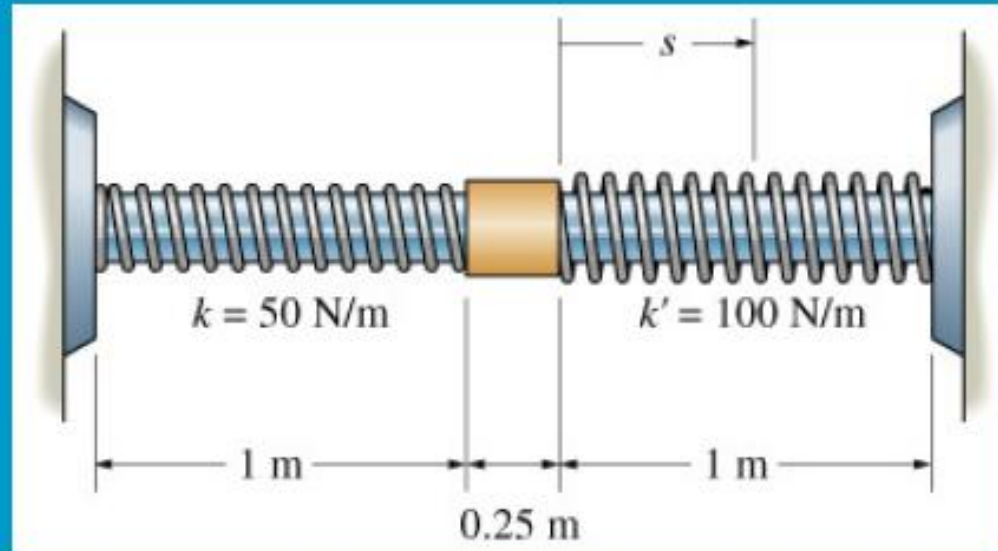
$$v_{A1} = v_{B1} = 0, \Delta s_A = 3 \text{ m}, \Delta s_B = -6 \text{ m}, v_B = -2v_A, N_A = (4/5)W_A$$

$$\Rightarrow 0 + 0 + (3/5)(60)(3) - 2T(3) - (0.2)(0.8)(60)(3) + (10)(-6) - T(-6) = 0.5(60/9.81)(v_{A2})^2 + 0.5(10/9.81)(-2v_{A2})^2$$

$$\Rightarrow v_{A2} = 1.94 \text{ m/s}$$



ÖRNEK

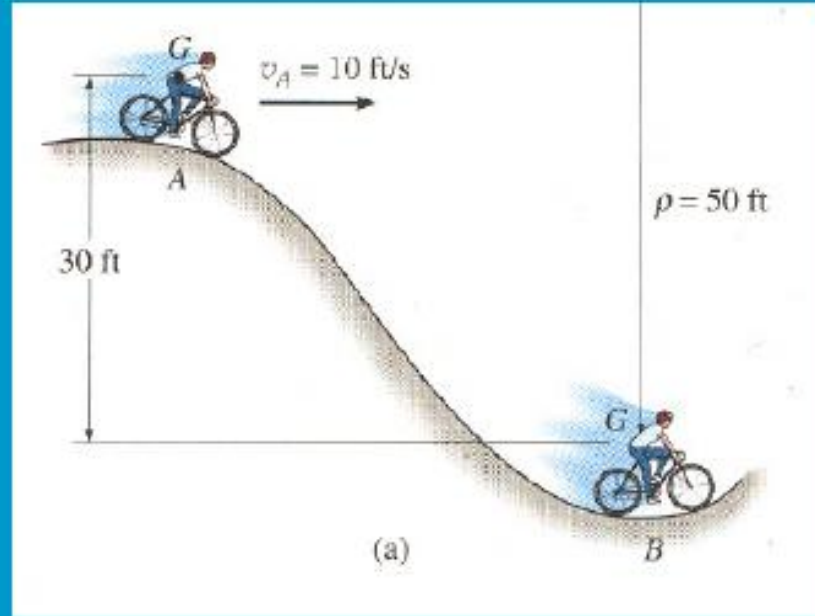


Kütlesi 20 olan cisim $s=1$ metre sağa doğru çekildikten sonra serbest bırakılmaktadır. Cismin tekrar $s=0$ olduğu noktaya geldiğinde sahip olduğu hızı bulunuz.

CİSİMLERİN KİNETİĞİ

Potansiyel Enerji

POTANSİYEL ENERJİ VE ENERJİNİN KORUNUMU

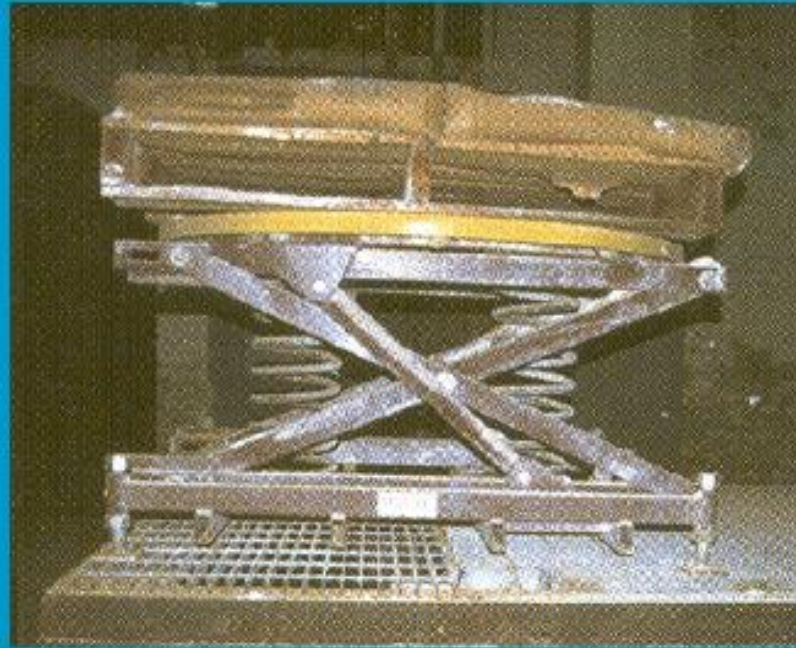


Bugünkü Konular

- a) Potansiyel enerji kavramı
- b) Enerjinin korunumu ilkesi ve uygulamaları.



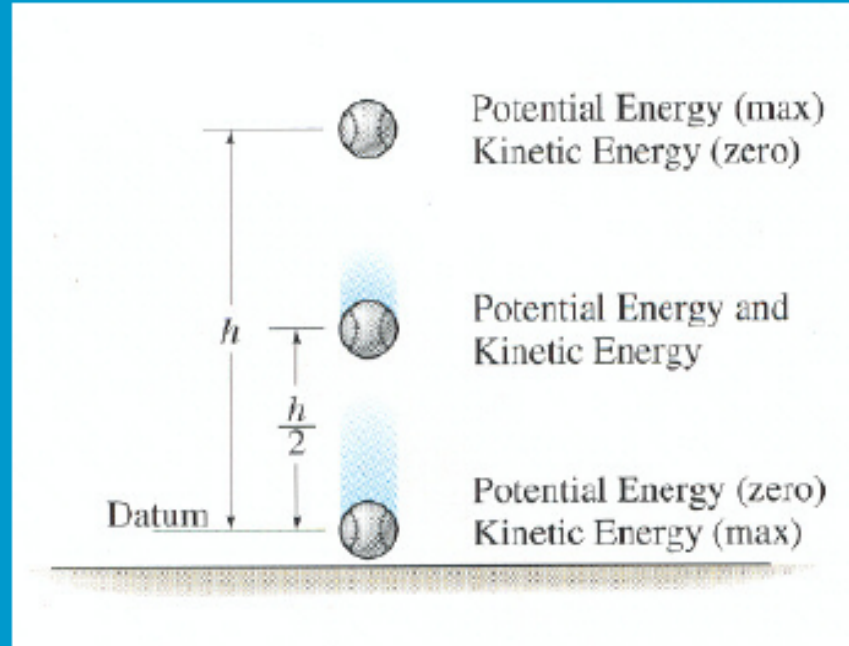
Uygulamalar



Şekildeki yaylı düzenek üzerindeki ağırlıktan dolayı sıkışmıştır. Bu durumda yayda bir enerji birikimi olmuş mudur.

Eğer düzeneğin üzerindeki ağırlık 100 kg ise yay rijitlik katsayısı $k = 500 \text{ kg/m}$ ise yayda depolanan enerji miktarı nedir?

Uygulamalar



Ağırlığı W olan cisim h yüksekliğinden ilk hızsız serbest bırakılıyor, kıyas düzlemine göre bu cismin yüksekliğinden dolayı sahip olduğu bir potansiyel enerjisi bulunmaktadır. İlk durumda cismin hızı olmadığından kinetik enerjisi sıfırdır. Cisim aşağıya doğru hareket ederken, yüksekliği azaldığı için potansiyel enerjisi azalmakta ama hızı arttığı için de kinetik enerjisi artmaktadır.

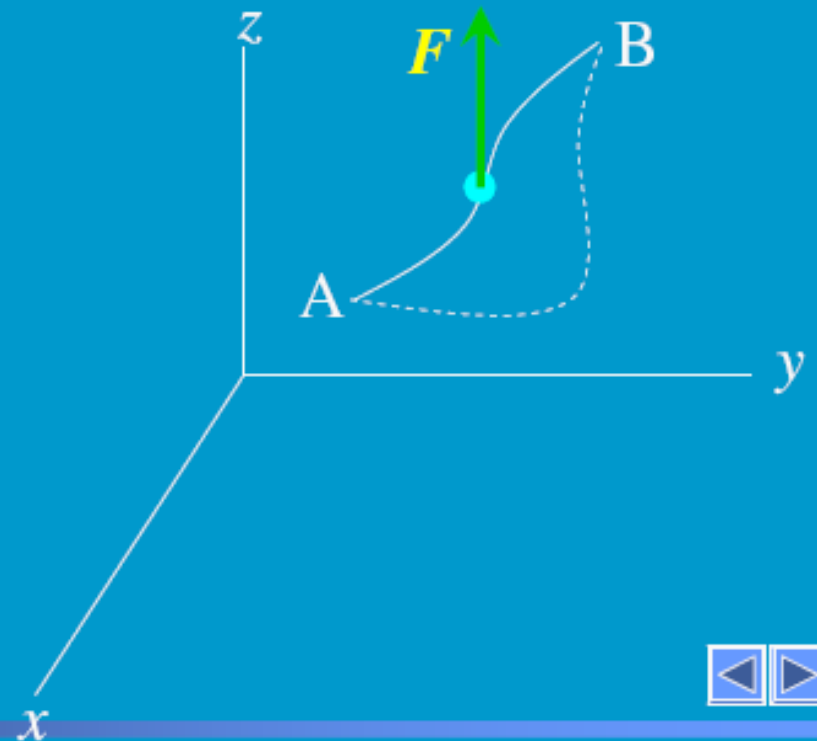


Konservatif Kuvvet

Bir $\mathbf{F}$ kuvvetinin cismi A noktasından B noktasında götürünceye kadar yaptığı iş yörüngeden bağımsız ise bu kuvvete konservatif kuvvet denir. Başka bir deyişle $\mathbf{F}$ kuvvetinin yaptığı işin hesaplandığı yörünge kapalı bir şekildir. Yani kuvvet bir süre sonra tekrar harekete başlanılan yere gelmektedir.

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Konservatif kuvvetler cismin pozisyonu ile ilgilidir, cismin hızı ve ivmesinden bağımsızdır.



Potansiyel Enerji

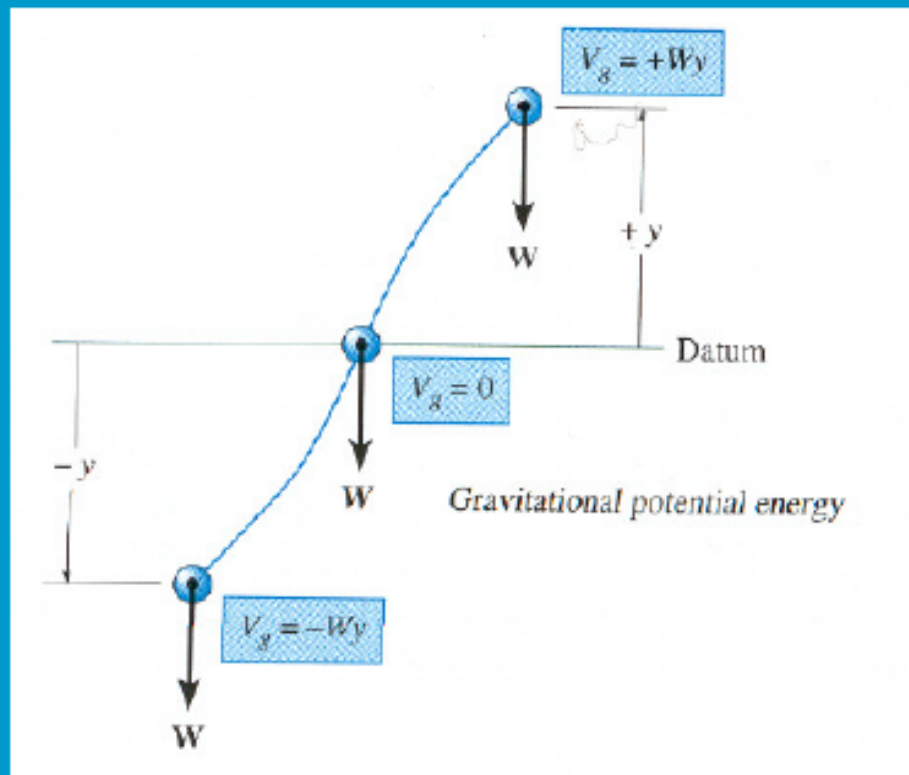
Potansiyel enerji , konservatif kuvvetlerin pozisyon değiştirdiklerinde, kuvvetin yaptığı işte meydana gelen değişikliği ifade etmektedir.

Genel olarak, herhangi bir konservatif kuvvetler sisteminde, potansiyel enerji (V) cismin sahip olduğu pozisyonun fonksiyonu olarak tanımlanır.



Yerçekimine göre Potansiyel Enerji

Yerçekimi sebebiyle oluşan ağırlık kuvvetinin ($W = mg$), herhangi bir kıyas düzlemine göre sahip olduğu yükseklik ile çarpımı bu cismin sahip olduğu potansiyel enerjiyi vermektedir. Kıyas düzlemi olarak herhangi bir yer seçilir.



$$V_g = \pm W y$$

Eğer y yüksekliği kıyas düzlemine göre pozitif bir değerse V_g potansiyel enerji pozitifdir, eğer y negatif ise potansiyel enerji negatiftir. Burada önemli olan kıyas düzlemi olarak hangi düzlemin alındığıdır.

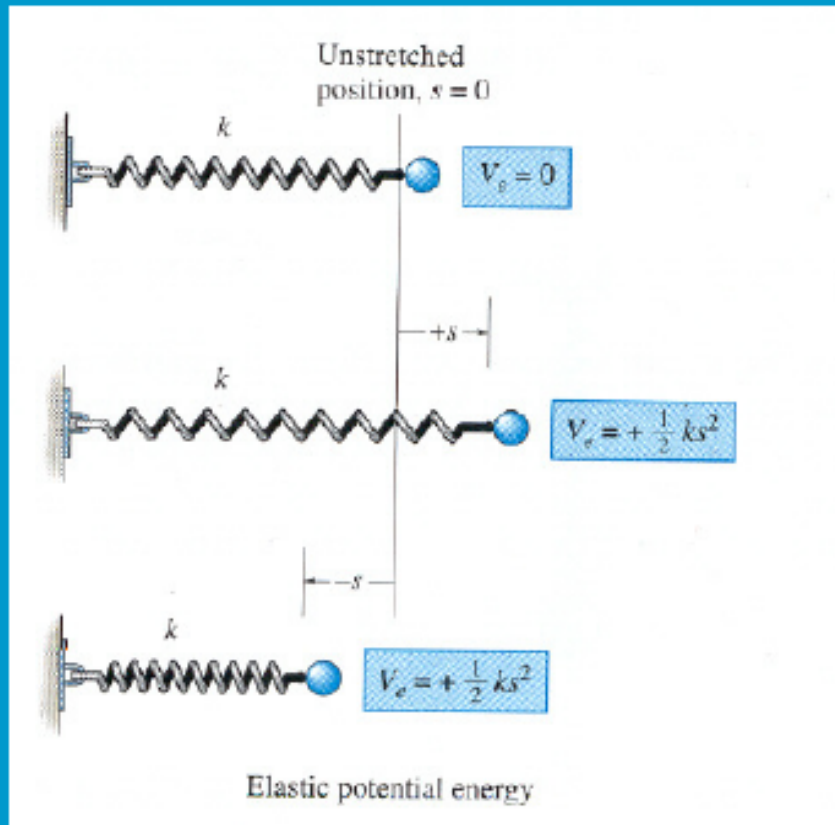


Yaylarda Potansiyel Enerji

Herhangi bir elastik yayda oluşan kuvvetin $F=kx$ olduğunu hatırlayalım. Yaylarda mevcut potansiyel enerji miktarı yazılırken şu ifade kullanılır

$$V_e = \frac{1}{2} kx^2$$

Burada V_e elastik yaydaki potansiyel enerjiyi, k yaya rijitlik katsayısını ve x 'te yaydaki sıkışma miktarını göstermektedir.



ENERJİNİN KORUNUMU

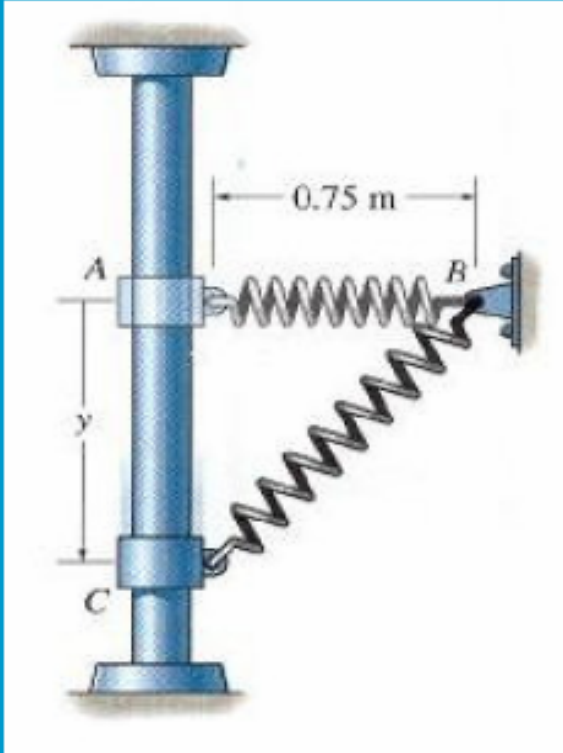
Herhangi bir sistemde kinetik enerji ile potansiyel enerjinin toplamı her zaman sabittir. Yani sistemdeki toplam enerji miktarı her zaman korunur. Cisim hareket ettikçe potansiyel enerji kinetik enerjiye veya kinetik enerji potansiyel enerjiye dönüşebilir. Ama sistemdeki toplam enerji miktarı değişmemektedir. Bu ilkeye enerjinin korunumu ilkesi denir.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = \text{Sabit}$$

T_1 ilk konumdaki (1 konumundaki) kinetik enerjiyi; V_1 ise 1 konumundaki potansiyel enerjiyi; T_2 ve V_2 ise 2 konumundaki kinetik ve potansiyel enerji miktarlarını göstermektedir. Kinetik enerjinin $T = \frac{1}{2} mv^2$ olduğunu hatırlayınız.



Örnek



Yayla bağı A cisminin kütlesi 2 ve yay rijitlik katsayısı 60 kg/m olduğu bilinmektedir. A noktasında cismin ilk hızı Yoktur. Cisim serbest bırakıldığında C noktasına kadar indiğine göre $AC = y$ mesafesini bulunuz.

Örnek

Çözüm:

A ve C noktasında kinetik enerji yoktur ($T_c = 0$)

Potansiyel enerji için önemli olan kıyas düzleminin nerede seçildiğidir. Ayrıca C noktasında potansiyel enerjiyi oluşturan iki ifade bulunmaktadır, yaydaki potansiyel enerji ve cismin yüksekliğinden dolayı sahip olduğu potansiyel enerji

$$V_c = (V_c)_e + (V_c)_g$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

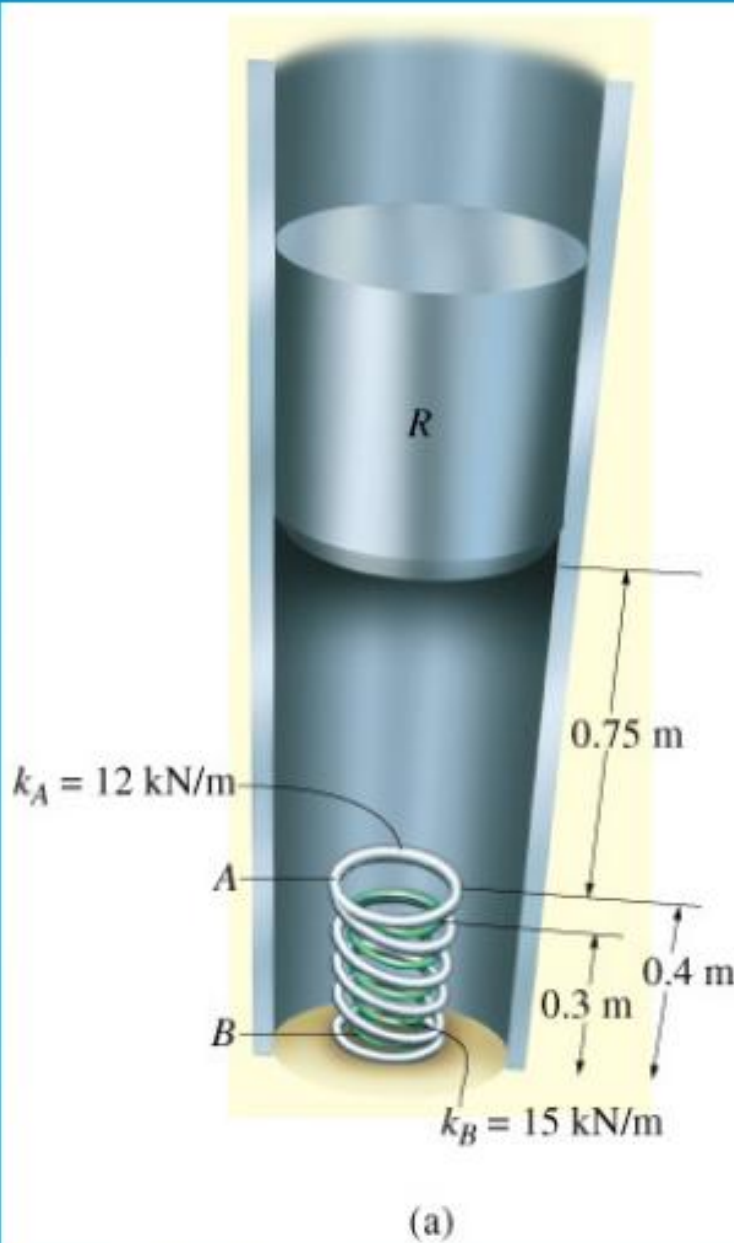
$$0 + 0 = 0 + \left[\frac{60}{2} (\sqrt{(.75)^2 + y^2} - .75)^2 - 2(9.81)y \right]$$

Yukarıdaki ifade A konumu kıyas düzlemi seçilerek yazılmıştır. Bu yüzden 2 konumundaki potansiyel enerji eksi çıkmaktadır. Elde edilen denklem non-lineer bir denklemdir. Sayısal çözüm yöntemleri kullanılarak çözülürse bu denklemin kökünün yaklaşık $y = 1.61$ m olduğu görülür.



Örnek

Şekildeki düzenekte A ve B yayları içiçe ve birbirinden bağımsızdır. A yayının zeminden yüksekliği 0.4m, B yayının ilk yüksekliği ise 0.3 m olarak verilmektedir. Şekildeki ağırlığı 98.1 kg olan R cismi 0.75 metre yükseklikten yayların üzerine bırakılmaktadır. R cismi düştüğünde A ve B yaylarının ne kadar sıkışacağını hesaplayınız?



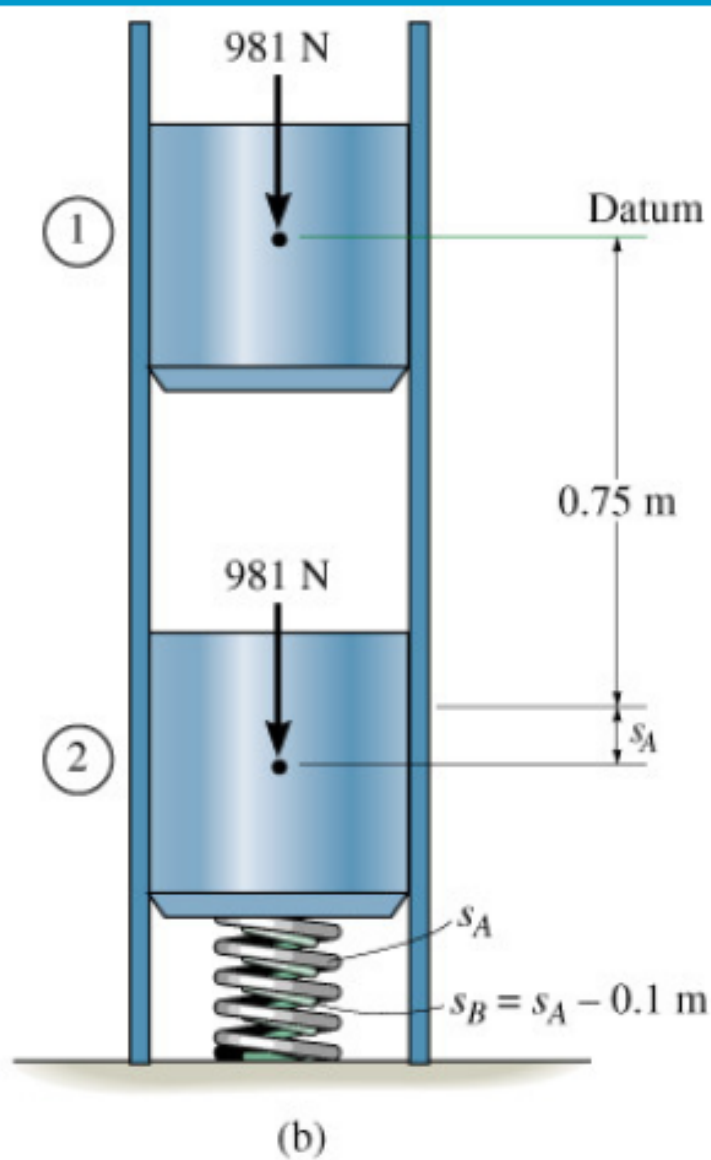
Örnek

R ağırlığı kg olarak verilmiş ancak yay sabitleri KN cinsinden verilmiştir. Bu yüzden

$98.1\text{ kg} = 981\text{ N}$ dönüşümü yapılır.

R cismi düştüğünde A yayı s_A kadar sıkışıyor, B yayı $s_B = s_A - 0.1$ kadar sıkışır.

Bu ifadeler kullanılarak enerjinin korunumu ilkesi yazılırsa.



Örnek

1 konumunda ve 2 konumunda hız değeri 0 olduğu için kinetik enerji 0'dır.

Potansiyel enerji için 2 konumu kıyas düzlemi olarak kabul edilirse 2 konumundaki potansiyel enerji 0 olur.

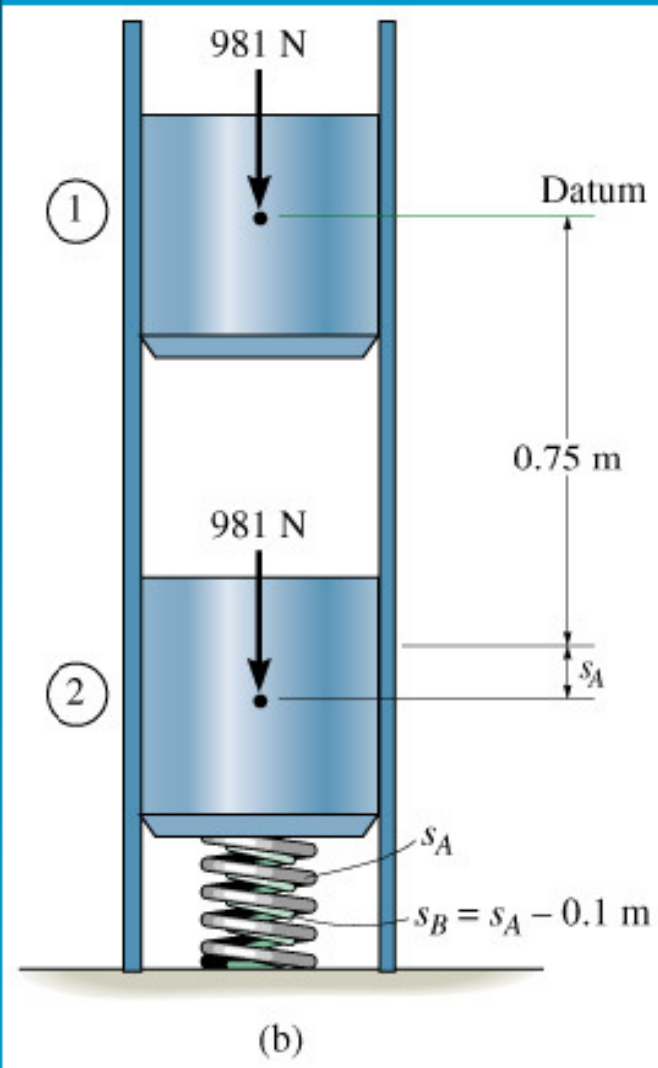
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 981\text{N} \cdot 0,75\text{m} = 0 + 0,5k_A \cdot s_A^2 + 0,5k_B \cdot s_B^2$$

$$s_B = s_A - 0,1, \quad k_A = 12000 \text{ N/m},$$

$k_B = 15000 \text{ N/m}$ yerine yazılırsa

$s_A = 0.2836 \text{ m}$ olarak hesaplanır.

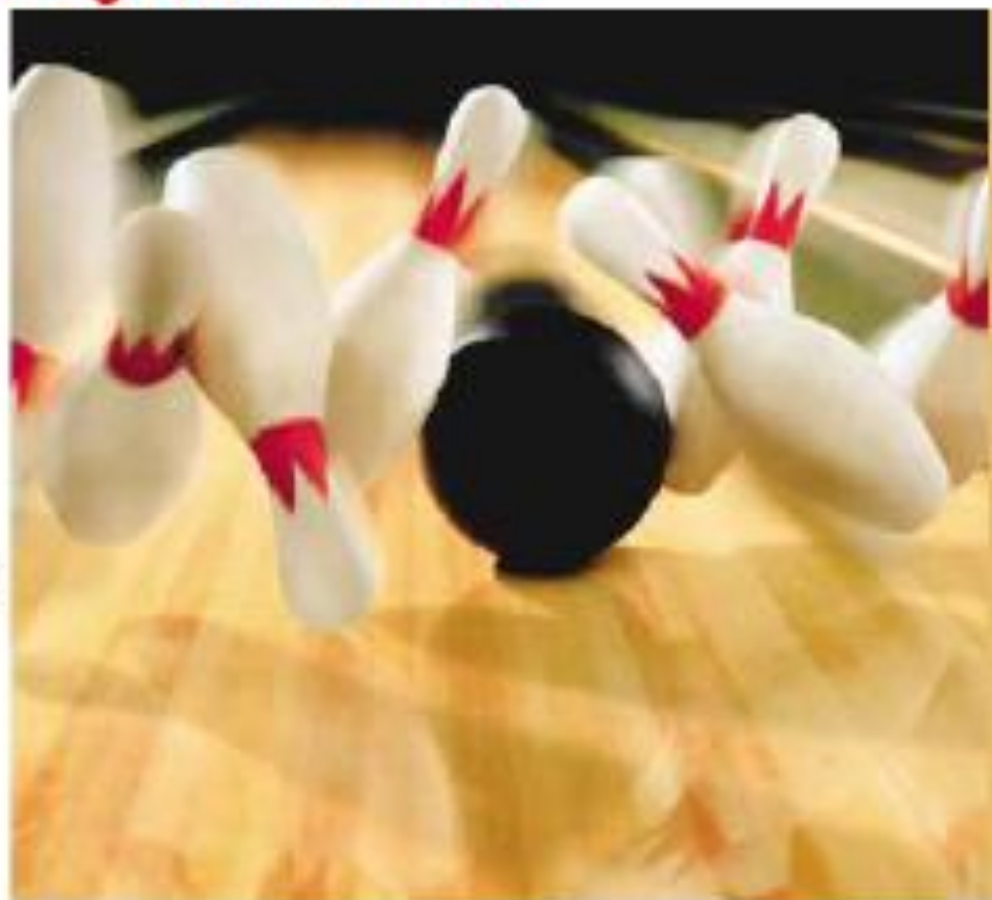


CİSİMLERİN KİNETİĞİ

İmpuls ve Momentum

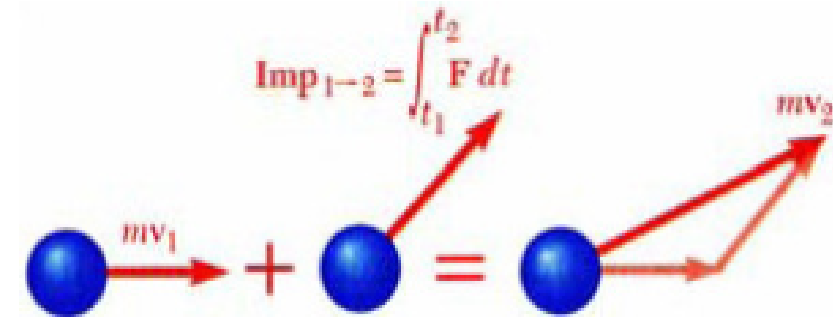
DOĞRUSAL MOMENTUM VE ÇARPIŞMALAR

1. DOĞRUSAL MOMENTUM VE KORUNUMU
2. İMPULS VE MOMENTUM
3. ÇARPIŞMALAR
4. BİR BOYUTTA ESNEK VE ESNEK OLMAYAN ÇARPIŞMALAR
5. İKİ BOYUTTA ÇARPIŞMALAR
6. KÜTLE MERKEZİ
7. PARÇACIKLAR SİSTEMİNİN HAREKETİ



Hareketli bowling topu bir momentum taşır. Top ve lobutlar çarpışınca toptaki momentum lobuta aktarılır (Mark Cooper/Corbis Stock Market).

İmpuls ve Momentum İlkesi



- Newtonun ikinci kanunundan,

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad m\vec{v} = \text{doğrusal momentum}$$

$$\vec{F}dt = d(m\vec{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \vec{F} \text{ kuvvetinin impulsu}$$

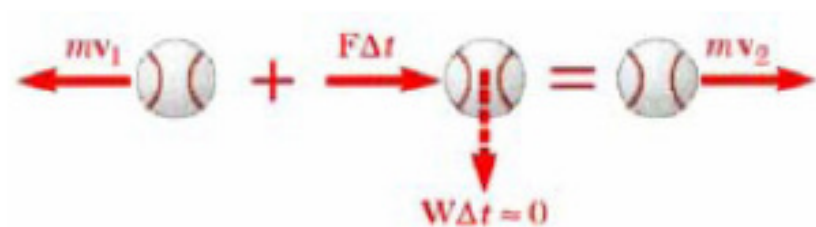
$$m\vec{v}_1 + \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\vec{v}_2$$

- Bir kuvvetin impulsu *kuvvet*zaman* boyutunda olup birimi aşağıdaki şekillerde ifade edilebilir,

$$\text{N} \cdot \text{s} = \left(\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \right) \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

- Maddesel noktanın son momentumu, ilk momentumu ile etkiyen kuvvetin göz önüne alınan süre içindeki impulsunun vektörel olarak toplanması ile elde edilir.

İmpulsif Hareket



- Maddesel noktaya çok kısa bir süre içinde etkiyen ve momentumda belirli bir değişme meydana getirecek büyüklükteki kuvvetlere *impulsif kuvvetler* adı verilir.
- Bir maddesel noktaya impulsif kuvvetler etki ettiğinde,

$$m\vec{v}_1 + \sum \vec{F} \Delta t = m\vec{v}_2$$

- Bir beyzbol topuna vurulunca sopa ile top arasındaki değme çok kısa bir süre devam eder fakat sopanın topa uyguladığı kuvvet yeterli büyüklükte ve bunun sonucu ortaya çıkan impuls topun hareket yönünü değiştirir.
- İmpulsif olmayan bir kuvvet ihmal edilebilir . Zira bu kuvvete ait $\vec{F} \Delta t$ impulsu küçüktür.

Örnek Problem 3.07



4000 lb ağırlığında bir otomobil 60 mi/saat hızla 5° eğimli bir rampadan aşağı doğru inmekteyken, sabit 1500 lb' luk bir frenleme kuvveti doğuracak şekilde frenlenmiştir.

Otomobilin durması için gerekli zamanı bulunuz.

ÇÖZÜM:

- İmpuls ve momentum ilkesini uygulayınız. İmpuls, sabit kuvvetler ile zaman aralığının çarpımına eşittir.

Örnek Problem 3.07

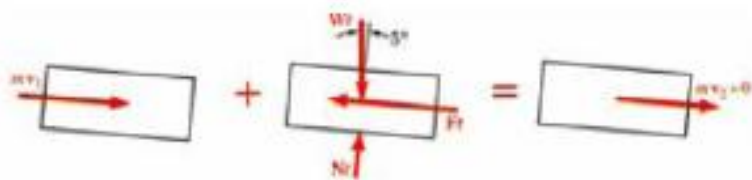


ÇÖZÜM:

- İmpuls ve momentum ilkesini uygulayınız.

$$m\vec{v}_1 + \sum \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\vec{v}_2$$

- Eğik düzleme paralel bileşenler,

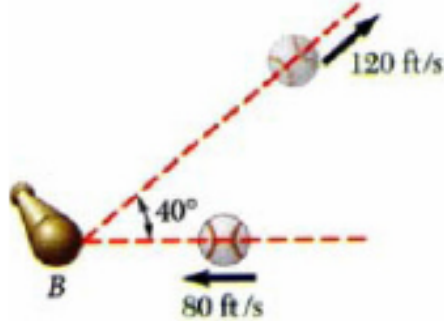


$$mv_1 + (W \sin 5^\circ)t - Ft = 0$$

$$\left(\frac{4000}{32.2} \right) (88 \text{ ft/s}) + (4000 \sin 5^\circ)t - 1500t = 0$$

$$t = 9.49 \text{ s}$$

Örnek Problem 3.08

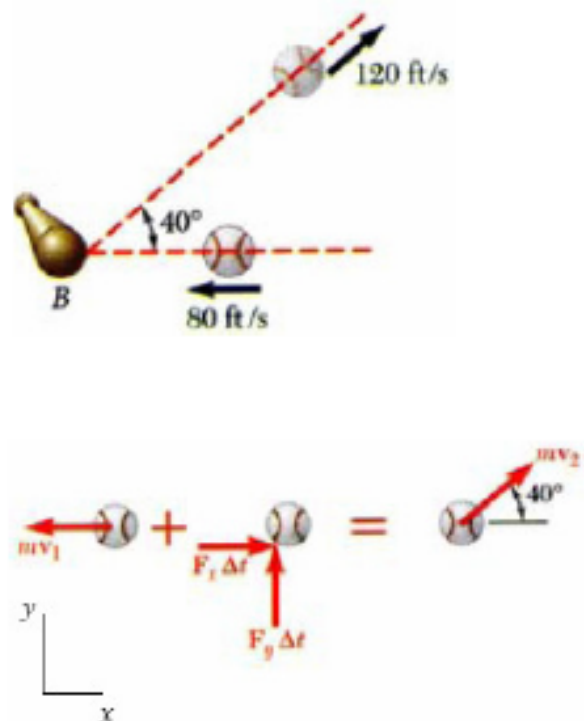


ÇÖZÜM:

- İmpuls ve momentum ilkesini yatay ve düşey doğrultularda uygulayınız.

Bir 4 oz' luk beyzbol topu 80 ft/s lik bir hızla bir top çelcisine doğru atılıyor. B çomağı ile vurulduktan sonra top şekilde gösterilen yönde 120 ft/s lik bir hız kazanıyor. Çomak ile topun dokunma süresi 0.015 s ise bu süre içinde topa gelen ortalama impulsif kuvveti hesaplayınız.

Örnek Problem 3.08



ÇÖZÜM:

- İmpuls ve momentum ilkesini yatay ve düşey doğrultularda uygulayınız.

$$m\vec{v}_1 + \sum \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\vec{v}_2$$

x doğrultusunda denklem:

$$-mv_1 + F_x \Delta t = mv_2 \cos 40^\circ$$

$$-\frac{4/16}{32.2}(80) + F_x(0.15) = \frac{4/16}{32.2}(120 \cos 40^\circ)$$

$$F_x = 89 \text{ lb}$$

y doğrultusunda denklem:

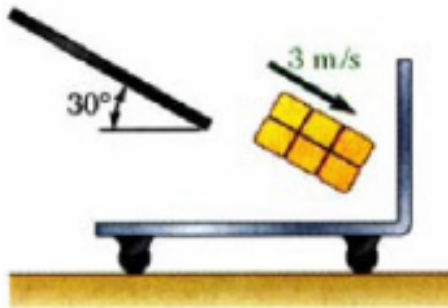
$$0 + F_y \Delta t = mv_2 \sin 40^\circ$$

$$F_y(0.15) = \frac{4/16}{32.2}(120 \sin 40^\circ)$$

$$F_y = 39.9 \text{ lb}$$

$$\vec{F} = (89 \text{ lb})\vec{i} + (39.9 \text{ lb})\vec{j}, \quad F = 97.5 \text{ lb}$$

Örnek Problem 3.09



10 kg ağırlığındaki bir bavul 3 m/s hızla 24 kg lık bir taşıma arabasına düşmektedir. Araba serbestçe hareket edebilmesine rağmen başlangıçta hareketsiz olduğuna göre, (a) arabanın son hızını (b) arabanın bavula uyguladığı impulsu, (c) çarpışma sırasında kaybolan enerjinin başlangıç enerjisine oranını bulunuz.

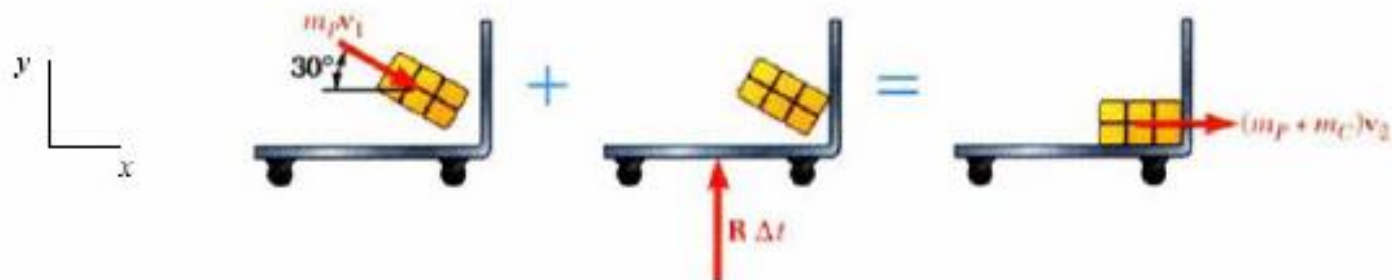
ÇÖZÜM:

- İmpuls ve momentum ilkesini bavul-araba sistemine uygulayıp son hızı bulunuz.
- Aynı ilkeyi, tek başına bavula uygulayıp, momentumundaki değişimden, üzerine uygulanmış olan impulsu bulunuz.

Örnek Problem 3.09

ÇÖZÜM:

- İmpuls ve momentum ilkesini bavul-araba sistemine uygulayıp son hızı bulunuz.



$$m_p \vec{v}_1 + \sum \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = (m_p + m_c) \vec{v}_2$$

x bileşenler:

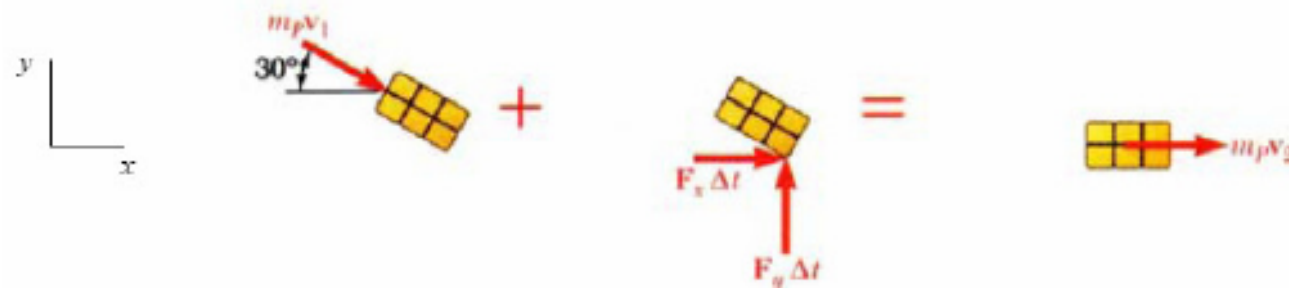
$$m_p v_1 \cos 30^\circ + 0 = (m_p + m_c) v_2$$

$$(10 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \cos 30^\circ = (10 \text{ kg} + 25 \text{ kg}) v_2$$

$$v_2 = 0.742 \text{ m/s}$$

Örnek Problem 3.09

- Aynı ilkeyi, tek başına bavula uygulayıp, momentumundaki değişimden, üzerine uygulanmış olan impulsu bulunuz.



$$m_p \vec{v}_1 + \sum \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m_p \vec{v}_2$$

x bileşenler:

$$m_p v_1 \cos 30^\circ + F_x \Delta t = m_p v_2$$

$$(10 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \cos 30^\circ + F_x \Delta t = (10 \text{ kg})v_2$$

$$F_x \Delta t = -18.56 \text{ N} \cdot \text{s}$$

y bileşenler:

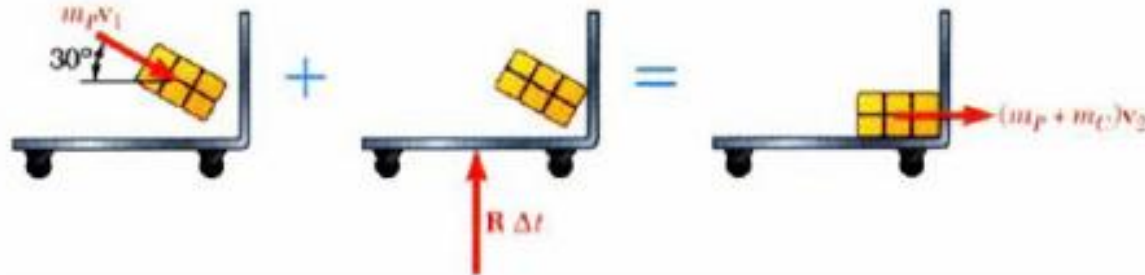
$$-m_p v_1 \sin 30^\circ + F_y \Delta t = 0$$

$$-(10 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \sin 30^\circ + F_y \Delta t = 0$$

$$F_y \Delta t = 15 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$\sum \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \vec{F} \Delta t = (-18.56 \text{ N} \cdot \text{s})\vec{i} + (15 \text{ N} \cdot \text{s})\vec{j} \quad F \Delta t = 23.9 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Örnek Problem 3.09



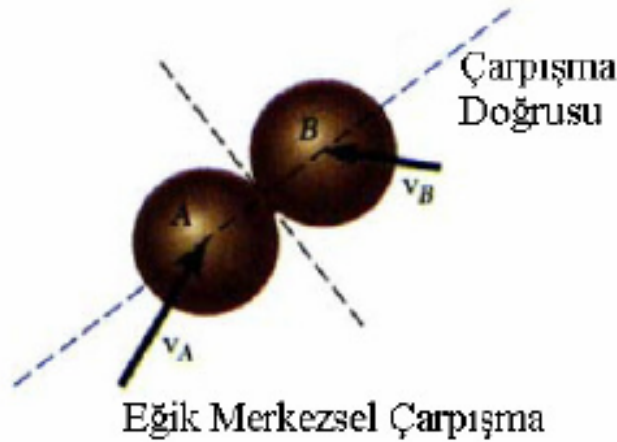
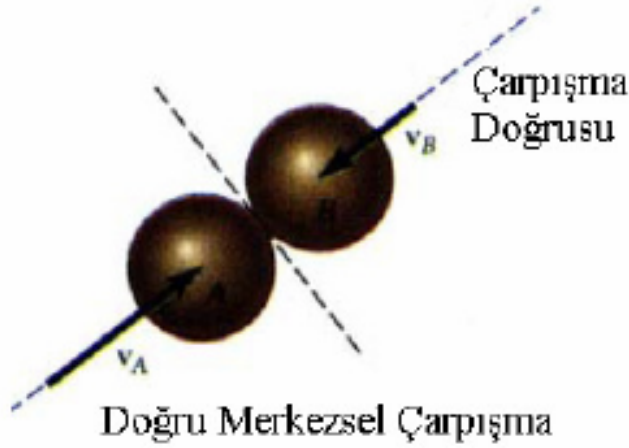
Kaybolan enerji oranını bulmak için,

$$T_1 = \frac{1}{2} m_p v_1^2 = \frac{1}{2} (10 \text{ kg}) (3 \text{ m/s})^2 = 45 \text{ J}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} (m_p + m_c) v_2^2 = \frac{1}{2} (10 \text{ kg} + 25 \text{ kg}) (0.742 \text{ m/s})^2 = 9.63 \text{ J}$$

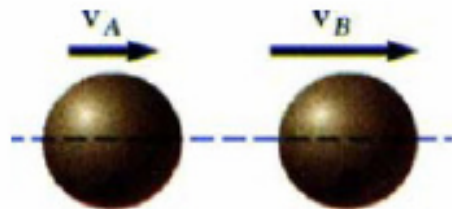
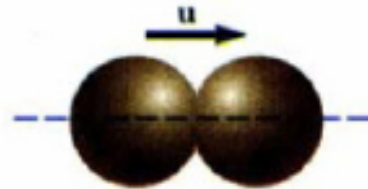
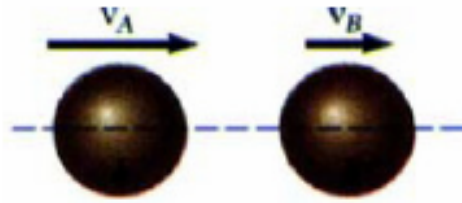
$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{45 \text{ J} - 9.63 \text{ J}}{45 \text{ J}} = 0.786$$

Çarpışma



- *Çarpışma*: İki cismin çok kısa bir süre içinde birbirine dokunup bu arada karşılıklı olarak birbirlerine oldukça büyük kuvvetler uygulamasıdır.
- *Çarpışma doğrusu*: Çarpışma süresindeki dokunma yüzeylerinin ortak normali.
- *Merkezsel Çarpışma*: Çarpışan cisimlerin kütle merkezlerinin çarpışma doğrusu üzerinde bulunduğu çarpışma. Aksi halde çarpışma *merkezsel olmayan çarpışma*dır.
- *Doğru çarpışma*: İki cismin hızlarının çarpışma doğrusu üzerinde bulunduğu çarpışma.
- *Eğik çarpışma*: Cisimlerden birinin veya her ikisinin çarpışma doğrusundan farklı bir doğru üzerinde hareket ettiği çarpışmadır.

Doğru Merkezsel Çarpışma



- Cisimler aynı doğru üzerinde hareket ediyor, $v_A > v_B$
- Çarpışma sonucu iki cisim *şekil değiştirecek* ve *şekil değiştirme süresi* sonunda aynı hıza sahip olacaklardır.
- Sonra bir *geri dönüş* süresi ortaya çıkacak, bu sürenin sonunda, iki cisim ya ilk şekillerini yeniden kazanacaklar veya şekillerini değiştirmiş olarak kalacaklardır.
- Amacımız cisimlerin son hızlarını bulmaktır. İki cisimden oluşan sistemin toplam momentumu korunmaktadır,

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

- Son hızlar arasında ikinci bir bağıntı gereklidir.

Doğru Merkezsel Çarpışma



- Şekil değiştirme süresi: $m_A v_A - \int P dt = m_A u$



- Geri dönüş süresi: $m_A u - \int R dt = m_A v'_A$
- B için de benzer bir hesap sonucunda
- Bağıntıları birleştirerek, son hızlar arasında ikinci bir bağıntı elde edilir.
- Tam plastik çarpışma, $e = 0$: $v'_B = v'_A = v'$
- Tam elastik çarpışma, $e = 1$:
Toplam enerji ve toplam momentum korunur.

$e = \text{çarpışma katsayısı}$

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt} = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$

$$0 \leq e \leq 1$$

$$e = \frac{v'_B - u}{u - v_B}$$

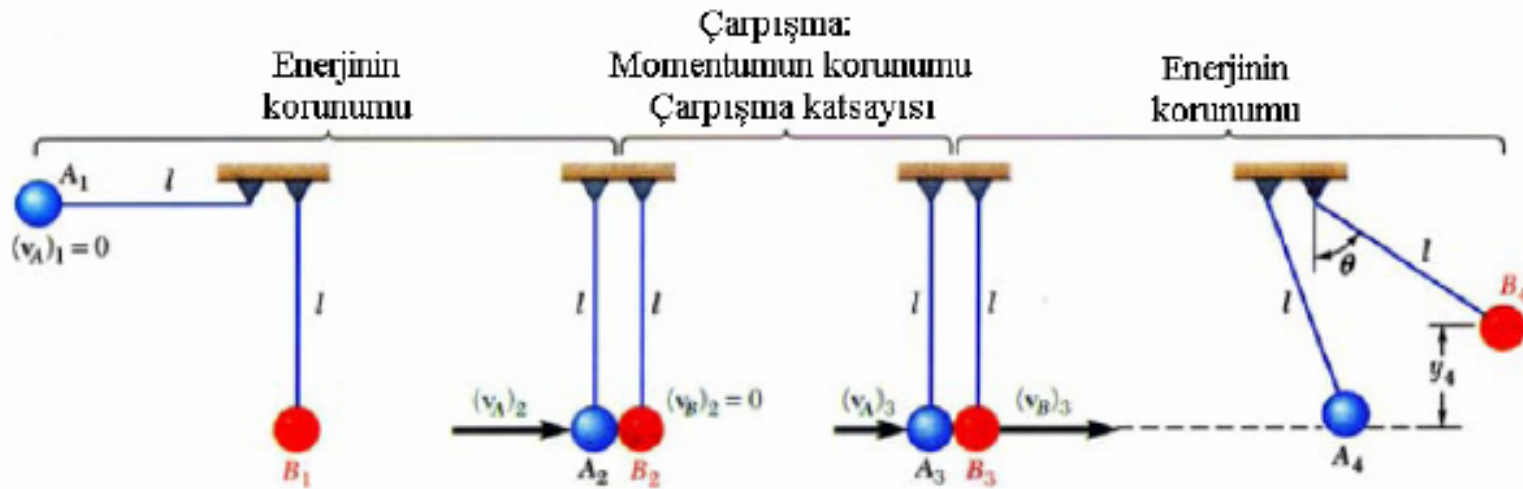
$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B)$$

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v'$$

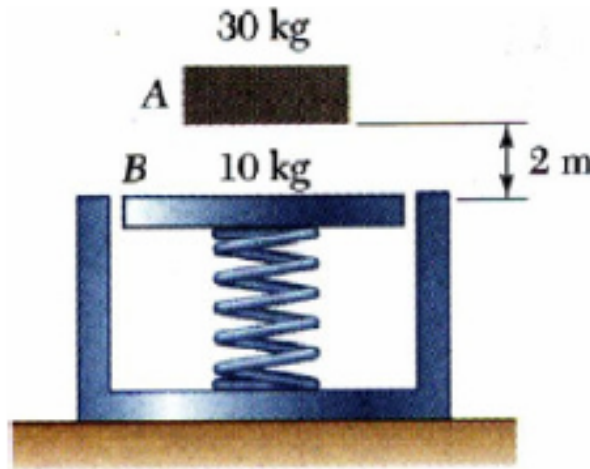
$$v'_B - v'_A = v_A - v_B$$

Enerji ve Momentumla İlgili Problemler

- Kinetik problemlerin çözümü için üç yöntem:
 - Newton'un ikinci kanununun doğrudan uygulanması
 - İş ve enerji yöntemi
 - İmpuls ve momentum yöntemi
- Verilen problemin tümünün veya bir parçasının çözümüne en iyi uyan yöntemi seçiniz.



Örnek Problem 3.13



30 kg lık bir blok 2 m yükseklikten, bir yaylı terazinin 10 kg' lık kefesine düşürülüyor. Çarpmanın tam plastik ($e=0$) olduğunu farzederek, kefenin maksimum çökmesini bulunuz. Yay katsayısı $k = 20 \text{ kN/m}$ dir.

ÇÖZÜM:

- Bloğun çarpma anındaki hızını bulmak için enerjinin korunumu ilkesini uygulayınız.
- Çarpma tam plastik olduğundan, blok ve kefenin çarpmadan sonraki hızları aynıdır. Bu hızı, blok ve kefenin toplam momentumunun korunumundan bulunuz.
- Kefenin maksimum çökmesini, enerjinin korunumu ilkesini uygulayıp bulunuz.

$$v'_B = v'_A = v'$$

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v'$$

Örnek Problem 3.13

ÇÖZÜM:

- Bloğun çarpma anındaki hızını bulmak için enerjinin korunumu ilkesini uygulayınız.

$$T_1 = 0 \quad V_1 = W_A y = (30)(9.81)(2) = 588 \text{ J}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_A (v_A)_2^2 = \frac{1}{2} (30) (v_A)_2^2 \quad V_2 = 0$$

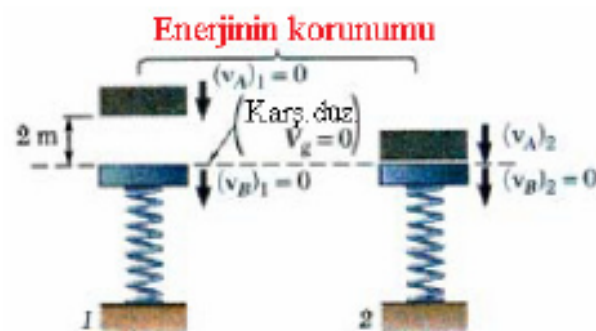
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 588 \text{ J} = \frac{1}{2} (30) (v_A)_2^2 + 0 \quad (v_A)_2 = 6.26 \text{ m/s}$$

- Çarpmadan sonraki hızı, blok ve kefenin toplam momentumunun korunumundan bulunuz.

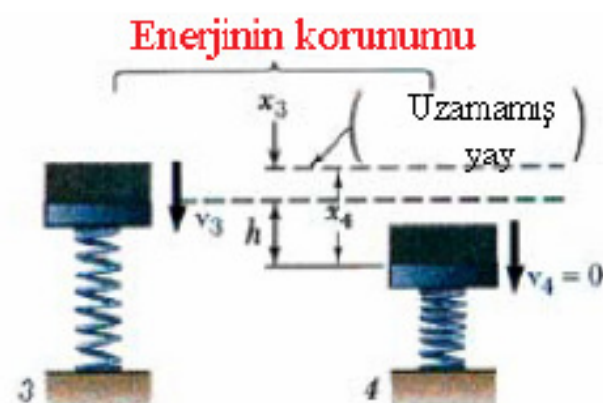
$$m_A (v_A)_2 + m_B (v_B)_2 = (m_A + m_B) v_3$$

$$(30)(6.26) + 0 = (30 + 10) v_3 \quad v_3 = 4.70 \text{ m/s}$$



Örnek Problem 3.13

- Kefenin maksimum çökmesini, enerjinin korunumu ilkesini uygulayıp bulunuz.



Kefe ağırlığından dolayı yayın ilk şekil değişimi:

$$x_3 = \frac{W_B}{k} = \frac{(10)(9.81)}{20 \times 10^3} = 4.91 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$T_3 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_3^2 = \frac{1}{2}(30 + 10)(4.7)^2 = 442 \text{ J}$$

$$V_3 = V_g + V_e$$

$$= 0 + \frac{1}{2}kx_3^2 = \frac{1}{2}(20 \times 10^3)(4.91 \times 10^{-3})^2 = 0.241 \text{ J}$$

$$T_4 = 0$$

$$V_4 = V_g + V_e = (W_A + W_B)(-h) + \frac{1}{2}kx_4^2$$

$$= -392(x_4 - x_3) + \frac{1}{2}(20 \times 10^3)x_4^2$$

$$= -392(x_4 - 4.91 \times 10^{-3}) + \frac{1}{2}(20 \times 10^3)x_4^2$$

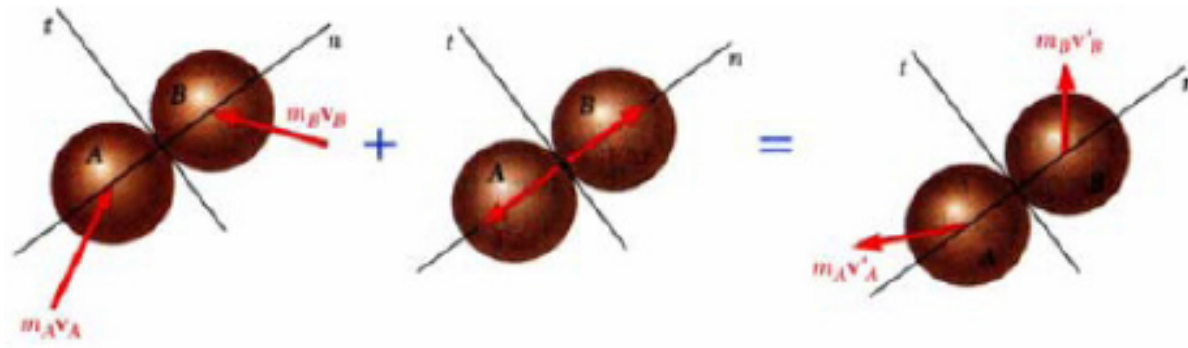
$$T_3 + V_3 = T_4 + V_4$$

$$442 + 0.241 = 0 - 392(x_4 - 4.91 \times 10^{-3}) + \frac{1}{2}(20 \times 10^3)x_4^2$$

$$x_4 = 0.230 \text{ m}$$

$$h = x_4 - x_3 = 0.230 \text{ m} - 4.91 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \boxed{h = 0.225 \text{ m}}$$

Eğik Merkezsel Çarpışma (Serbestçe Hareket Eden Parçacıklar)



- Son hızların şiddeti ve doğrultusu bilinmiyor. Dört denklem gereklidir.

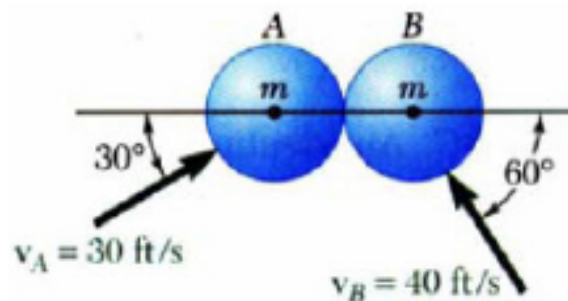
- İmpulsun teğet bileşeni yoktur; cisimlerin her biri için teğet doğrultuda momentum korunur.
- İki cismin toplam momentumunun normal bileşeni korunur.
- İki cismin çarpışmadan sonraki bağlı hızların normal bileşeni, çarpışma katsayısı ile çarpışmadan önceki hızların normal bileşeninin çarpımına eşittir.

$$(v_A)_t = (v'_A)_t \quad (v_B)_t = (v'_B)_t$$

$$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n$$

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n]$$

Örnek Problem 3.15

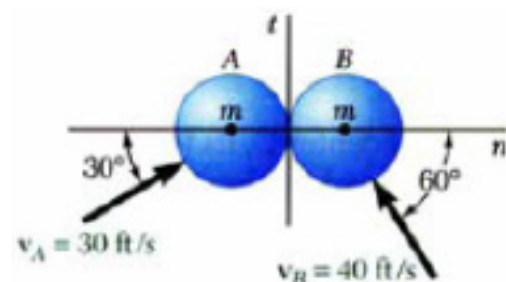


Birbirinin aynı iki pürüzsüz topun çarpışmadan önceki hızlarının şiddet doğrultu ve yönleri şekilde verilmiştir. $e = 0,90$ farzederek topların çarpışmadan sonraki hızlarının şiddet, doğrultu ve yönlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

- Top hızlarını temas yüzeyine teğet ve normal doğrultularda bileşenlerine ayırınız.
- Her iki top için momentumun teğet bileşenlerini koruyunuz.
- İki toptan oluşan sistemin toplam momentumunun normal bileşeni korunur.
- Topların bağıl hızlarının normal bileşenlerinin oranı çarpışma katsayısına eşittir.
- Çarpışmadan sonraki hızların normal bileşenlerini, son iki denklemi birlikte çözerek bulunuz.

Örnek Problem 3.15

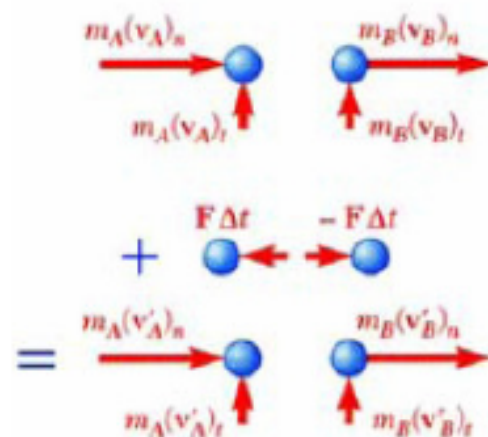


ÇÖZÜM:

- Top hızlarını temas yüzeyine teğet ve normal doğrultularda bileşenlere ayırınız

$$(v_A)_n = v_A \cos 30^\circ = 26.0 \text{ ft/s} \quad (v_A)_t = v_A \sin 30^\circ = 15.0 \text{ ft/s}$$

$$(v_B)_n = -v_B \cos 60^\circ = -20.0 \text{ ft/s} \quad (v_B)_t = v_B \sin 60^\circ = 34.6 \text{ ft/s}$$



- Her iki top için momentumun teğet bileşenlerini koruyunuz.

$$(v'_A)_t = (v_A)_t = 15.0 \text{ ft/s}$$

$$(v'_B)_t = (v_B)_t = 34.6 \text{ ft/s}$$

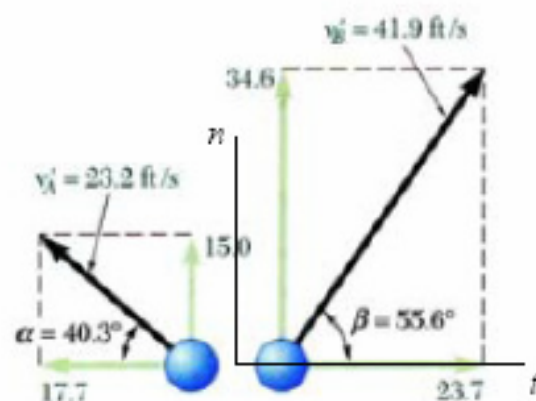
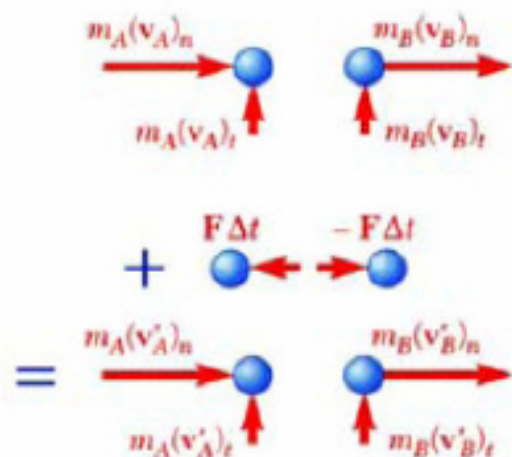
- İki toptan oluşan sistemin toplam momentumunun normal bileşeni korunur.

$$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n$$

$$m(26.0) + m(-20.0) = m(v'_A)_n + m(v'_B)_n$$

$$(v'_A)_n + (v'_B)_n = 6.0$$

Örnek Problem 3.15



- Topların bağıl hızlarının normal bileşenlerinin oranı çarpışma katsayısına eşittir.

$$\begin{aligned}(v'_A)_n - (v'_B)_n &= e[(v_A)_n - (v_B)_n] \\ &= 0.90[26.0 - (-20.0)] = 41.4\end{aligned}$$

- Çarpışmadan sonraki hızların normal bileşenlerini, son iki denklemi birlikte çözerek bulunuz.

$$(v'_A)_n = -17.7 \text{ ft/s} \qquad (v'_B)_n = 23.7 \text{ ft/s}$$

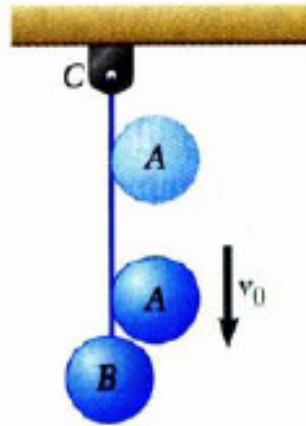
$$\vec{v}'_A = -17.7 \vec{\lambda}_t + 15.0 \vec{\lambda}_n$$

$$v'_A = 23.2 \text{ ft/s} \quad \tan^{-1}\left(\frac{15.0}{17.7}\right) = 40.3^\circ$$

$$\vec{v}'_B = 23.7 \vec{\lambda}_t + 34.6 \vec{\lambda}_n$$

$$v'_B = 41.9 \text{ ft/s} \quad \tan^{-1}\left(\frac{34.6}{23.7}\right) = 55.6^\circ$$

Örnek Problem 3.16



B topu uzamaz bir ipte asılıdır. B'nin benzeri olan A topu ilk hızsız olarak ipe dokunur konumda serbest bırakılmıştır. A'nın B'ye çarpmadan hemen önceki hızı v_0 dir. Çarpışmanın tam elastik ($e = 1$) olduğunu ve sürtünme olmadığını kabul ederek topların çarpışmadan hemen sonraki hızlarını bulunuz.

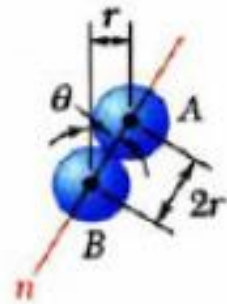
ÇÖZÜM:

- Çarpışma doğrusunu belirleyiniz.
- A topunun momentumunun çarpışma düzlemine teğet doğrultudaki bileşeni korunur.
- İki toptan oluşan sistemin yatay doğrultuda momentumu korunur.
- Çarpışma doğrusu üzerindeki bağıl hız bileşenleri arasındaki orantı çarpışma katsayısına eşittir.
- Son iki denklemi, A topunun hızının çarpışma doğrusu üzerindeki bileşeni ve yatay B topu hızı için çözünüz.

Örnek Problem 3.16

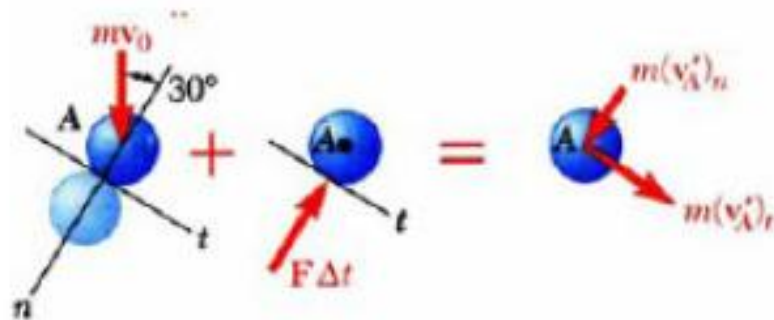
ÇÖZÜM:

- Çarpışma doğrusunu belirleyiniz.
- A topunun momentumunun çarpışma düzlemine teğet doğrultudaki bileşeni korunur.



$$\sin \theta = \frac{r}{2r} = 0.5$$

$$\theta = 30^\circ$$

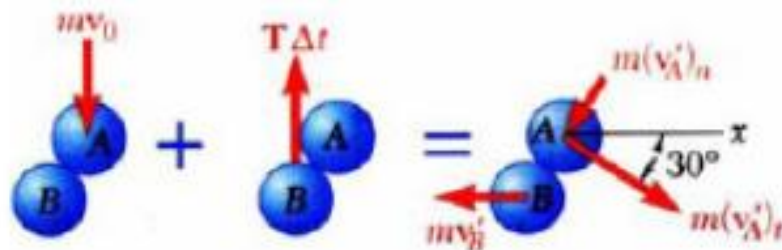


$$m\vec{v}_A + \vec{F}\Delta t = m\vec{v}'_A$$

$$mv_0 \sin 30^\circ + 0 = m(v'_A)_t$$

$$(v'_A)_t = 0.5v_0$$

- İki toptan oluşan sistemin yatay doğrultuda momentumu korunur.



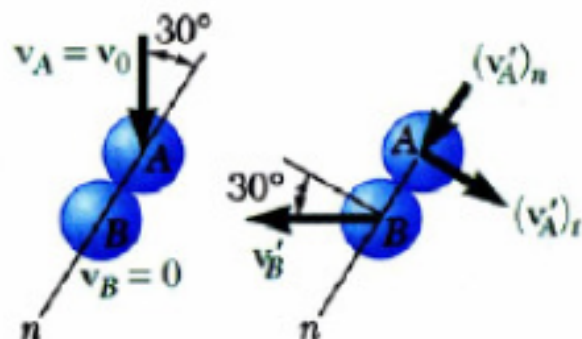
$$mv_A + T\Delta t = mv'_A + mv'_B$$

$$0 = m(v'_A)_t \cos 30^\circ - m(v'_A)_n \sin 30^\circ - mv'_B$$

$$0 = (0.5v_0) \cos 30^\circ - (v'_A)_n \sin 30^\circ - v'_B$$

$$0.5(v'_A)_n + v'_B = 0.433v_0$$

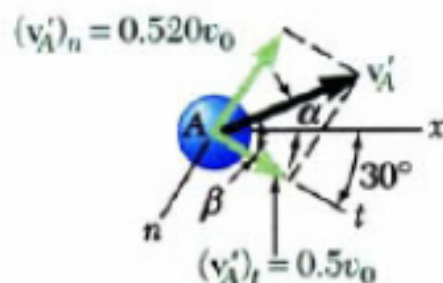
Örnek Problem 3.16



- Çarpışma doğrusu üzerindeki bağıl hız bileşenleri arasındaki orantı çarpışma katsayısına eşittir.

$$\begin{aligned}(v'_B)_n - (v'_A)_n &= e[(v_A)_n - (v_B)_n] \\ v'_B \sin 30^\circ - (v'_A)_n &= v_0 \cos 30^\circ - 0 \\ 0.5v'_B - (v'_A)_n &= 0.866v_0\end{aligned}$$

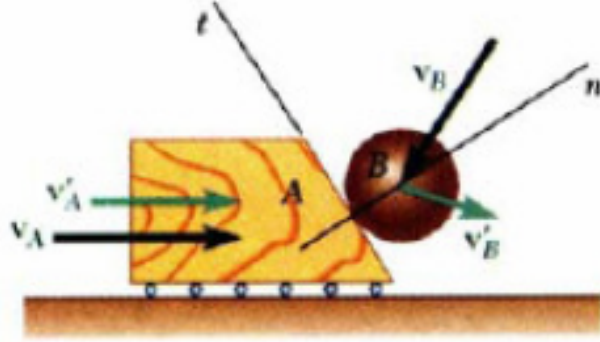
- Son iki denklemi, A topunun hızının çarpışma doğrusu üzerindeki bileşeni ve yatay B topu hızı için çözünüz.



$$(v'_A)_n = -0.520v_0 \quad v'_B = 0.693v_0$$

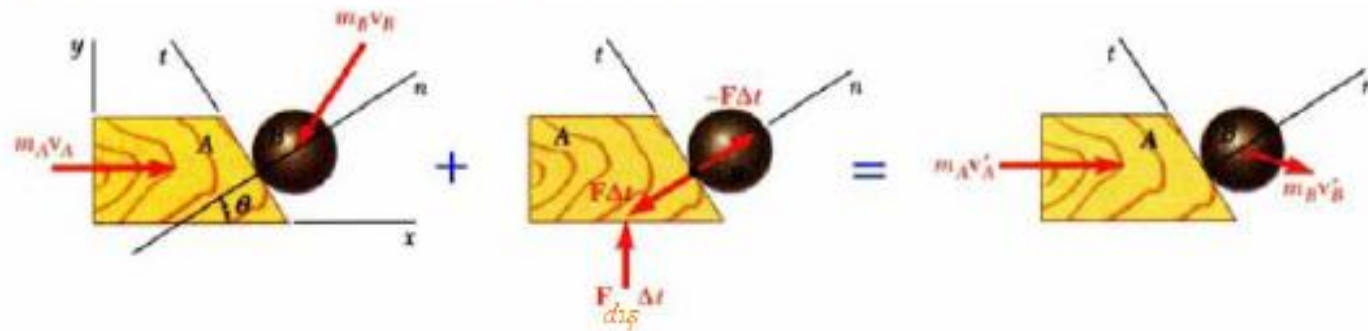
$$\begin{aligned}v'_A &= 0.5v_0\vec{e}_t - 0.520v_0\vec{e}_n \\ v'_A &= 0.721v_0 \quad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{0.52}{0.5}\right) = 46.1^\circ \\ \alpha &= 46.1^\circ - 30^\circ = 16.1^\circ \\ v'_B &= 0.693v_0 \leftarrow\end{aligned}$$

Eğik Merkezsel Çarpışma (Cisimlerden birinin hareketi kısıtlanmıştır)



- Blok yatay düzlemde hareket etmeye zorlanmıştır.
- n eksenini doğrultusundaki $\vec{F}$ ve $-\vec{F}$ iç kuvvetleri ile düşey doğrultuda etkiyen yüzeyden gelen $\vec{F}_{dış}$ dış kuvvetinden impulslar gelmektedir.
- Topun son hızının doğrultusu ve şiddeti ile bloğun son hızı bilinmiyor. Üç denklem gerekli.

Eğik Merkezsel Çarpışma



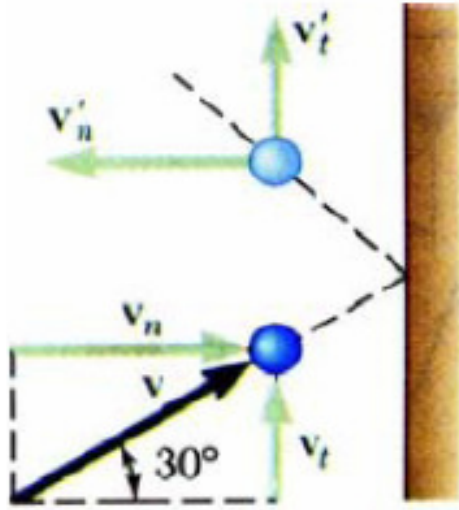
- Topun momentumunun teğetsel bileşeni korunur.
- Blok ve topun toplam momentumunun yatay bileşeni korunur.
- Blok ve topun bağıl hızlarının normal bileşenlerinin oranları çarpışma katsayısına eşittir.

$$(v_B)_t = (v'_B)_t$$

$$m_A(v_A)_x + m_B(v_B)_x = m_A(v'_A)_x + m_B(v'_B)_x$$

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n]$$

Örnek Problem 3.17 (bir maddesel noktanın ağır bir rijit cisimle çarpışması)

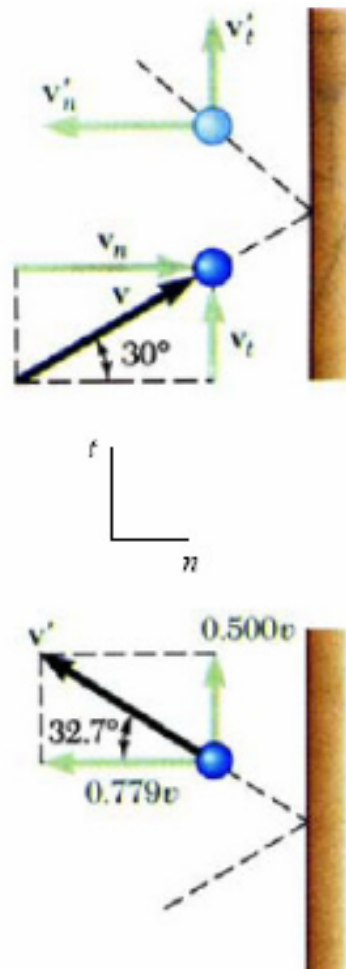


Pürüzsüz düşey bir duvara bir top atılıyor. Top duvara varmadan hemen önce hızının şiddeti v dir ve yatayla 30° lik bir açı yapmaktadır. $e = 0,90$ olduğu bilindiğine göre, top geri fırladığı anda hızının şiddetini ve doğrultusunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

- Topun ilk hızını, duvara normal ve teğet doğrultularda bileşenlere ayırınız.
- Duvarın uyguladığı impuls normal doğrultudadır. Topun teğet doğrultuda momentumu korunur.
- Duvar kütlesi sonsuz büyüklükte olduğundan hızı çarpışmadan önce ve sonra sıfırdır. Çarpışma katsayısı bağıntısını yazarak top hızının duvara normal bileşenindeki değişimi bulunuz.

Örnek Problem 3.17 (bir maddesel noktanın ağır bir rijit cisimle çarpışması)



ÇÖZÜM:

- Topun ilk hızını, duvara dik ve paralel doğrultularda bileşenlere ayırınız.

$$v_n = v \cos 30^\circ = 0.866v \quad v_t = v \sin 30^\circ = 0.500v$$

- Topun teğet doğrultuda momentumu korunur.

$$v'_t = v_t = 0.500v$$

- Duvar hızını sıfır alarak, çarpışma katsayısı bağıntısını yazınız.

$$0 - v'_n = e(v_n - 0)$$

$$v'_n = -0.9(0.866v) = -0.779v$$

$$\vec{v}' = -0.779v \vec{\lambda}_n + 0.500v \vec{\lambda}_t$$

$$v' = 0.926v \quad \tan^{-1}\left(\frac{0.779}{0.500}\right) = 32.7^\circ$$